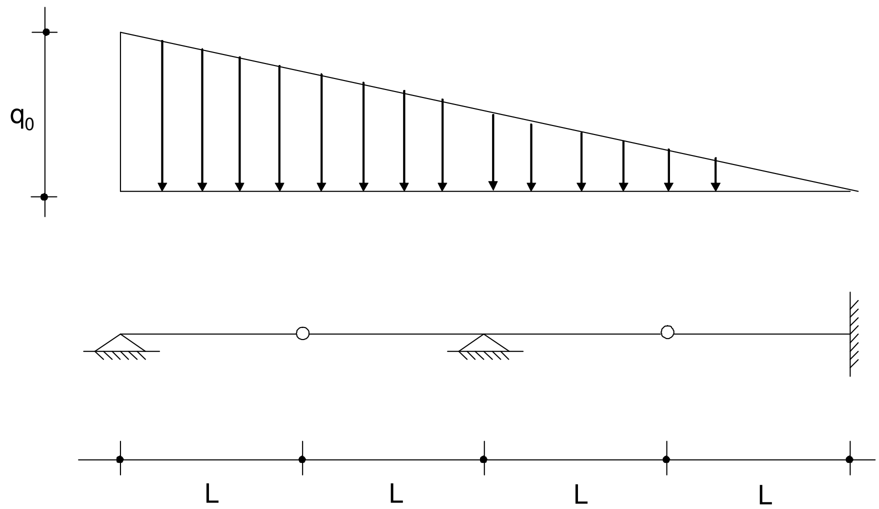
Verifica n.8

Mercoledi' 4 novembre 2009 - ore 10.30-12.30

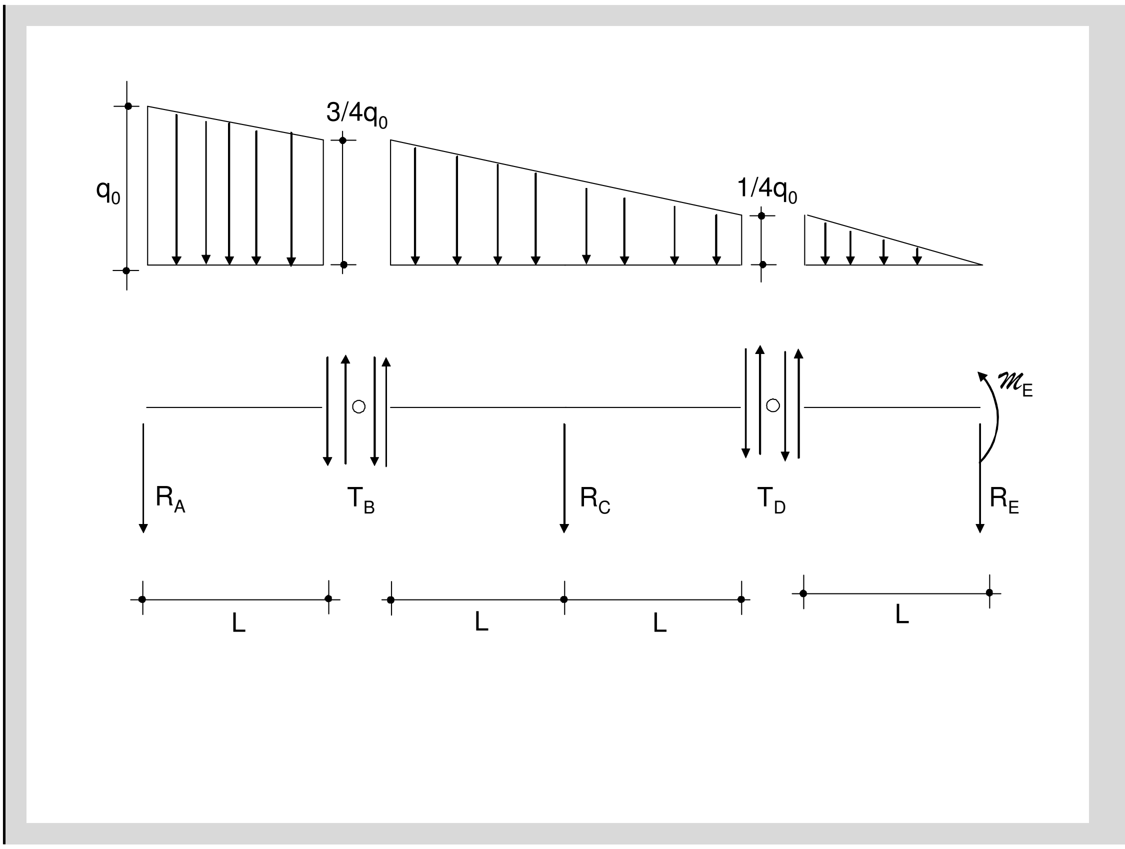
Calcolare le reazione vincolari della trave di Figura



