

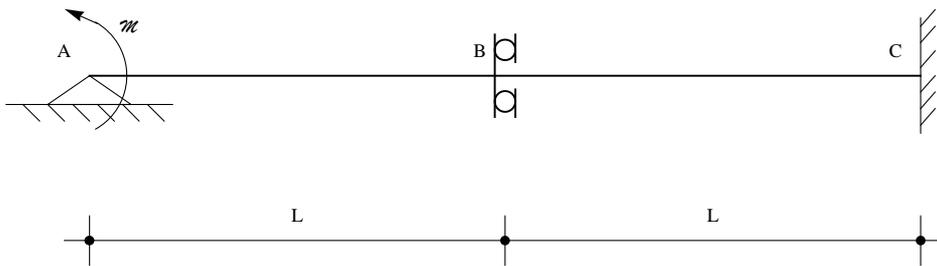
Verifica Scienza delle Costruzioni

Venerdi' 14 gennaio 2011, ore 12.30-14.30

Si consideri la trave di Figura, vincolata al suolo tramite un appoggio a sinistra, un bipendolo esterno in mezzeria ed un incastro a destra, e caricata da una coppia concentrata di intensità \mathcal{M} in corrispondenza dell'appoggio. Per essa:

calcolare le reazioni esterne

calcolare e disegnare i diagrammi di tagli, momenti, rotazioni e spostamenti



Soluzione

Nella prima luce l'equazione differenziale della linea elastica puo' essere scritta come:

$$EI \frac{d^4 u}{dx_3^4} = 0 \quad (1)$$

mentre nella seconda luce si potra' scrivere:

$$EI \frac{d^4 v}{dx_3^4} = 0 \quad (2)$$

La soluzione delle (1-2) e' ovviamente una equazione cubica:

$$u(x_3) = c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \quad (3)$$

$$v(x_3) = d_0 + d_1 x_3 + d_2 x_3^2 + d_3 x_3^3 \quad (4)$$

Le otto costanti di integrazione si ottengono imponendo le condizioni ai limiti in corrispondenza dell'appoggio, del bipendolo e dell'incastro.

Nell'appoggio la congruenza impone che sia nullo l'abbassamento, mentre l'equilibrio del concio e' equilibrato se la coppia applicata e' uguale e contraria al momento flettente:

$$u(x_3 = 0) = 0 \quad (5)$$

$$-EI u''(x_3 = 0) + \mathcal{M} = 0 \quad (6)$$

In corrispondenza del bipendolo esterno la congruenza impone che lo spostamento abbia un unico valore, e che la rotazione sia nulla. L'equilibrio del concio invece impone che il taglio abbia un unico valore:

$$u(x_3 = L) = v(x_3 = 0) \quad (7)$$

$$u'(x_3 = L) = 0 \quad (8)$$

$$v'(x_3 = 0) = 0 \quad (9)$$

$$u'''(x_3 = L) = v'''(x_3 = 0) \quad (10)$$

Infine, nell'incastro si impongono le due condizioni di congruenza che impongono l'annullarsi di spostamenti e rotazioni:

$$v(x_3 = L) = 0 \quad (11)$$

$$v'(x_3 = L) = 0 \quad (12)$$

■ La soluzione delle equazioni ai limiti

A partire dalle (3-4) si possono ricavare le derivate successive:

$$u'(x_3) = c_1 + 2 c_2 x_3 + 3 c_3 x_3^2 \quad (13)$$

$$u''(x_3) = 2 c_2 + 6 c_3 x_3 \quad (14)$$

$$u'''(x_3) = 6 c_3 \quad (15)$$

$$v'(x_3) = d_1 + 2 d_2 x_3 + 3 d_3 x_3^2 \quad (16)$$

$$v''(x_3) = 2 d_2 + 6 d_3 x_3 \quad (17)$$

$$v'''(x_3) = 6 d_3 \quad (18)$$

e quindi le otto condizioni ai limiti si potranno scrivere:

$$c_0 = 0 \quad (19)$$

$$-2 EI c_2 + \mathcal{M} = 0 \rightarrow c_2 = \frac{\mathcal{M}}{2 EI} \quad (20)$$

$$c_0 + c_1 L + c_2 L^2 + c_3 L^3 = d_0 \quad (21)$$

$$c_1 + 2 c_2 L + 3 c_3 L^2 = 0 \quad (22)$$

$$c_1 = 0 \quad (23)$$

$$c_3 = d_3 \quad (24)$$

$$d_0 + d_1 L + d_2 L^2 + d_3 L^3 = 0 \quad (25)$$

$$d_1 + 2 d_2 L + 3 d_3 L^2 = 0 \quad (26)$$

Utilizzando le equazioni (1-2) e (5-6) nelle restanti ci si riduce ad un sistema di quattro equazioni:

