Verifica n. 20 - Scienza delle Costruzioni

Mercoledi' 6 Luglio 2011 - ore 10.30-12.30

Si consideri la terna di spostamenti:

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = 2\, x_1^2 - x_2 \tag{1}$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1\, x_2}{2} - x_2^2 \tag{2}$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2} - x_2 + \frac{x_3}{2} \tag{3}$$

e si deducano da essa le componenti di deformazione lineari nel punto M = (1,0,-2). Sempre in tale punto, si calcolino le deformazioni principali e le corrispondenti direzioni principali di deformazione. Infine, si verifichi che le suddette direzioni siano mutuamente ortogonali

Soluzione

Le deformazioni lineari si ottengono derivando opportunamente le tre componenti di spostamento, secondo la definizione:

$$e_{\mathrm{ij}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{4}$$

e sara' quindi:

$$e_{11} = 4\, x_1 \tag{5}$$

$$e_{12} = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{x_2}{2}\right) \tag{6}$$

$$e_{13} = \frac{x_1}{2} \tag{7}$$

$$e_{22} = \frac{x_1}{2} - 2\, x_2 \tag{8}$$

$$e_{23} = -\frac{1}{2} \tag{9}$$

$$e_{33} = \frac{1}{2} \tag{10}$$

Il punto M ha coordinate $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ ed $x_3 = -2$. Ne segue che valutando le deformazioni in tale punto si giunge alla matrice delle componenti di deformazione in M:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La deduzione delle deformazioni principali

Si osserva subito che la terza riga e' ottenibile dalla seconda, moltiplicandola per -1. Ne segue che il determinante di E dovra' essere nullo, e che una deformazione principale dovra' essere nulla. L'equazione secolare:

$$-e^3 + I_1\, e^2 - I_2\, e + I_3 = 0 \tag{11}$$

puo' esplicitarsi come:

$$-e\left(e^2-5\,e+\frac{7}{2}\right)=0 \tag{12}$$

con soluzioni:

$$e_1=0 \tag{13}$$

$$e_2=\frac{1}{2}\left(5-\sqrt{11}\right) \tag{14}$$

$$e_3=\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{11}\right) \tag{15}$$

■ La deduzione delle direzioni principali di deformazione

In corrispondenza della prima deformazione principale dovra' essere:

$$\begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{21} \\ n_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, esplicitando (ed eliminando l'inutile ultima equazione):

$$4\,n_{11}-\frac{1}{2}\,n_{21}+\frac{1}{2}\,n_{31}=0 \tag{16}$$

$$-n_{11}+n_{21}-n_{31}=0 \tag{17}$$

Dividendo per n_{31} si puo' scrivere:

$$4\left(\frac{n_{11}}{n_{31}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{n_{21}}{n_{31}}\right)=-\frac{1}{2} \tag{18}$$

$$-\left(\frac{n_{11}}{n_{31}}\right)+\left(\frac{n_{21}}{n_{31}}\right)=1 \tag{19}$$

con soluzione:

$$\frac{n_{11}}{n_{31}}=0 \tag{20}$$

$$\frac{n_{21}}{n_{31}}=1 \tag{21}$$

La prima direzione principale puo' quindi scriversi come:

$$n_I=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

In corrispondenza della seconda deformazione principale dovra' essere:

$$\begin{pmatrix} 4-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{12} \\ n_{22} \\ n_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, esplicitando:

$$\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}\right)n_{12}-\frac{n_{22}}{2}+\frac{n_{32}}{2}=0 \tag{23}$$

$$-\frac{n_{12}}{2}+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}-2\right)n_{22}-\frac{n_{32}}{2}=0 \tag{24}$$

$$\frac{n_{12}}{2}-\frac{n_{22}}{2}+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}-2\right)n_{32}=0 \tag{25}$$

Dividendo per n_{32} si ha:

$$\left(3+\sqrt{11}\right)\left(\frac{n_{12}}{n_{32}}\right)-\left(\frac{n_{22}}{n_{32}}\right)=-1 \tag{26}$$

$$-\left(\frac{n_{12}}{n_{32}}\right)+\left(\sqrt{11}-4\right)\left(\frac{n_{22}}{n_{32}}\right)=1 \tag{27}$$

$$\left(\frac{n_{12}}{n_{32}}\right)-\left(\frac{n_{22}}{n_{32}}\right)=\left(4-\sqrt{11}\right) \tag{28}$$

con soluzione:

$$\frac{n_{12}}{n_{32}}=3-\sqrt{11} \tag{29}$$

$$\frac{n_{22}}{n_{32}}=-1 \tag{30}$$

La seconda direzione principale puo' quindi scriversi:

$$n_{II}=\begin{pmatrix} 3-\sqrt{11} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

In corrispondenza della terza deformazione principale dovra' essere:

$$\begin{pmatrix} 4-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_{12} \\ n_{22} \\ n_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, esplicitando:

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}\right)n_{13}-\frac{n_{23}}{2}+\frac{n_{33}}{2}=0 \tag{32}$$

$$-\frac{n_{13}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{11}}{2}-2\right)n_{23}-\frac{n_{33}}{2}=0 \tag{33}$$

$$\frac{n_{13}}{2}-\frac{n_{23}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{11}}{2}-2\right)n_{33}=0 \tag{34}$$

Dividendo per n_{33} si ha:

$$\left(3-\sqrt{11}\right)\left(\frac{n_{13}}{n_{33}}\right)-\left(\frac{n_{23}}{n_{33}}\right)=-1 \tag{35}$$

$$-\left(\frac{n_{13}}{n_{33}}\right)-\left(\sqrt{11}+4\right)\left(\frac{n_{23}}{n_{33}}\right)=1 \tag{36}$$

$$\left(\frac{n_{13}}{n_{33}}\right)-\left(\frac{n_{23}}{n_{33}}\right)=\left(4+\sqrt{11}\right) \tag{37}$$

con soluzione:

$$\frac{n_{13}}{n_{33}}=3+\sqrt{11} \tag{38}$$

$$\frac{n_{23}}{n_{33}} = -1 \tag{39}$$

La terza direzione principale puo' quindi scriversi:

$$n_{\mathrm{III}} = \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{11} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Verifica dell'ortogonalita'

La prima direzione principale e' ortogonale alle altre due, in quanto:

$$n_I \cdot n_{\mathrm{II}} = n_{11}\, n_{12} + n_{21}\, n_{22} + n_{31}\, n_{32} = 0\left(3 - \sqrt{11}\right) + 1\,(-1) + 1\,(1) = 0 \tag{41}$$

$$n_I \cdot n_{\mathrm{III}} = n_{11}\, n_{13} + n_{21}\, n_{23} + n_{31}\, n_{33} = 0\left(3 + \sqrt{11}\right) + 1\,(-1) + 1\,(1) = 0 \tag{42}$$

Infine, la seconda e la terza direzione principale sono ortogonali, in quanto:

$$n_{\mathrm{II}} \cdot n_{\mathrm{III}} = n_{12}\, n_{13} + n_{22}\, n_{23} + n_{32}\, n_{33} = \left(3 - \sqrt{11}\right)\left(3 + \sqrt{11}\right) + (-1)\,(-1) + 1\,(1) = 0 \tag{43}$$