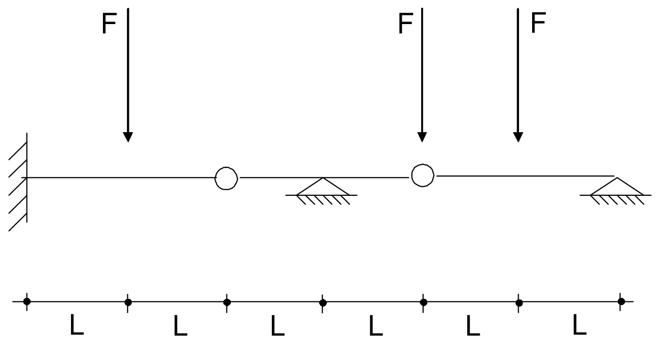
Esame 16 giugno 2010

Si consideri la trave di Figura, incastrata a sinistra, appoggiata a destra ed in mezzeria, e divisa in tre tratti tramite l'introduzione di due cerniere situate ad un terzo ed a due terzi della luce. In presenza delle tre forze verticali di figura, tracciare il diagramma dei tagli e dei momenti flettenti

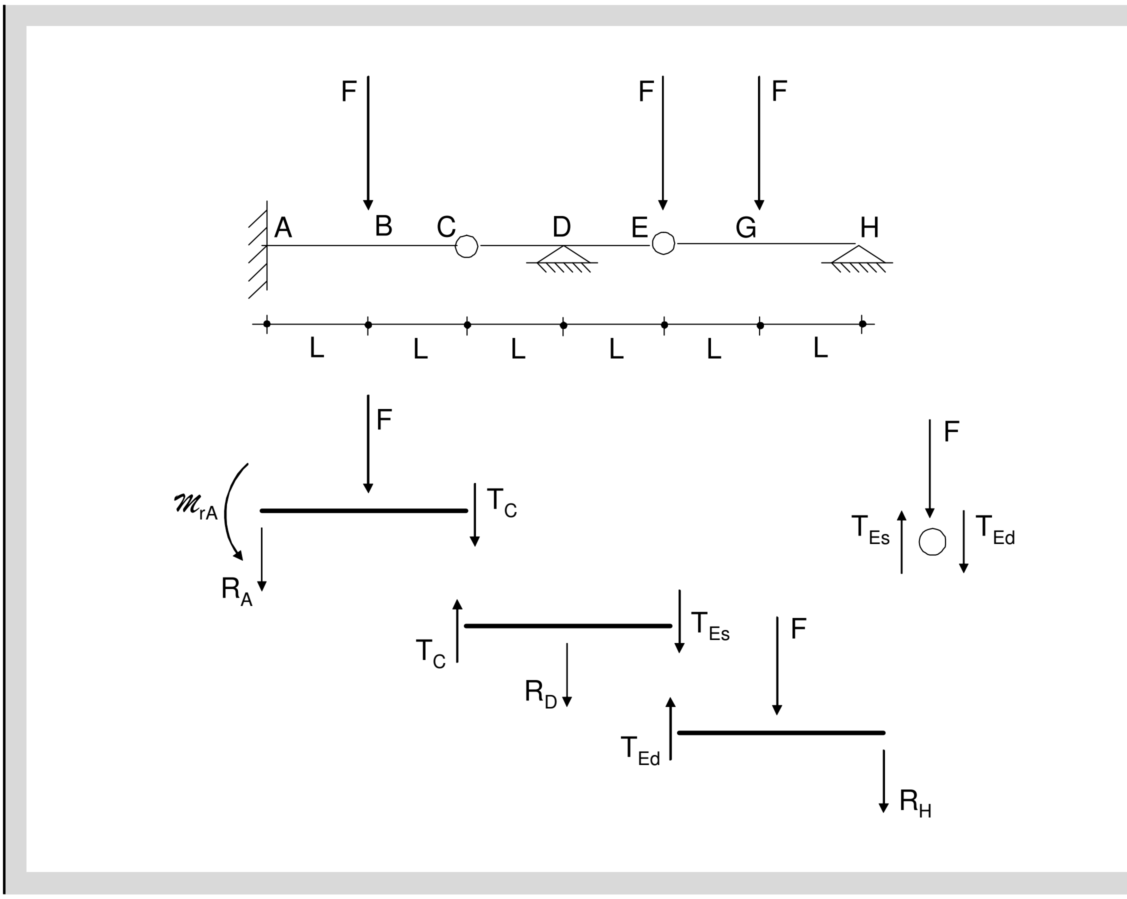


Passo 1 - Scelta del metodo solutivo

La trave e' isostatica, in quanto possono scriversi sei equazioni di equilibrio nelle sei incognite reattive: coppia reattiva M_{rA} e reazione verticale R_A dell'incastro a sinistra, reazione verticale R_D e reazione verticale R_H dei due appoggi, taglio T_C nella prima cerniera e taglio T_{Es} a sinistra della seconda cerniera. Si sceglie quindi di calcolare le reazioni, tracciare il diagramma del taglio in base alla loro conoscenza, ed al fatto che esso sara' costante a tratti, ed infine tracciare il diagramma del momento basandosi sulla relazione $\mathrm{T} = \mathrm{dM}/\mathrm{dx}_3$.

