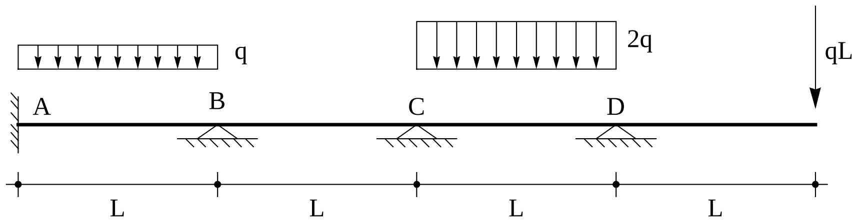
Verifica n.31

Lunedi' 6 Agosto 2012 - ore 9.30-11.30

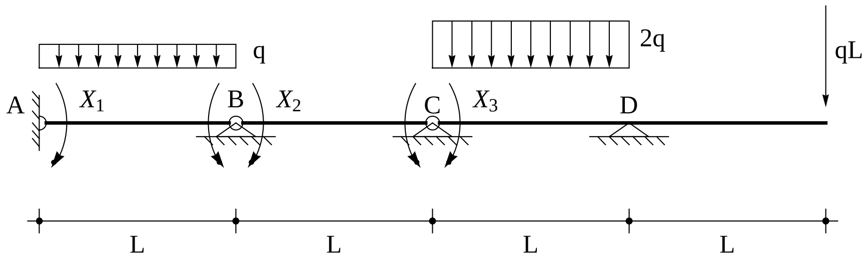
Si consideri la trave continua a tre luci con sbalzo di Figura, vincolata all'esterno con un incastro a sinistra e tre appoggi intermedi. La trave e' caricata da una stesa di carico di intensita' 2q sulla seconda campata, e da una stesa di carico di intensita' q sullo sbalzo.

Si calcolino le reazioni e si disegnino i diagrammi di tagli e momenti



Soluzione

La struttura e' tre volte iperstatica, e puo' convenientemente ridursi a tre travi semplicemente appoggiate inserendo tre cerniere in A,B e C, insieme ai tre valori incogniti dei rispettivi momenti flettenti X_1, X_2 ed X_3. La risultante struttura isostatica equivalente e' allora:



e su di essa occorre imporre il ripristino delle condizioni di congruenza:

$$\phi_A = 0 \tag{1}$$

$$\phi_{\text{Bsin}} = \phi_{\text{Bdes}} \tag{2}$$

$$\phi_{\text{Csin}} = \phi_{\text{Cdes}} \tag{3}$$

La scelta delle incognite iperstatiche - come gia' detto - riduce la trave continua ad un insieme di tre travi semplicemente appoggiate, su cui risulta immediato il calcolo delle rotaioni (schemi fondamentali di trave appoggiata soggetta a coppia all'estremo o a carico uniformemente distribuito). Si ha quindi, dall'esame della trave AB:

$$\phi_A = \frac{-X_1\, L}{3\,\text{EI}} - \frac{X_2\, L}{6\,\text{EI}} - \frac{q\, L^3}{24\,\text{EI}} \tag{4}$$

$$\phi_{\text{Bsin}} = \frac{X_1\, L}{6\,\text{EI}} + \frac{X_2\, L}{3\,\text{EI}} + \frac{q\, L^3}{24\,\text{EI}} \tag{5}$$

mentre sulla trave BC puo' leggersi:

$$\phi_{\text{Bdes}} = -\frac{X_2\, L}{3\,\text{EI}} - \frac{X_3\, L}{6\,\text{EI}} \tag{6}$$

$$\phi_{\mathrm{Csin}} = \frac{X_2\, L}{6\, \mathrm{EI}} + \frac{X_3\, L}{3\, \mathrm{EI}} \tag{7}$$

ed infine, sulla trave CD si potra' ricavare:

$$\phi_{\mathrm{Cdes}} = -\frac{X_3\, L}{3\, \mathrm{EI}} - \frac{2\, q\, L^3}{24\, \mathrm{EI}} + q\, L^2\, \frac{L}{6\, \mathrm{EI}} \tag{8}$$

Si noti che la stesa di carico agente sullo sbalzo e' stata ricondotta alla coppia applicata in D, e di intensita' - qL^2.

Le tre equazioni di congruenza, in definitiva, si scrivono:

$$\frac{-X_1\, L}{3\, \mathrm{EI}} - \frac{X_2\, L}{6\, \mathrm{EI}} - \frac{q\, L^3}{24\, \mathrm{EI}} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{X_1\, L}{6\, \mathrm{EI}} + \frac{X_2\, L}{3\, \mathrm{EI}} + \frac{q\, L^3}{24\, \mathrm{EI}} = -\frac{X_2\, L}{3\, \mathrm{EI}} - \frac{X_3\, L}{6\, \mathrm{EI}} \tag{10}$$

$$\frac{X_2\, L}{6\, \mathrm{EI}} + \frac{X_3\, L}{3\, \mathrm{EI}} = -\frac{X_3\, L}{3\, \mathrm{EI}} - \frac{2\, q\, L^3}{24\, \mathrm{EI}} + q\, L^2\, \frac{L}{6\, \mathrm{EI}} \tag{11}$$

e semplificando:

$$-X_1\, L - \frac{X_2\, L}{2} - \frac{q\, L^3}{8} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{X_1\, L}{2} + 2\, X_2\, L + \frac{X_3\, L}{2} + \frac{q\, L^3}{8} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{X_2\, L}{2} + 2\, X_3\, L = \frac{q\, L^3}{4} \tag{14}$$

con soluzione:

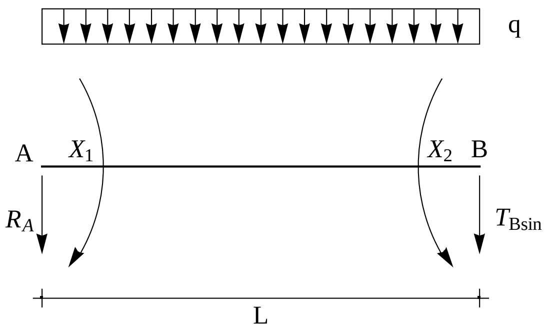
$$X_1 = -\frac{9}{104}\, q\, L^2 \tag{15}$$

$$X_2 = -\frac{1}{13}\, q\, L^2 \tag{16}$$

$$X_3 = \frac{15}{104}\, q\, L^2 \tag{17}$$

Il calcolo delle reazioni

Dalla scrittura delle equazioni di equilibrio per la trave AB, come puo' evincersi dalla Figura, si ha:



$$R_A + T_{\mathrm{Bsin}} + q\, L = 0 \tag{18}$$

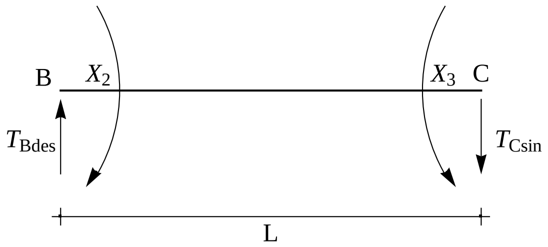
$$-X_1 + X_2 + R_A\, L + q\, \frac{L^2}{2} = 0 \tag{19}$$

da cui subito:

$$R_A = -\frac{53}{104} q L \tag{20}$$

$$T_{\text{Bsin}} = -\frac{51}{104} q L \tag{21}$$

Del tutto analogamente, esaminando la trave BC si ottiene:



$$-T_{\text{Bdes}} + T_{\text{Csin}} = 0 \tag{22}$$

$$-X_2 + X_3 - T_{\text{Bdes}} L = 0 \tag{23}$$

da cui subito:

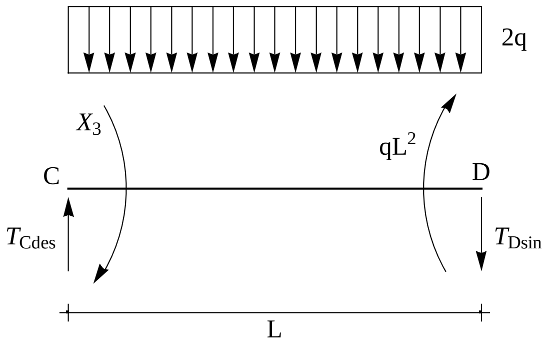
$$T_{\text{Bdes}} = \frac{23}{104} q L \tag{24}$$

$$T_{\text{Csin}} = \frac{23}{104} q L \tag{25}$$

La reazione dell'appoggio in B sara' quindi pari a:

$$R_B = T_{\text{Bsin}} - T_{\text{Bdes}} = -\frac{74}{104} q L \tag{26}$$

Infine, sulla trave CD si potra' scrivere:



$$-T_{\text{Cdes}} + T_{\text{Dsin}} + 2 q L = 0 \tag{27}$$

$$-X_3 - T_{\text{Cdes}} L + 2 q \frac{L^2}{2} - q L^2 = 0 \tag{28}$$

e quindi:

$$T_{\text{Cdes}} = -\frac{15}{104} q L \tag{29}$$

$$T_{\text{Dsin}} = -\frac{223}{104} q L \tag{30}$$

La reazione dell'appoggio in C sara' quindi pari a:

$$R_C = T_{\text{Csin}} - T_{\text{Cdes}} = \frac{38}{104} q L \tag{31}$$

Infine, poiche' $T_{\text{Ddes}} = q L$, si ha anche la reazione in D:

$$R_D = T_{\text{Dsin}} - T_{\text{Ddes}} = -\frac{327}{104} q L \tag{32}$$

I diagrammi sono banali, e vengono lasciati al lettore.

Un'utile verifica consiste nel controllare l'equilibrio alla traslazione verticale dell'intera trave:

$$R_A + R_B + R_C + R_D + 4 q L = 0 \tag{33}$$

Appendice