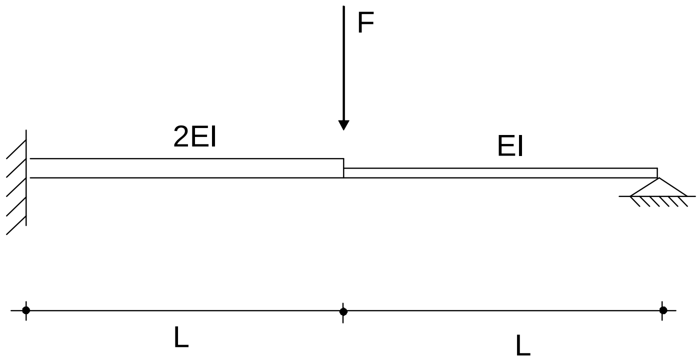
Esame 15 settembre 2010

Si consideri la trave di Figura, incastrata a sinistra ed appoggiata a destra, sollecitata da una forza in mezzeria, e costituita da due tratti, il primo di rigidezza flessionale 2EI, il secondo di rigidezza flessionale EI. Per essa:

1 calcolare le reazioni e disegnare i diagrammi di tagli, momenti, rotazioni e spostamenti

2 calcolare lo spostamento massimo e l'ascissa dove esso si verifica



Passo 1 - Scelta del metodo solutivo

La trave e' costituita da un unico tratto, quindi possono scriversi due equazioni di equlibrio, mentre le incognite reattive sono tre, ossia la reazione verticale e la coppia reattiva nell'incastro, e la reazione verticale dell'appoggio. Ne segue che la trave e' una volta iperstatica, e conviene utilizzare il metodo della scrittura delle equazioni differenziali del quarto ordine della linea elastica, in quanto la sezione retta discontinua impedisce l'utilizzo agevole della scrittura di equazioni di congruenza.

Passo 2 - Scrittura e soluzione delle equazioni differenziali della linea elastica

Esiste un solo punto di discontinuita', in corrispondenza della mezzeria, quindi devono scriversi due equazioni differenziali negli spostamenti u_2 e v_2, e poiche' non esistono carichi distribuiti queste equazioni sono omogenee:

$$u_2''''(x_3) = 0$$
$$v_2''''(x_3) = 0 \tag{1}$$

con soluzioni:

$$u_2(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \tag{2}$$

$$v_2(x_3) = b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \tag{3}$$

Le otto condizioni ai limiti dovranno esprimere due condizioni di congruenza nell'incastro:

$$\begin{aligned} &u_2(0) = 0 \\ &u_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

quattro condizioni nella sezione intermedia:

$$\begin{aligned} &u_2(L) = v_2(0) \\ &u_2'(L) = v_2'(0) \\ &M^{(s)} = M^{(d)} \longrightarrow -2\,EI\,u_2''(L) = -EIv_2''(0) \\ &T^{(s)} = T^{(d)} + F \longrightarrow -2\,EIu_2'''(L) = -EIv_2'''(0) + F \end{aligned} \tag{5}$$

ed ancora una condizione di congruenza ed una di equilibrio nell'appoggio a destra:

$$\begin{aligned} &v_2(L) = 0 \\ &v_2''(L) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Derivando opportunamente le (2) e (3) e valutando le (4-6), si giunge a scrivere il sistema di otto equazioni nelle otto costanti di integrazione a_i e b_i :

$$\begin{aligned} &a_0 = 0 \\ &a_1 = 0 \\ &a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 = b_0 \\ &a_1 + 2\,a_2 L + 3\,a_3 L^2 = b_1 \\ &4\,a_2 + 12\,a_3 L = 2\,b_2 \\ &12\,a_3 = 6\,b_3 - \frac{F}{EI} \\ &b_0 + b_1 L + b_2 L^2 + b_3 L^3 = 0 \\ &2\,b_2 + 6\,b_3 L = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Tale sistema si riduce immediatamente ad un sistema di sei equazioni:

$$\begin{aligned} &a_2 L^2 + a_3 L^3 = b_0 \\ &2\,a_2 L + 3\,a_3 L^2 = b_1 \\ &2\,a_2 + 6\,a_3 L = b_2 \\ &2\,a_3 = b_3 - \frac{F}{6\,EI} \longrightarrow b_3 = 2\,a_3 + \frac{F}{6\,EI} \\ &b_0 + b_1 L + b_2 L^2 + b_3 L^3 = 0 \\ &b_2 + 3\,b_3 L = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Si sostituiscano - nelle ultime due equazioni - i valori di $b_{0,}$ b_1, b_2 e b_3 ricavati dalle prime quattro equazioni, giungendo cosi' a due equazioni nelle due incognite a_2 ed a_3 :