Passo 2 - Scrittura e soluzione delle equazioni di equilibrio

Si disegni anzitutto la trave divisa nei tre tratti, sostituendo ai vincoli le rispettive reazioni:



Per l'equilibrio della cerniera in E, si puo' osservare dalla Figura che $T_{Es} = F + T_{Ed}$ e quindi potra' scriversi

Per il primo tratto si ha, scegliendo A come polo:

$$R_A + F + T_C = 0$$
$$\mathcal{M}_{rA} - FL - 2\,T_C\,L = 0 \tag{1}$$

Per il secondo tratto si ha, scegliendo E come polo:

$$-T_C + R_D + F + T_{Ed} = 0$$
$$-2\,T_C\,L + R_D\,L = 0 \tag{2}$$

Per il terzo tratto si ha, scegliendo E come polo:

$$-T_{Ed} + F + R_H = 0$$
$$-2\,R_H\,L - F\,L = 0 \tag{3}$$

L'ultima equazione fornisce la reazione nell'appoggio di destra:

$$R_H = -\frac{F}{2} \tag{4}$$

e quindi la penultima fornisce il taglio a destra della cerniera in E:

$$T_{Ed} = F + R_H = \frac{F}{2} \tag{5}$$

La terza e la quarta equazione forniscono poi la reazione dell'appoggio centrale ed il taglio nella prima cerniera:

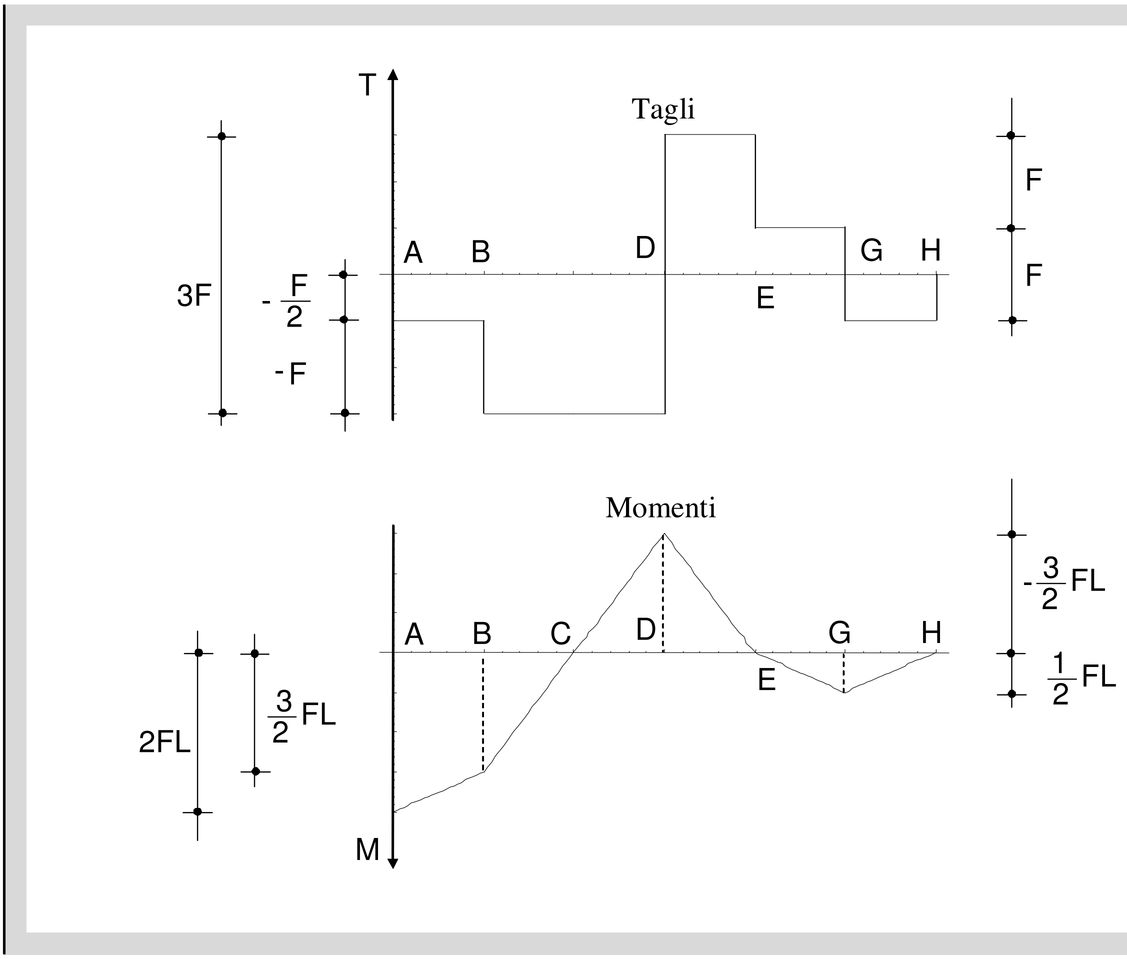
$$T_C = -\frac{3}{2}\,F$$
$$R_D = -3\,F \tag{6}$$

