Verifica n.19

Mercoledi' 15 Giugno 2011 - ore 9.30-11.30

1. Utilizzando il metodo della doppia integrazione (o di Saviotti), dedurre la distribuzione di tagli, momenti, rotazioni ed abbassamenti
2. Verificare l'equilibrio della trave
3. Calcolare e disegnare i diagrammi delle caratteristiche, delle rotazioni e degli abbassamenti
4. Calcolare l'abbassamento della cerniera

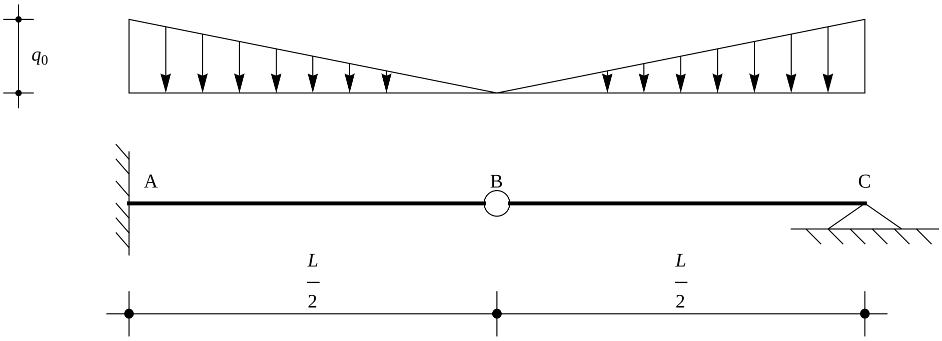

Figura 1 - Lo schema iniziale

Soluzione

Il carico varia linearmente, sulla semiluce di sinistra, dal valore q_0 in corrispondenza dell'incastro, fino al valore nullo in mezzeria. Di conseguenza, esso puo' analiticamente esprimersi come:

$$q_1(z) = q_0\left(1 - 2\frac{z}{L}\right) \tag{1}$$

avendo scelto l'origine del sistema di riferimento nel punto A. Nella semiluce di destra, invece, il carico varia da 0 in corrispondenza della cerniera fino a q_0 in corrispondenza dell'appoggio in C. La forma analitica del carico sara' quindi:

$$q_2(z) = 2\, q_0\, \frac{z}{L} \tag{2}$$

avendo scelto l'origine del secondo sistema di riferimento in B.

Prima integrazione: calcolo di momenti e tagli

Utilizzando la nota relazione differenziale:

$$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}} = -q(z) \tag{3}$$

si potra' scrivere:

$$\frac{\mathrm{dT}_1}{\mathrm{dz}} = -\, q_0\left(1 - 2\frac{z}{L}\right) \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{dT}_2}{\mathrm{dz}} = -\, 2\, q_0\, \frac{z}{L} \tag{5}$$

ed integrando:

$$T_1 = -q_0\left(z - \frac{z^2}{L}\right) + c_0 \tag{6}$$

$$T_2 = -q_0 \frac{z^2}{L} + c_1 \tag{7}$$

E' anche noto che:

$$\frac{\text{dM}}{\text{dz}} = T(z) \tag{8}$$

e quindi potra' scriversi:

$$\frac{\text{dM}_1}{\text{dz}} = -q_0\left(z - \frac{z^2}{L}\right) + c_0 \tag{9}$$

$$\frac{\text{dM}_2}{\text{dz}} = -q_0 \frac{z^2}{L} + c_1 \tag{10}$$

ed integrando:

$$M_1 = -q_0\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3L}\right) + c_0 z + c_2 \tag{11}$$

$$M_2 = -q_0 \frac{z^3}{3L} + c_1 z + c_3 \tag{12}$$

Le quattro costanti di integrazione si otterranno imponendo le quattro **condizioni di equilibrio**:

$$T_1\left(z = \frac{L}{2}\right) = T_2(z = 0) \tag{13}$$

$$M_1\left(z = \frac{L}{2}\right) = 0 \tag{14}$$

$$M_2(z = 0) = 0 \tag{15}$$

$$M_2\left(z = \frac{L}{2}\right) = 0 \tag{16}$$

ossia, utilizzando le (6-7) e le (11-12):

$$-q_0\left(\frac{L}{2} - \frac{L^2}{4L}\right) + c_0 = c_1 \tag{17}$$

$$-q_0\left(\frac{L^2}{8} - \frac{L^3}{24L}\right) + c_0 L + c_2 = 0 \tag{18}$$

$$c_3 = 0 \tag{19}$$

$$-q_0 \frac{L^3}{24L} + c_1 \frac{L}{2} + c_3 = 0 \tag{20}$$

Dalla quarta equazione si ottiene c_1 :

$$c_1 = q_0 \frac{L}{12} \tag{21}$$

e quindi dalla prima si ottiene c_0 :

$$c_0 = q_0 \frac{L}{12} + q_0 \frac{L}{4} = q_0 \frac{L}{3} \tag{22}$$

Infine, c_2 si puo' dedurre dalla seconda equazione:

$$c_2 = q_0 \frac{L^2}{12} - c_0 \frac{L}{2} = q_0 \frac{L^2}{12} - q_0 \frac{L^2}{6} = -q_0 \frac{L^2}{12} \tag{23}$$

