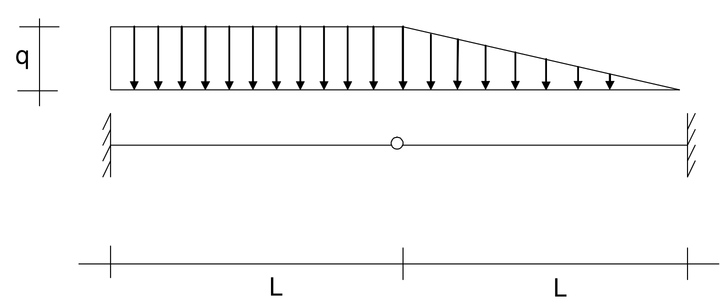
Esame 12 gennaio 2008

Una trave di lice 2L e' incastrata ad ambedue gli estremi, ed ha una cerniera in mezzeria. Essa e' soggetta ad un carico uniformemente distribuito lungo la prima campata, mentre sulla campata di destra il carico decresce linearmente fino ad annullarsi nell'incastro di destra.
Si richiede il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche, ed il calcolo dei momenti minimi e massimi, assieme alla determinazioni delle ascisse dove tali momenti vengono attinti.



Passo 1 - Determinazione delle equazioni differenziali delle linee elastiche

Poiche' in corrispondenza della cerniera la rotazione e' discontinua, occorre introdurre due equazioni differenziali della linea elastica, siano esse:

$$\begin{aligned} EI\, u_2''''(x_3) &= p(x_3) \\ EI\, v_2''''(x_3') &= p(x_3') \end{aligned} \tag{1}$$

Si sono introdotti, come usuale, due sistemi di riferimento, con origine nell'incastro di sinistra, e nella cerniera, rispettivamente.
Prima di integrare le (1) occorre determinare la forma analitica del carico p. Lungo la prima campata esso e' costante, e quindi $p(x_3) = q$. Lungo la seconda campata l'andamento e' lineare, e quindi si potra' porre:

$$p(x_3') = a + b x_3' \tag{2}$$

Poiche' $p(x_3' = 0) = q$ e $p(x_3' = L) = 0$, si deduce

$$p(x_3') = \left(1 - \frac{x_3'}{L}\right) q \tag{3}$$

Passo 2 - Integrazione delle equazioni differenziali delle linee elastiche

Occorre risolvere le due equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} &EI\, u_2''''(x_3) = q \\ &EI\, v_2''''(x_3') = \left(1 - \frac{x_3'}{L}\right) q \end{aligned} \tag{4}$$

ed anche in questo caso e' possibile procedere tramite successive integrazioni. Si ottiene, per la prima campata:

$$\begin{aligned} &u_2'''(x_3) = \frac{q}{EI} x_3 + c_0 \\ &u_2''(x_3) = \frac{q}{EI} \frac{x_3^2}{2} + c_0 x_3 + c_1 \\ &u_2'(x_3) = \frac{q}{EI} \frac{x_3^3}{6} + c_0 \frac{x_3^2}{2} + c_1 x_3 + c_2 \\ &u_2(x_3) = \frac{q}{EI} \frac{x_3^4}{24} + c_0 \frac{x_3^3}{6} + c_1 \frac{x_3^2}{2} + c_2 x_3 + c_3 \end{aligned} \tag{5}$$

mentre per la seconda campata si ha:

$$\begin{aligned} &v_2'''(x_3') = \frac{q}{EI} x_3' - \frac{q}{EIL} \frac{x_3'^2}{2} + d_0 \\ &v_2''(x_3') = \frac{q}{EI} \frac{x_3'^2}{2} - \frac{q}{EIL} \frac{x_3'^3}{6} + d_0 x_3' + d_1 \\ &v_2'(x_3') = \frac{q}{EI} \frac{x_3'^3}{6} - \frac{q}{EIL} \frac{x_3'^4}{24} + d_0 \frac{x_3'^2}{2} + d_1 x_3' + d_2 \\ &v_2(x_3') = \frac{q}{EI} \frac{x_3'^4}{24} - \frac{q}{EIL} \frac{x_3'^5}{120} + d_0 \frac{x_3'^3}{6} + d_1 \frac{x_3'^2}{2} + d_2 x_3' + d_3 \end{aligned} \tag{6}$$