Infine, la prima equazione fornisce R_A e la seconda fornisce la coppia reattiva M_{rA} dell'incastro:

$$R_A = \frac{F}{2}$$
$$\mathcal{M}_{rA} = -2\,FL \tag{7}$$

■ Passo 3 - Tracciamento del diagramma del taglio e del momento

Il diagramma del taglio sara' costante a tratti: da A a B esso sara' pari a $-R_A = -F/2$. Nel tratto BD sara' ancora costante e pari a T_C = -3/2 F. In D si ha una discontinuita' di -3F, dovuta alla reazione, e nel tratto DE esso avra' valore 3/2 F. In E vi e' una forza concentrata, che causa un'altra discontinuita', sicche' nel tratto EG il taglio varra' F/2. Infine, da G ad H il taglio sara' pari ad $R_H = -F/2$



Per il tracciamento del diagramma del momento, si consideri che il diagramma deve variare linearmente a tratti, e che la pendenza di ciascun tratto sara' pari al corrispondente valore del taglio. Laddove il taglio e' discontinuo, il diagramma del momento avra' una discontinuita' angolare.
In A il valore del taglio e' noto, essendo pari alla coppia reattiva cambiata di segno. Nel tratto AB il diagramma del momento avra' pendenza pari a -F/2, sicche' decrescera' dal valore $M_A = 2\,FL$ fino ad M_B = 2FL - F/2 L = 3/2 FL.
Nel tratto BC la pendenza aumenta, passando al vaore -3/2 F, quindi il momento decresce ancora, variando da M_B fino a:

$$M_D = M_B - \frac{3}{2} F\, 2\, L = -\frac{3}{2} F\, L \tag{8}$$

Come utile verifica, si puo' osservare che il diagramma del momento viene ad annullarsi nella cerniera C. Nel tratto DE la pendenza cambia di segno, e quindi il valore del momento cresce, passando da M_D a:

$$M_D = M_B - \frac{3}{2} F\, 2\, L = -\frac{3}{2} F\, L \tag{9}$$

Ovviamente, bisognava attendersi questo risultato. Da E a G la pendenza diminuisce, ed il momento giunge in G con un valore:

$$M_G = M_E + \frac{F}{2} L = \frac{FL}{2} \qquad (10)$$

Infine, nell'ultimo tratto la pendenza cambia di nuovo, ed il momento si viene ad annullare in corrispondenza dell'appoggio