Infine, tagli e momenti possono scriversi:

$$T_1 = -q_0\left(z - \frac{z^2}{L}\right) + q_0 \frac{L}{3} \tag{24}$$

$$T_2 = -q_0 \frac{z^2}{L} + q_0 \frac{L}{12} \tag{25}$$

$$M_1 = -q_0\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3L}\right) + q_0 \frac{L}{3} z - q_0 \frac{L^2}{12} \tag{26}$$

$$M_2 = -q_0 \frac{z^3}{3L} + q_0 \frac{L}{12} z \tag{27}$$

Calcolo delle reazioni

Si ha subito:

$$R_A = -T_1(z = 0) = -q_0 \frac{L}{3} \tag{28}$$

$$R_C = T_2\left(z = \frac{L}{2}\right) = -q_0 \frac{L}{4} + q_0 \frac{L}{12} = -q_0 \frac{L}{6} \tag{29}$$

$$\mathcal{M}_{rA} = -M_1(z = 0) = q_0 \frac{L^2}{12} \tag{30}$$

Verifica dell'equilibrio

Le due equazioni di equilibrio dell'intera trave si scrivono (polo in A):

$$R_A + R_C + \frac{1}{2} q \frac{L}{2} + \frac{1}{2} q \frac{L}{2} = 0 \tag{31}$$

$$\mathcal{M}_{rA} - \frac{1}{2} q \frac{L}{2} \frac{L}{6} - \frac{1}{2} q \frac{L}{2}\left(L - \frac{L}{6}\right) + R_C L = 0 \tag{32}$$

ed inserendo i valori (28-30) si ottengono due identita'

Seconda integrazione: calcolo di rotazioni e spostamenti

Si consideri ora che si puo' scrivere:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{M}{EI} \tag{33}$$

e quindi:

$$\frac{d\phi_1}{dz} = \frac{M_1}{EI} = \frac{q_0}{EI}\left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3L} + \frac{L}{3} z - \frac{L^2}{12}\right) \tag{34}$$

$$\frac{d\phi_2}{dz} = \frac{M_2}{EI} = \frac{q_0}{EI}\left(-\frac{z^3}{3L} + \frac{L}{12} z\right) \tag{35}$$

ed integrando:

$$\phi_1 = \frac{q_0}{EI}\left(-\frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{12L} + \frac{L z^2}{6} - \frac{L^2}{12} z\right) + d_0 \tag{36}$$

$$\phi_2 = \frac{q_0}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{z^4}{12\,L} + \frac{L\,z^2}{24}\right) + d_1 \tag{37}$$

Infine, poiche' nella teoria di Eulero-Bernoulli si ha:

$$\frac{\mathrm{du}_2}{\mathrm{dz}} = -\phi \tag{38}$$

si potra' scrivere (si indicano con v e w le due linee elastiche relative alla semiluce di sinistra e di destra, rispettivamente):

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dz}} = -\frac{q_0}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{12\,L} + \frac{L\,z^2}{6} - \frac{L^2}{12}\,z\right) - d_0 \tag{39}$$

$$\frac{\mathrm{dw}}{\mathrm{dz}} = -\frac{q_0}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{z^4}{12\,L} + \frac{L\,z^2}{24}\right) - d_1 \tag{40}$$

ed integrando:

$$v = -\frac{q_0}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{60\,L} + \frac{L\,z^3}{18} - \frac{L^2\,z^2}{24}\right) - d_0\,z + d_2 \tag{41}$$

$$w = -\frac{q_0}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{z^5}{60\,L} + \frac{L\,z^3}{72}\right) - d_1\,z + d_3 \tag{42}$$

Le quattro costanti di integrazione si ottengono imponendo le **condizioni di congruenza**:

$$\phi_1(z = 0) = 0 \tag{43}$$

$$v(z = 0) = 0 \tag{44}$$

$$v\left(z = \frac{L}{2}\right) = w(z = 0) \tag{45}$$

$$w\left(z = \frac{L}{2}\right) = 0 \tag{46}$$

ossia:

$$d_0 = 0 \tag{47}$$

$$d_2 = 0 \tag{48}$$

$$\frac{q_0\,L^4}{180\,\mathrm{EI}} - d_0\,\frac{L}{2} + d_2 = d_3 \tag{49}$$

$$-\frac{7}{5760}\,\frac{q_0\,L^4}{\mathrm{EI}} - d_1\,\frac{L}{2} + d_3 = 0 \tag{50}$$