Passo 3 - Imposizione delle condizioni ai limiti

Nei due incastri sono valide le due condizioni di congruenza, che proibiscono spostamenti e rotazioni. Essendo valida la teoria di Eulero-Bernoulli, occorre annullare gli spostamenti e le loro derivate prime. In corrispondenza della cerniera occorre imporre la condizione di congruenza che pone uguali gli spostamenti sulle due facce del vincolo, e tre condizioni di equilibrio, annullando il momento flettente sulla faccia di destra e separatamente sulla faccia di sinistra, e ponendo il taglio a sinistra pari al taglio a destra. Utilizzando le leggi che legano momenti e tagli alle derivate seconde e terze degli spostamenti si giunge al sistema:

$$\begin{aligned} &u_2(x_3 = 0) = 0 \longrightarrow c_3 = 0 \\ &u_2'(x_3 = 0) = 0 \longrightarrow c_2 = 0 \\ &u_2(x_3 = L) = v_2(x_3' = 0) \longrightarrow \frac{q}{EI} \frac{L^4}{24} + c_0 \frac{L^3}{6} + c_1 \frac{L^2}{2} + c_2 L + c_3 = d_3 \\ &u_2''(x_3 = L) = 0 \longrightarrow \frac{q}{EI} \frac{L^2}{2} + c_0 L + c_1 = 0 \\ &v_2''(x_3' = 0) = 0 \longrightarrow d_1 = 0 \\ &u_2'''(x_3 = L) = v_2'''(x_3' = 0) \longrightarrow \frac{q}{EI} L + c_0 = d_0 \\ &v_2(x_3' = L) = 0 \longrightarrow \frac{q}{EI} \frac{L^4}{24} - \frac{q}{EI} \frac{L^4}{120} + d_0 \frac{L^3}{6} + d_1 \frac{L^2}{2} + d_2 L + d_3 = 0 \\ &v_2'(x_3' = 0) = 0 \longrightarrow \frac{q}{EI} \frac{L^3}{6} - \frac{q}{EI} \frac{L^3}{24} + d_0 \frac{L^2}{2} + d_1 L + d_2 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Passo 4 - Calcolo delle costanti di integrazione

Il sistema precedente e' in realta' un sistema di cinque equazioni in cinque incognite:

$$\begin{aligned} &\frac{q}{EI} \frac{L^4}{24} + c_0 \frac{L^3}{6} + c_1 \frac{L^2}{2} = d_3 \\ &\frac{q}{EI} \frac{L^2}{2} + c_0 L + c_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{q}{EI} L + c_0 = d_0$$
$$\frac{q}{EI}\frac{L^4}{24} - \frac{q}{EI}\frac{L^4}{120} + d_0 \frac{L^3}{6} + d_2 L + d_3 = 0$$
$$\frac{q}{EI}\frac{L^3}{6} - \frac{q}{EI}\frac{L^3}{24} + d_0 \frac{L^2}{2} + d_2 = 0$$

La piu' semplice strategia di soluzione utilizza le prime tre equazioni per eliminare d_3, c_1 e d_0, sicche' le ultime due equazioni divengono due equazioni nelle due incognite c_0 e d_2 :

$$\begin{aligned}&\frac{q}{EI}\frac{L^4}{24} - \frac{q}{EI}\frac{L^4}{120} + \left(\frac{q}{EI} L + c_0\right)\frac{L^3}{6} + d_2 L + \frac{q}{EI}\frac{L^4}{24} + c_0\frac{L^3}{6} - \left(\frac{q}{EI}\frac{L^2}{2} + c_0 L\right)\frac{L^2}{2} = 0\\ &\frac{q}{EI}\frac{L^3}{6} - \frac{q}{EI}\frac{L^3}{24} + \left(\frac{q}{EI} L + c_0\right)\frac{L^2}{2} + d_2 = 0\end{aligned} \tag{9}$$

e semplificando:

$$\begin{aligned}&\frac{qL^4}{EI}\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{4}\right) + c_0 L^3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) + d_2 L = 0\\ &\frac{qL^3}{EI}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{2}\right) + c_0\frac{L^2}{2} + d_2 = 0\end{aligned} \tag{10}$$

ossia

$$\begin{aligned}&\frac{qL^3}{120\,EI}(5 - 1 + 20 + 5 - 30) + c_0\frac{L^2}{6}(1 + 1 - 3) + d_2 = 0\\ &\frac{qL^3}{24\,EI}(4 - 1 + 12) + c_0\frac{L^2}{2} + d_2 = 0\end{aligned} \tag{11}$$

ed ancora:

$$\begin{aligned}&-\frac{qL^3}{120\,EI} - c_0\frac{L^2}{6} + d_2 = 0\\ &\frac{15\,qL^3}{24\,EI} + c_0\frac{L^2}{2} + d_2 = 0\end{aligned} \tag{12}$$