$$c_1 L + \frac{\mathcal{M}}{2 EI} L^2 + c_3 L^3 = d_0 \quad (27)$$

$$c_1 + 3 c_3 L^2 = -\frac{\mathcal{M}}{EI} L \quad (28)$$

$$d_0 + d_2 L^2 + c_3 L^3 = 0 \quad (29)$$

$$2 d_2 + 3 c_3 L = 0 \quad (30)$$

La (27) può essere utilizzata nella (29):

$$c_1 + 3 c_3 L^2 = -\frac{\mathcal{M}}{EI} L \quad (31)$$

$$c_1 L + 2 c_3 L^3 + d_2 L^2 = -\frac{\mathcal{M}}{2 EI} L^2 \quad (32)$$

$$2 d_2 + 3 c_3 L = 0 \quad (33)$$

Dalla (33) si ottiene:

$$d_2 = -\frac{3}{2} c_3 L \quad (34)$$

che può essere sostituita nella (32), giungendo così ad un sistema di due equazioni in due incognite:

$$c_1 + 3 c_3 L^2 = -\frac{\mathcal{M}}{EI} L \quad (35)$$

$$c_1 L + \frac{1}{2} c_3 L^3 = -\frac{\mathcal{M}}{2 EI} L^2 \quad (36)$$

con soluzione:

$$c_3 = -\frac{\mathcal{M}}{5 EI L} \quad (37)$$

$$c_1 = -\frac{2}{5} \frac{\mathcal{M}}{EI} L \quad (38)$$

Dalla (34) si ottiene d_2 :

$$d_2 = \frac{3}{10} \frac{\mathcal{M}}{EI} \quad (39)$$

e dalla (27) si ottiene infine d_0 :

$$d_0 = -\frac{2}{5} \frac{\mathcal{M}}{EI} L^2 + \frac{\mathcal{M}}{2 EI} L^2 - \frac{\mathcal{M}}{5 EI L} L^3 = -\frac{\mathcal{M}}{10 EI} L^2 \quad (40)$$

In definitiva si avra' allora per il primo tratto:

$$u(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EI} \left(-\frac{2}{5} L x_3 + \frac{1}{2} x_3^2 - \frac{x_3^3}{5 L} \right) \quad (41)$$

$$\phi^{(1)}(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EI} \left(\frac{2}{5} L - x_3 + \frac{3 x_3^2}{5 L} \right) \quad (42)$$

$$M^{(1)}(x_3) = \mathcal{M} \left(-1 + \frac{6 x_3}{5 L} \right) \quad (43)$$

$$T^{(1)}(x_3) = \frac{6}{5} \frac{\mathcal{M}}{L} \quad (44)$$

e per il secondo:

$$v(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EI} \left(-\frac{L^2}{10} + \frac{3}{10} x_3^2 - \frac{x_3^3}{5 L} \right) \quad (45)$$

$$\phi^{(2)}(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{EI} \left(-\frac{3}{5} x_3 + \frac{3 x_3^2}{5 L} \right) \quad (46)$$

$$M^{(2)}(x_3) = \mathcal{M} \left(-\frac{3}{5} + \frac{6 x_3}{5 L} \right) \quad (47)$$

$$T^{(2)}(x_3) = \frac{6}{5} \frac{\mathcal{M}}{L} \quad (48)$$

■ Calcolo reazioni

Le due reazioni verticali dell'appoggio e dell'incastro sono fornite da:

$$R_A = -T^{(1)}(x_3 = 0) = -\frac{6}{5} \frac{\mathcal{M}}{L} \quad (49)$$

$$R_C = T^{(2)}(x_3 = L) = \frac{6}{5} \frac{\mathcal{M}}{L} \quad (50)$$

Esse sono ovviamente uguali e contrarie, in quanto la trave non e' soggetta a forze verticali applicate.

La coppia reattiva dell'incastro e' pari a:

$$\mathcal{M}_{rC} = M^{(2)}(x_3 = L) = \frac{3}{5} \mathcal{M}$$

Infine, il bipendolo esterno reagisce con una coppia fornita dall'equilibrio del bipendolo:

$$-M^{(1)}(x_3 = L) + \mathcal{M}_{rB} + M^{(2)}(x_3 = 0) = 0$$

da cui subito:

$$\mathcal{M}_{rB} = \frac{4}{5} \mathcal{M}$$

L'equilibrio alla rotazione intorno al punto A e' quindi soddisfatto:

$$\mathcal{M} + \mathcal{M}_{rB} + \mathcal{M}_{rC} - R_C 2L = \mathcal{M} + \frac{4}{5} \mathcal{M} + \frac{3}{5} \mathcal{M} - \frac{6}{5} \frac{\mathcal{M}}{L} 2L = 0$$