da cui subito:

$$d_3 = \frac{q_0\,L^4}{180\,\mathrm{EI}} \tag{51}$$

$$d_1 = \frac{5}{576}\,\frac{q_0\,L^3}{\mathrm{EI}} \tag{52}$$

Infine, rotazioni e spostamenti possono scriversi come:

$$\phi_1 = \frac{q_0}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{12\,L} + \frac{L\,z^2}{6} - \frac{L^2}{12}\,z\right) \tag{53}$$

$$\phi_2 = \frac{q_0}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{z^4}{12\,L} + \frac{L\,z^2}{24}\right) + \frac{5}{576}\,\frac{q_0\,L^3}{\mathrm{EI}} \tag{54}$$

$$v = -\frac{q_0}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{60\,L} + \frac{L\,z^3}{18} - \frac{L^2\,z^2}{24}\right) \tag{55}$$

$$w = -\frac{q_0}{\mathrm{EI}}\left(-\frac{z^5}{60\,L} + \frac{L\,z^3}{72}\right) - \frac{5}{576}\,\frac{q_0\,L^3}{\mathrm{EI}}\,z + \frac{q_0\,L^4}{180\,\mathrm{EI}} \tag{56}$$

Il tracciamento dei diagrammi di tagli e momenti

Per tracciare il diagramma del taglio si hanno i seguenti elementi:

1. andamento quadratico, in quanto il carico e' distribuito con legge lineare

2. andamento decrescente, in quanto il carico e' ovunque diretto verso il basso

3. tangenza orizzontale in mezzeria, laddove il carico e' nullo. In mezzeria si ha un cambio di curvatura (punto di flesso)

4. agli estremi i valori sono facilmente deducibili. Si ha allora:

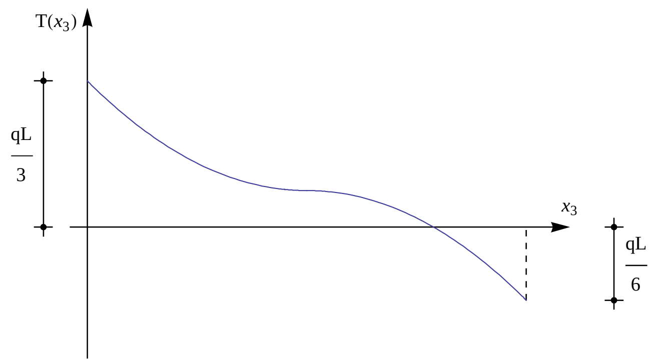

Figura 2 - Il diagramma del taglio

Il diagramma del momento avra' andamento cubico, si annullera' in corrispondenza della cerniera e dell'appoggio. Inoltre esso sara' una funzione crescente dall'incastro fino al punto di nullo del taglio. In tale punto esso avra' un punto di massimo, e da quel punto in poi iniziera' a decrescere. Il valore in corrispondenza dell'incastro e' pari alla coppia reattiva cambiata di segno, e quindi il diagramma ha l'andamento seguente:

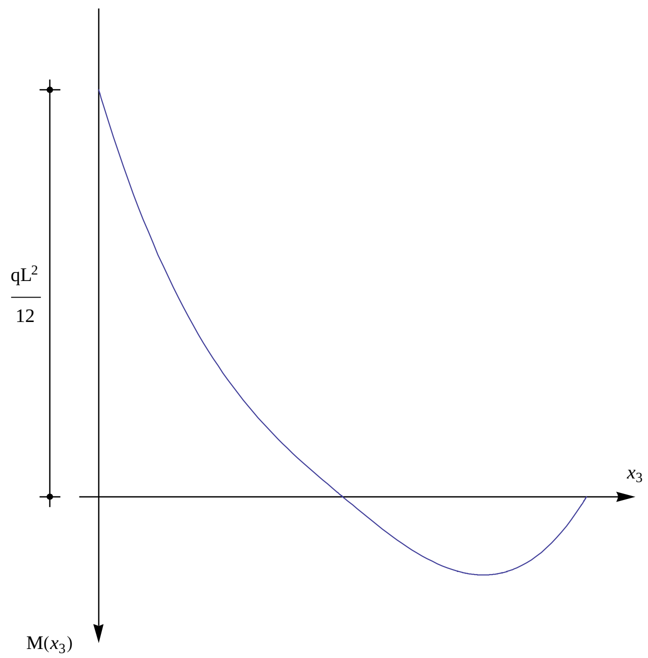

Figura 3 - Il diagramma del momento

L'abbassamento della cerniera

E' immediato dedurre dalla (56) che la cerniera subira' un abbassamento pari a:

$$w_B = \frac{q_0 L^4}{180 \, \mathrm{EI}} \tag{57}$$

Figura 1

Figura 2

Figura 3