Dalla prima si ottiene d_2 :

$$d_2 = \frac{qL^3}{120\,EI} + c_0\frac{L^2}{6} \tag{13}$$

e dalla seconda c_0 :

$$\begin{aligned}&\frac{15\,qL^3}{24\,EI} + c_0\frac{L^2}{2} + \frac{qL^3}{120\,EI} + c_0\frac{L^2}{6} = 0 \longrightarrow c_0 L^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = -\frac{qL^3}{EI}\left(\frac{15}{24} + \frac{1}{120}\right)\\ &c_0 = -\frac{19}{20}\frac{qL}{EI}\end{aligned} \tag{14}$$

Le altre costanti si ottengono in cascata, ottenendo le due linee elastiche:

$$u_2(x_3) = \frac{qx_3^2}{120\,EI}\left(27 L^2 - 19 L x_3 + 5 x_3^2\right) \tag{15}$$

$$v_2(x_3') = \frac{q}{EI}\left(\frac{13 L^4}{120} - \frac{3 L^3}{20} x_3 + \frac{L}{120} x_3^3 + \frac{1}{24} x_3^4 - \frac{1}{120 L} x_3^5\right) \tag{16}$$

■ Passo 5 - Deduzione di rotazioni, momenti e tagli

Tramite derivazioni successive si ottengono le rotazioni, i momenti ed i tagli. Per la prima campata:

$$\phi(x_3) = -\frac{q}{EI}\left(\frac{27}{60} L^2 x_3 - \frac{19}{40} L x_3^2 + \frac{1}{6} x_3^3\right) \tag{17}$$

$$M(x_3) = -q\left(\frac{27}{60} L^2 - \frac{19}{20} L x_3 + \frac{1}{2} x_3^2\right) \tag{18}$$

$$T(x_3) = q\left(\frac{19}{20}L - x_3\right) \tag{19}$$

e per la seconda:

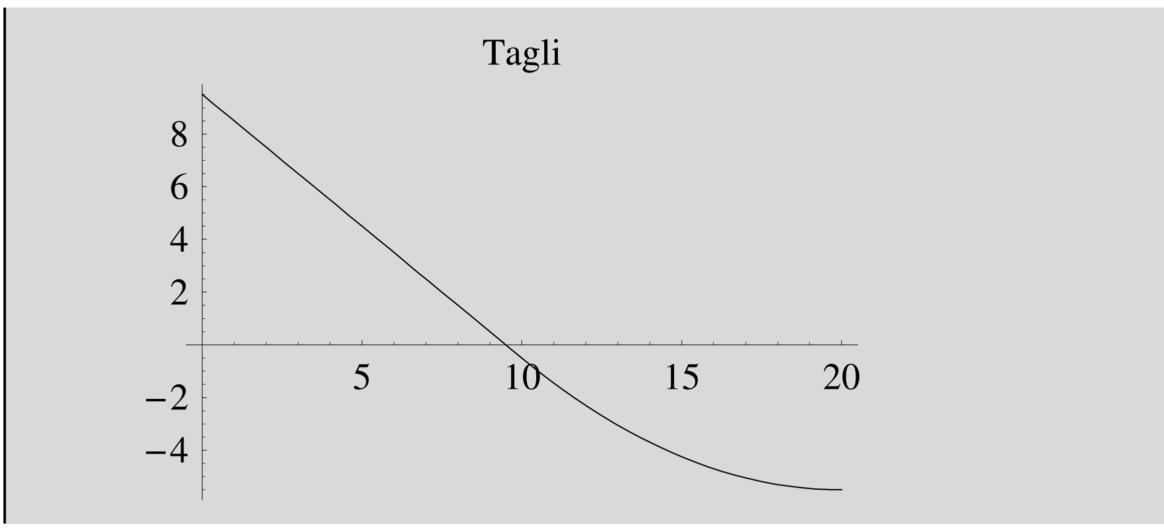
$$\phi(x_3') = -\frac{q}{EI}\left(-\frac{3L^3}{20} + \frac{L}{40}x_3^2 + \frac{1}{6}x_3^3 - \frac{1}{24L}x_3^4\right) \tag{20}$$

$$M(x_3') = -q\left(\frac{L}{20}x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{6L}x_3^3\right) \tag{21}$$