$$\begin{aligned} &\left(a_2 L^2 + a_3 L^3\right) + \left(2\,a_2 L + 3\,a_3 L^2\right) L + (2\,a_2 + 6\,a_3 L)\,L^2 + \left(2\,a_3 + \frac{F}{6\,EI}\right) L^3 = 0 \\ &(2\,a_2 + 6\,a_3 L) + 3\left(2\,a_3 + \frac{F}{6\,EI}\right) L = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

e semplificando:

$$\begin{aligned} &5\,a_2 + 12\,a_3 L = -\frac{F}{6\,EI} L \\ &2\,a_2 + 12\,a_3 L = -\frac{F}{2\,EI} L \end{aligned} \tag{10}$$

con soluzione:

$$a_3 = -\frac{13\,F}{216\,EI}$$
$$a_2 = \frac{F}{9\,EI}\,L \tag{11}$$

I valori di b_0, b_1, b_2 e b_3 possono ora leggersi dalle prime quattro equazioni:

$$b_0 = \frac{11\,F}{216\,EI}\,L^3$$
$$b_1 = \frac{F}{24\,EI}\,L^2$$
$$b_2 = -\frac{5\,F}{36\,EI}\,L \tag{12}$$
$$b_3 = \frac{5\,F}{108\,EI}$$

Gli spostamenti lungo la trave sono forniti quindi da:

$$u_2\,(x_3) = \frac{F}{EI}\left(\frac{1}{9}\,L\,x_3^2 - \frac{13}{216}\,x_3^3\right) \tag{13}$$

$$v_2\,(x_3) = \frac{F}{EI}\left(\frac{11}{216}\,L^3 + \frac{1}{24}\,L^2\,x_3 - \frac{5}{36}\,L\,x_3^2 + \frac{5}{108}\,x_3^3\right) \tag{14}$$

le rotazioni sono pari a:

$$\phi^{(1)}\,(x_3) = -\frac{F}{EI}\left(\frac{2}{9}\,L\,x_3 - \frac{13}{72}\,x_3^2\right) \tag{15}$$

$$\phi^{(2)}\,(x_3) = -\frac{F}{EI}\left(\frac{1}{24}\,L^2 - \frac{5}{18}\,L\,x_3 + \frac{5}{36}\,x_3^2\right) \tag{16}$$

il momento flettente e' esprimibile come:

$$M_1^{(1)}\,(x_3) = -2\,F\left(\frac{2}{9}\,L - \frac{13}{36}\,x_3\right) \tag{17}$$

$$M_1^{(2)}\,(x_3) = -F\left(-\frac{5}{18}\,L + \frac{5}{18}\,x_3\right) \tag{18}$$

Infine, il taglio e' pari a:

$$T_2^{(1)}\,(x_3) = \frac{13}{18}\,F \tag{19}$$

$$T_2^{(2)}\,(x_3) = -\frac{5}{18}\,F \tag{20}$$

■ Passo 3 - Calcolo delle reazioni

Dai valori del taglio e del momento si deduce subito che la reazione verticale nell'incastro e' pari a:

$$R_A = -T_2^{(1)}\,(x_3 = 0) = -\frac{13}{18}\,F \tag{21}$$

mentre la reazione verticale dell'appoggio e' pari a:

$$R_B = T_2^{(2)}\,(x_3 = L) = -\frac{5}{18}\,F \tag{22}$$

Si noti che, ovviamente, sara', per l'equilibrio alla traslazione verticale della trave:

$$R_A + R_B + F = 0 \tag{23}$$

Infine, la coppia reattiva nell'incastro sara' pari a:

$$\mathcal{M}_{rA} = -M_1^{(1)}(x_3 = 0) = \frac{4}{9} FL \tag{24}$$

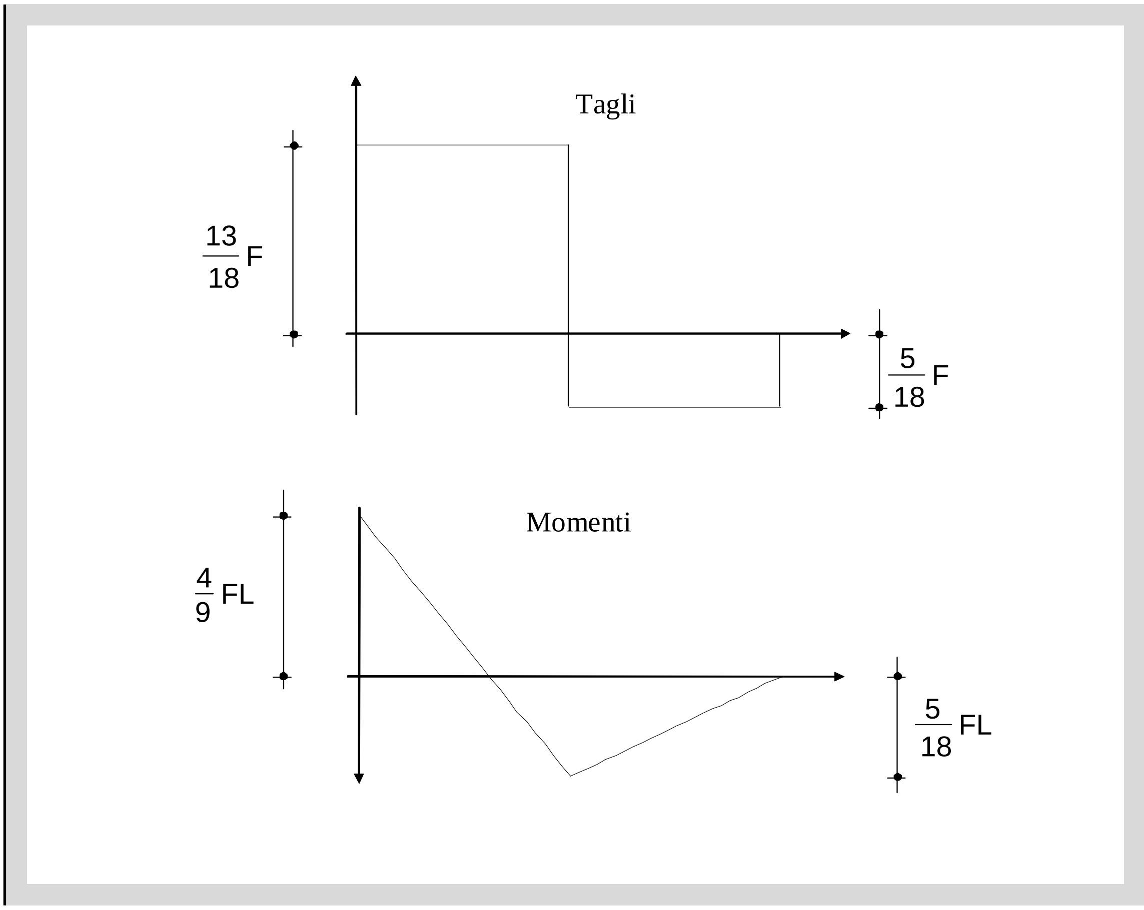
L'equilibrio alla rotazione dell'intera trave e' rispettato:

$$\mathcal{M}_{rA} - FL - R_B (2L) = \frac{4}{9} FL - FL - \frac{5}{18} F (2L) = \left(\frac{4}{9} - 1 + \frac{5}{9}\right) = 0 \tag{25}$$

■ Passo 4 - Tracciamento diagramma del taglio e del momento flettente

Il diagramma del taglio sara' costante lungo il primo tratto, e pari a 13/18 F, in corrispondenza della forza si avra' una discontinutita' pari al valore della forza stessa, per poi proseguire costante e pari a -5/18F