■ I diagrammi di taglio e momento

Il diagramma del taglio e' immediato: ed infatti esso sara' costante lungo tutta la trave, in quanto non esistono carichi distribuiti ne' carichi concentrati e/o reazioni verticali intermedie, e quindi esso si presentera' come segue:

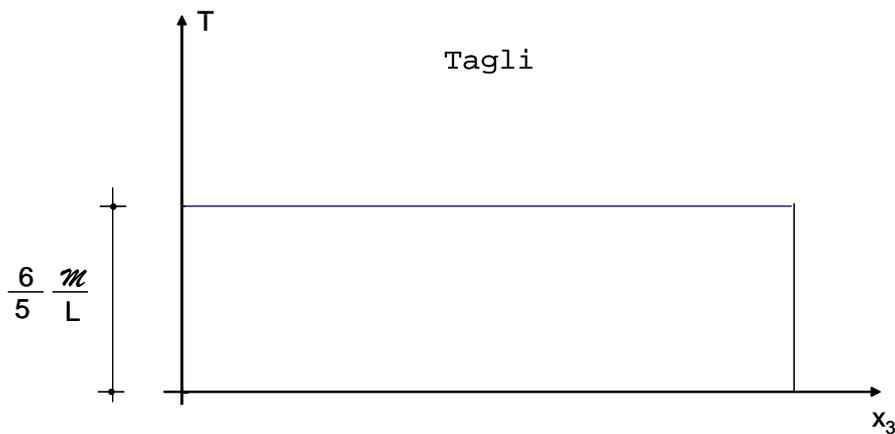


Figura 2 - Il diagramma del taglio

Il diagramma del momento avra' andamento lineare, con una discontinuita' in mezzeria, dovuta alla presenza della coppia reattiva del bipendolo. Si conoscono i valori del momento sull'appoggio a sinistra (dove esso e' uguale e contrario alla coppia applicata), ed in corrispondenza dell'incastro dove esso e' uguale alla coppia reattiva \mathcal{M}_{rC} ; inoltre, la pendenza del diagramma sara' ovunque pari al valore del taglio, quindi il momento sara' una funzione crescente, con derivata pari a $\frac{6}{5} \frac{\mathcal{M}}{L}$. Lungo la prima campata, quindi, parte con un valore pari a $-\mathcal{M}$, e si giunge in corrispondenza del bipendolo con un valore pari ad $\mathcal{M}/5$. La coppia reattiva introduce una discontinuita' pari al suo valore, quindi nella seconda campata si riparte con un valore pari a $-3/5\mathcal{M}$, e proseguendo con la stessa inclinazione si giunge all'incastro col valore $3/5 \mathcal{M}$, uguale al valore della coppia reattiva.

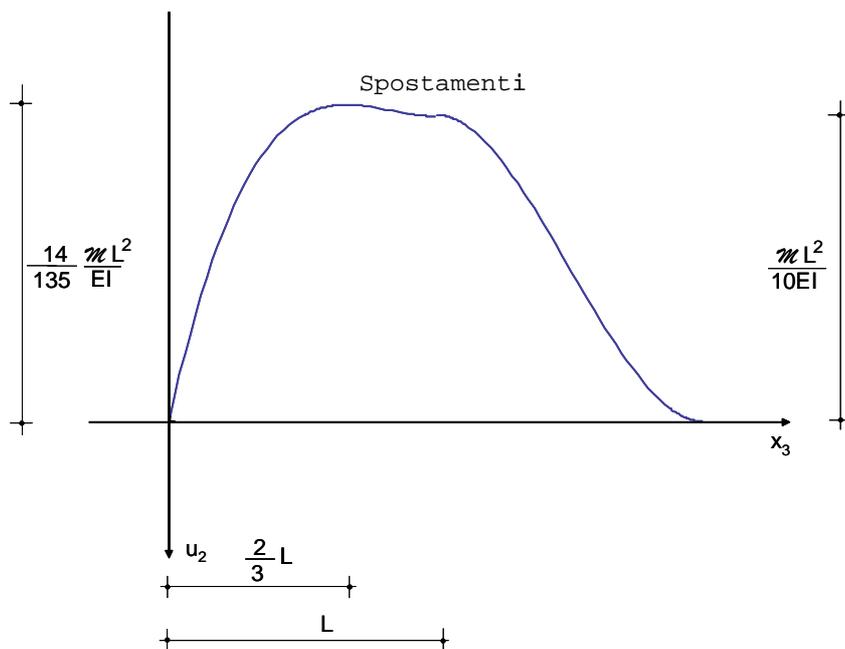


Figura 4 - Il diagramma dell'abbassamento