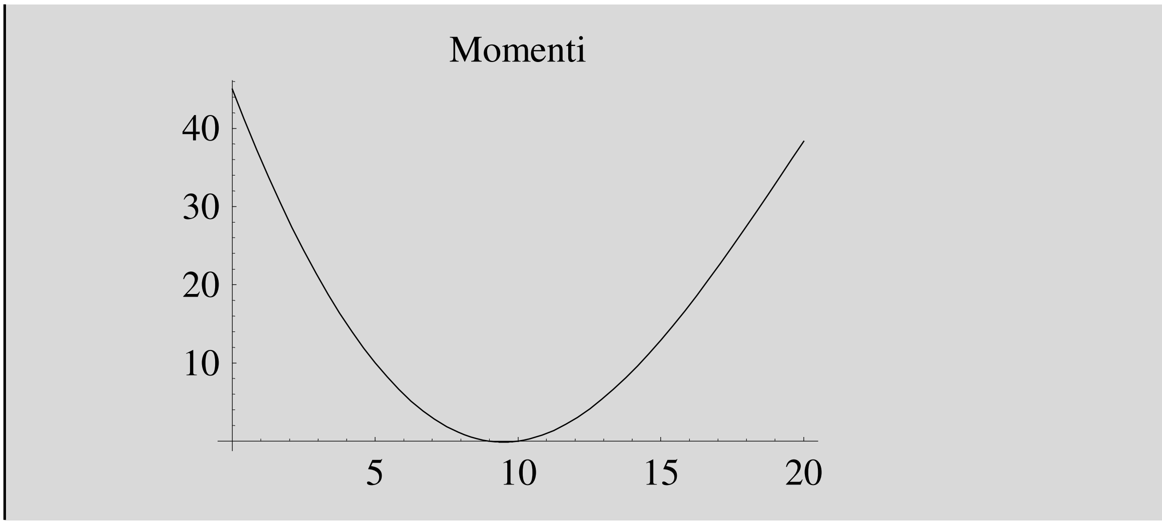
$$T(x_3') = -q\left(\frac{L}{20} + x_3 - \frac{1}{2L}x_3^2\right) \tag{22}$$

■ Tracciamento dei diagrammi di taglio e momento

L'andamento del diagramma del taglio lungo la prima campata e' lineare, mentre nella seconda campata e' quadratico. Esso vale $\frac{19}{20}qL$ all'estremo di sinistra e $-\frac{qL}{20}$ in corrispondenza della cerniera. Quindi lungo la prima campata il diagramma e' immediatamente tracciabile. Sulla campata di destra si ha un valore pari a $-\frac{qL}{20}$ all'estremo di sinistra (in corrispondenza della cerniera) e pari a $\frac{19}{20}qL$ a destra. Inoltre, in corrispondenza dell'incastro di destra esso arrivera' con tangenza orizzontale, poiche' il carico si annulla in quel punto.



Il diagramma del momento ha andamento parabolico a sinistra e cubico a destra, annullandosi in corrispondenza della cerniera:



■ Calcolo dei valori minimi e massimi del momento

Il momento minimo e' attinto all'incastro di sinistra e vale $-\frac{27}{60}\,qL^2$, mentre per trovare il momento massimo occorre ricercare l'ascissa di nullo del taglio. Ed il taglio nella prima campata si annulla all'ascissa $x_3 = \frac{19}{20}\,L$, dove il momento vale:

$$M_{max} = M\left(x_3 = \frac{19}{20}\,L\right) = -q\left(\frac{27}{60}\,L^2 - \frac{19}{20}\,L\,\frac{19}{20}\,L + \frac{1}{2}\,\frac{19^2}{20^2}\,L^2\right) = \frac{qL^2}{800} \tag{23}$$