Soluzione

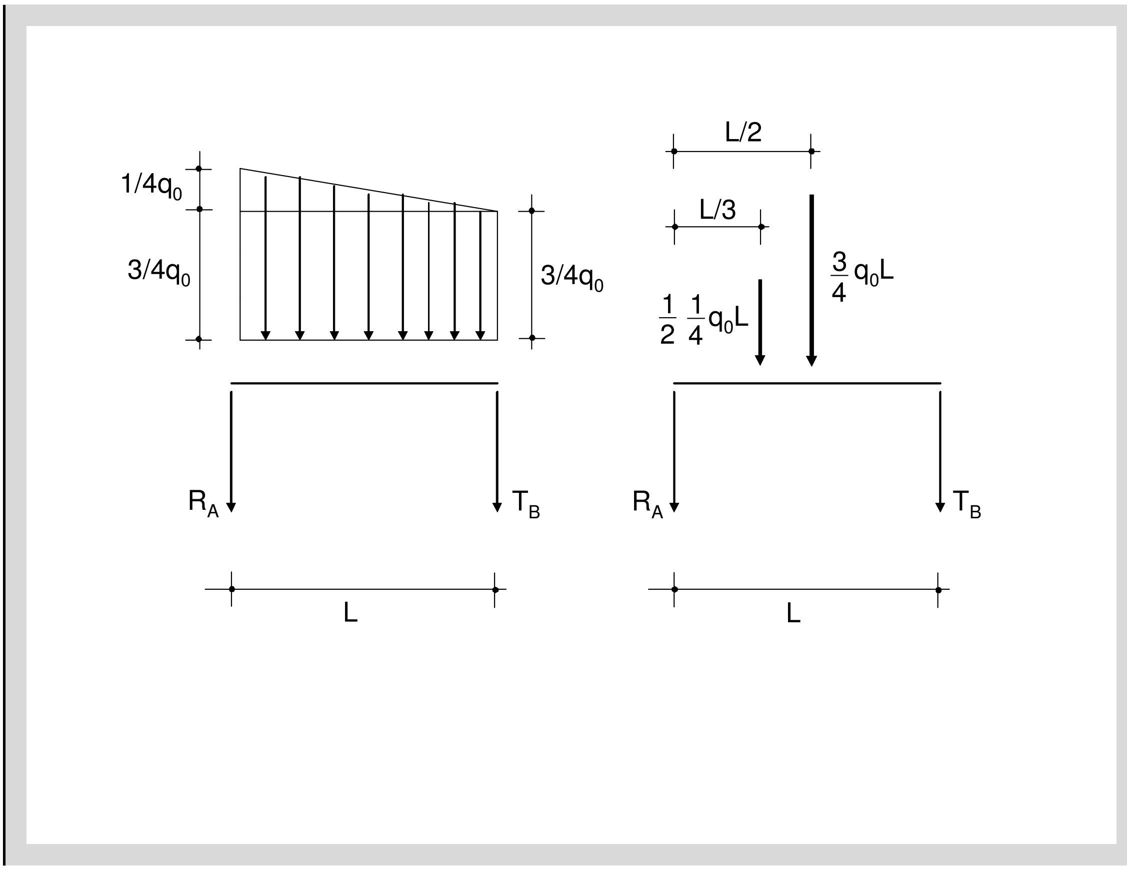
La trave e' fisicamente divisa in tre tratti, possono identificarsi sei incognite reattive (le due reazioni verticali in corrispondenza degli appoggi, i due tagli in corrispondenza delle cerniere, la reazione verticale e la coppia reattiva in corrispondenza dell'incastro) e possono scriversi sei equazioni di equilibrio, due per ogni tratto. Ne segue che la struttura e' isostatica, ed il calcolo delle reazioni puo' condursi direttamente, risolvendo le equazioni di equilibrio.

Si consideri a tal fine il diagramma di Figura 2, dove si sono sostituite le reazioni ai vincoli, e si sono evidenziati i tagli nelle due cerniere B e D. Inoltre, una semplice similitudine geometrica permette di stabilire i valori dei carichi in B ed in D.