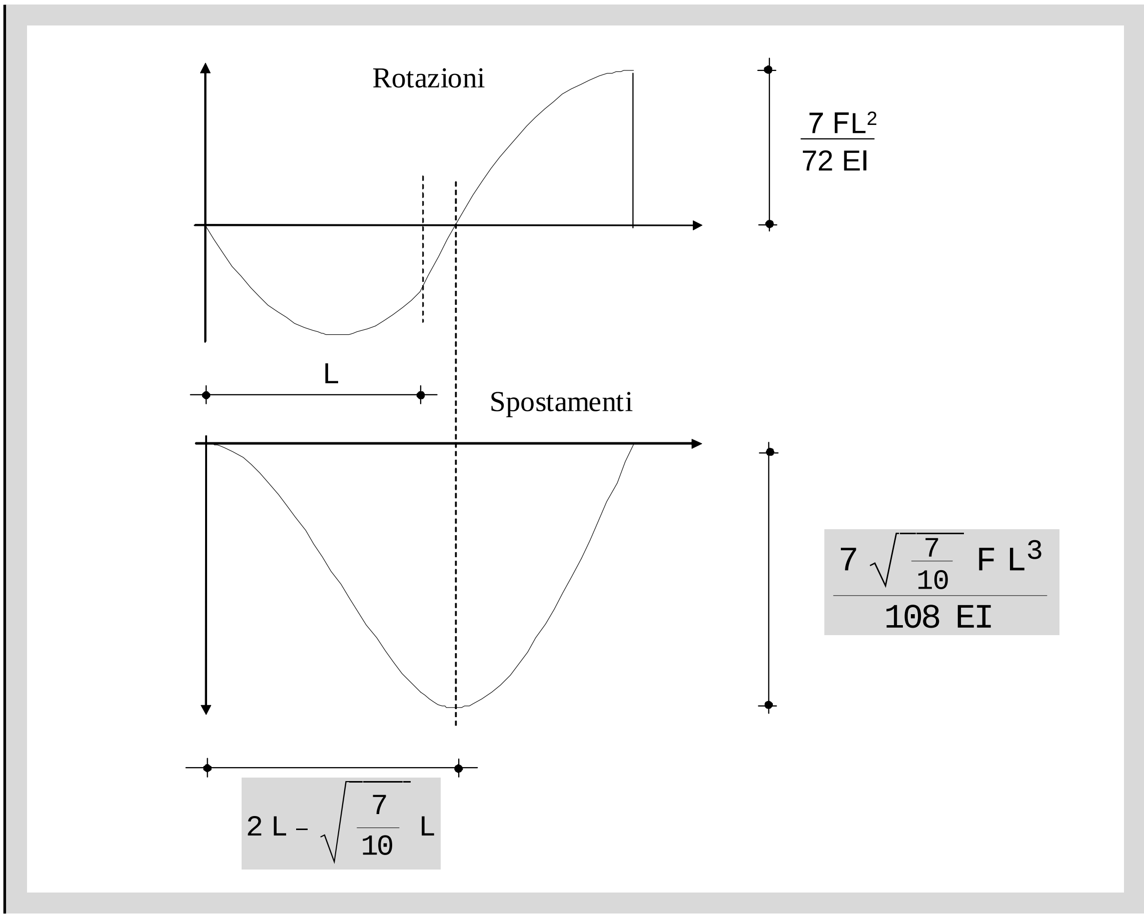
Il momento sara' pari a -4/9 FL nell'incastro, e variera' linearmente fino in mezzeria, con pendenza pari al valore del taglio, crescendo quindi fino al valore -4/9 FL + (13/18 F)L = 5/18 FL sull'appoggio. Nel secondo tratto la pendenza varia, ed il momento decresce fino ad annullarsi in corrispondenza dell'appoggio.



■ Passo 5 - Tracciamento del diagramma di rotazione e spostamento

Per tracciare il diagramma delle rotazioni e degli spostamenti si hanno le seguenti informazioni:

1. il diagramma delle rotazioni sara' quadratico, si annulla nell'incastro, e giunge con tangente orizzontale in corrispondenza dell'appoggio, laddove il momento e' nullo
2. il diagramma degli spostamenti varia con legge cubica, si annulla agli estremi e parte con tangenza orizzontale in corrispondenza dell'incastro. Inoltre si avra' un punto di flesso dove si annulla il momento



Passo 6 - Determinazione del valore massimo dello spostamento

Lo spostamento sara' massimo laddove la rotazione si annulla. Occorre quindi calcolare i punti di nullo della funzione:

$$\phi^{(2)}\,(x_3) = -\frac{F}{EI}\left(\frac{1}{24}\,L^2 - \frac{5}{18}\,L\,x_3 + \frac{5}{36}\,x_3^2\right) \tag{26}$$

ottenendo le soluzioni:

$$\begin{aligned} x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}\left(10\,L - \sqrt{70}\,L\right) \approx 0.16334\,L \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{10}\left(10\,L + \sqrt{70}\,L\right) \approx 1.83666\,L \end{aligned} \tag{27}$$

E' evidente che la seconda soluzione ricade al di fuori dell'intervallo fisico della trave (si ricordi che il sistema di riferimento del secondo tratto ha origine in corrispondenza della mezzeria), e pertanto il punto di nullo delle rotazioni e' situato a distanza:

$$L + \frac{1}{10}\left(10\,L - \sqrt{70}\,L\right) \approx 1.16334\,L \tag{28}$$

ossia leggermente a destra della forza. Il corrispondente spstamento e':

$$u_{2\,max} = \frac{7\sqrt{\frac{7}{10}}}{108}\,\frac{F\,L^3}{EI} \tag{29}$$