Verifica n.18

Venerdi' 15 Aprile 2011 - ore 9.30-11.30

1. Calcolare le reazioni vincolari
2. Verificare l'equilibrio della trave
3. Calcolare e disegnare i diagrammi delle caratteristiche per la trave di figura:

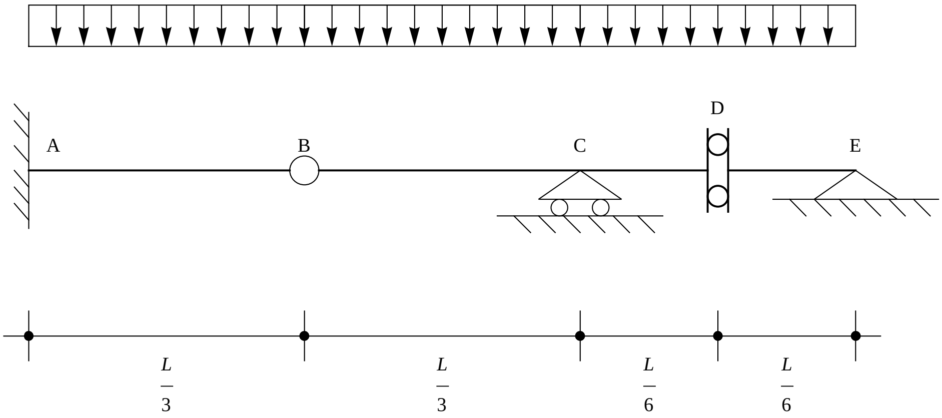

Figura 1 - Lo schema iniziale

Soluzione

La trave e' costituita da tre tratti rigidi connessi da una cerniera in B ed un bipendolo interno in D. I vincoli esterni sono un incastro in A, un appoggio in C ed uno in E. Ne segue che si possono scrivere sei equazioni di equilibrio nelle incognite:

R_A ed $\mathcal{M}_A$ reazioni dell'incastro

T_B taglio nella cerniera

R_C reazione dell'appoggio in C

M_D momento flettente in D

R_E reazione dell'appoggio in E

Sostituendo ai vincoli, esterni ed interni, le incognite reattive, si giunge alla situazione di Figura 2:

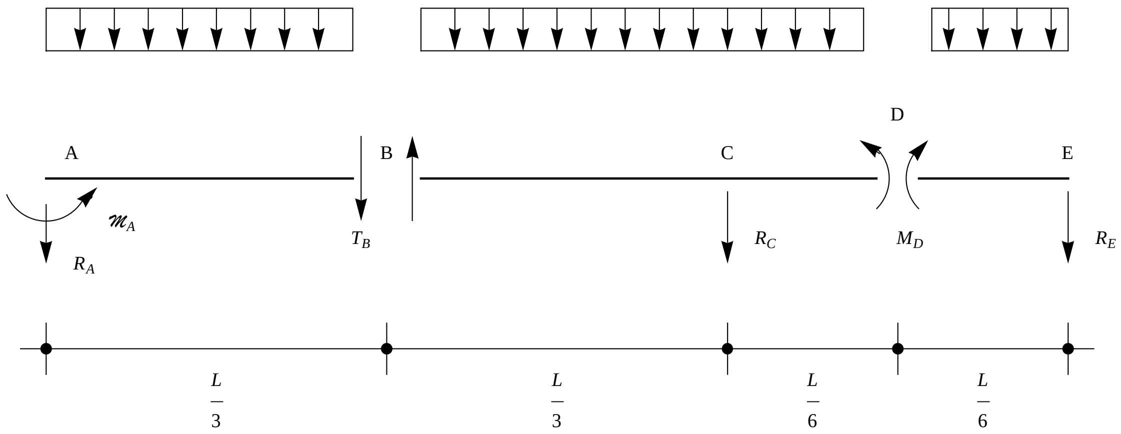

Figura 2 - Il diagramma libero

E' possibile ora scrivere le equazioni di equilibrio:

$$R_A + q\frac{L}{3} + T_B = 0$$

$$\mathcal{M}_A - \frac{q\,L}{3}\frac{L}{6} - T_B\frac{L}{3} = 0$$

$$-T_B + R_C + q\left(\frac{L}{3} + \frac{L}{6}\right) = 0$$

$$M_D - R_C\frac{L}{3} - q\left(\frac{L}{3} + \frac{L}{6}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{L}{3} + \frac{L}{6}\right) = 0$$

$$R_E + q\frac{L}{6} = 0$$

$$-M_D + \frac{q\,L}{6}\frac{L}{12} = 0$$

Le ultime due equazioni forniscono subito:

$$R_E = -q\frac{L}{6}$$

$$M_D = \frac{q\,L^2}{72}$$

quindi la terzultima fornisce:

$$R_C = -q\frac{L}{3}$$

La terza equazione, quindi, fornisce:

$$T_B = q\frac{L}{6}$$

Infine, la prima e la seconda equazione forniscono le ultime due incognite:

$$R_A = -q\frac{L}{2}$$

$$\mathcal{M}_A = \frac{q\,L^2}{9}$$

Verifica dell'equilibrio

Sullo schema di Figura 1, per l'equilibrio dovra' aversi:

$$R_A + R_C + R_E + q\,L = 0$$

$$\mathcal{M}_A - R_C \frac{2}{3} L - R_E\, L - q \frac{L^2}{2} = 0$$

ed inserendo i valori delle reazioni appena calcolati si ha:

$$-q \frac{L}{2} - q \frac{L}{3} - q \frac{L}{6} + q\,L = 0$$

$$\frac{q\,L^2}{9} + q \frac{L}{3} \frac{2}{3} L + q \frac{L}{6} L - q \frac{L^2}{2} = q\,L^2 \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = q\,L^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Diagrammi del momento e del taglio

Per il tracciamento del diagramma del taglio, si consideri che esso deve annullarsi in corrispondenza del bipendolo interno, che deve avere andamento lineare nei tre tratti soggetti al carico, mentre deve essere costante nel tratto scarico. Inoltre, poiche' $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dz}} = -q$, il diagramma del taglio sara' una funzione decrescente con pendenza q.

Dal calcolo delle reazioni, si puo' dedurre facilmente:

$$T(0) = -R_A = q \frac{L}{2}$$

$$T\left(\frac{L}{3}\right) = T_B = q \frac{L}{6}$$

$$T(L) = R_E = -q \frac{L}{6}$$

Inoltre, in corrispondenza dell'appoggio il diagramma avra' una discontinuita' pari al valore della reazione R_C. Questo basta per tracciare il diagramma:

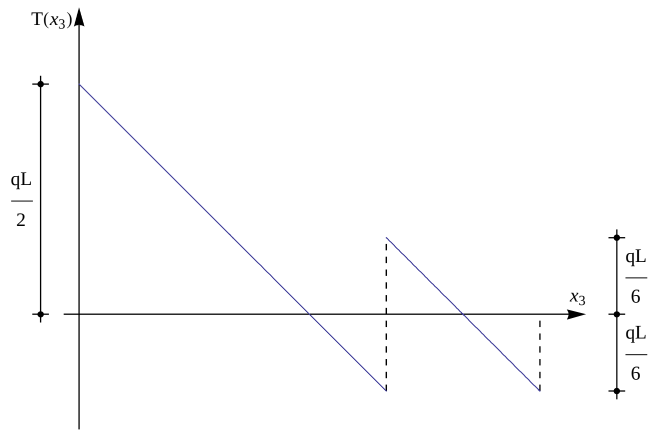

Figura 3 - Il diagramma del taglio

Per il tracciamento del diagramma del momento, si puo' preliminarmente osservare che esso deve annullarsi in corrispondenza della cerniera in B e dell'appoggio di estremita' in E, che sara' parabolico, raggiungendo due punti di estremo laddove il taglio si annulla. Inoltre si puo' scrivere;

$$M(0) = -\mathcal{M}_A = \frac{1}{9} \mathrm{qL}^2$$

$$M(L_1 + L_2 + L_3) = M_D = -\frac{qL^2}{72}$$

e questo basta per tracciare il diagramma:

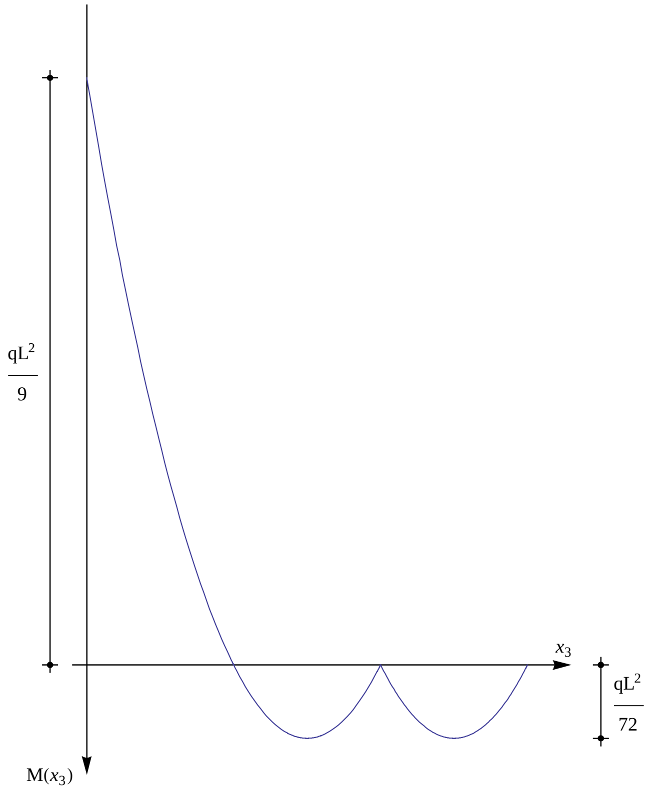

Figura 4 - Il diagramma del momento

- **Figura 1**
- **Figura 2**
- **Figura 3**
- **Figura 4**