■ Primo tratto

E' conveniente considerare il carico trapezoidale agente sul primo tratto come la somma di un carico uniforme, di valore $\frac{3}{4}\,q_0$, e di un carico triangolare, variabile dal valore $\frac{1}{4}\,q_0$ a sinistra a 0 a destra. Il primo carico ha risultante pari a $\frac{3}{4}\,q_0\,\mathrm{L}$, e deve essere applicato nel baricentro del rettangolo, ossia in mezzeria del tratto, mentre il secondo carico ha risultante $\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,q_0\,\mathrm{L}$, e deve essere applicato nel baricentro del triangolo, ossia ad un terzo dalla base. Si ha cosi' la situazione descritta in Figura 3, che permette l'immediata scrittura delle equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione (intorno al punto A):



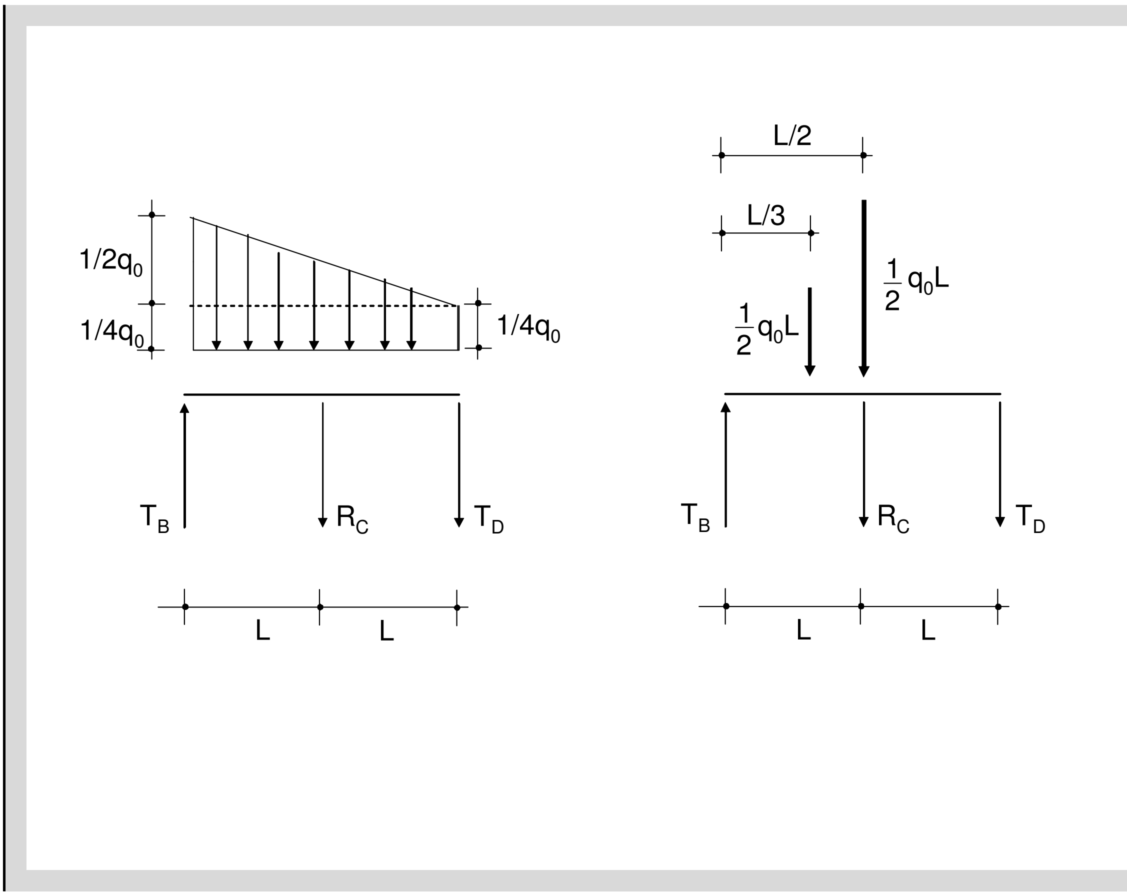
$$R_A + T_B + \frac{3}{4}\,q_0\,L + \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,q_0\,L = 0$$
$$-T_B\,L - \frac{3}{4}\,q_0\,L\,\frac{L}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,q_0\,L\,\frac{L}{3} = 0 \qquad (1)$$

Semplificando si ha:

$$R_A + T_B + \frac{7}{8}\,q_0\,L = 0$$
$$T_B + \frac{5}{12}\,q_0\,L = 0 \qquad (2)$$

■ Secondo tratto

Analoga situazione si ha per il secondo tratto, che pero' ha luce doppia. E' possibile considerare il carico trapezoidale agente sul tratto come la somma di un carico uniforme, di valore $\frac{1}{4}\,q_0$, e di un carico triangolare, variabile dal valore $\frac{1}{2}\,q_0$ a sinistra a 0 a destra. Il primo carico ha risultante pari a $\frac{1}{2}\,q_0$L, e deve essere applicato nel baricentro del rettangolo, ossia in mezzeria del tratto, mentre il secondo carico ha risultante $\frac{1}{2}\,q_0$L, e deve essere applicato nel baricentro del triangolo, ossia ad un terzo dalla base. Si ha cosi' la situazione descritta in Figura 4, che permette l'immediata scrittura delle equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione (intorno al punto B):



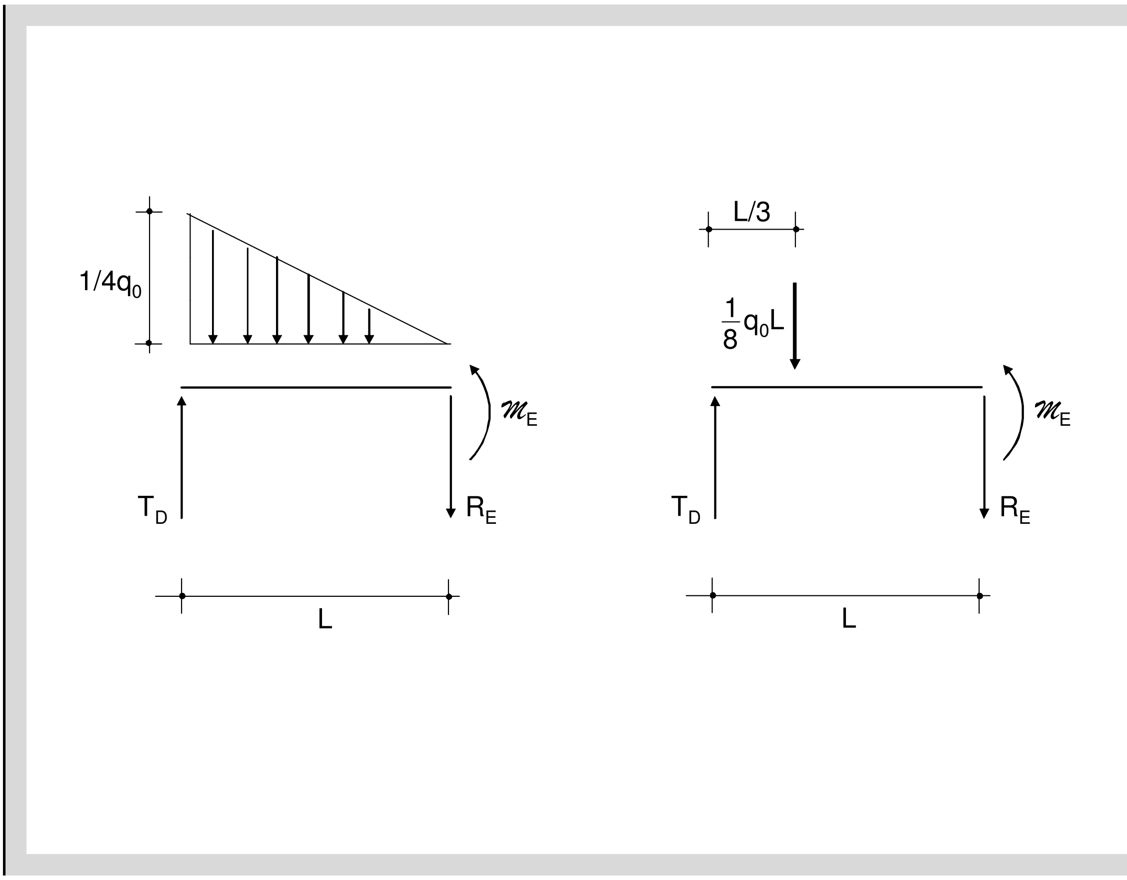
$$-T_B + R_C + T_D + \frac{1}{2} q_0 L + \frac{1}{2} q_0 L = 0$$
$$-R_C L - T_D 2 L - \frac{1}{2} q_0 L L - \frac{1}{2} q_0 L \frac{2 L}{3} = 0 \quad (3)$$

Semplificando si ha:

$$-T_B + R_C + T_D + q_0 L = 0$$
$$R_C + 2 T_D + \frac{5}{6} q_0 L = 0 \quad (4)$$

■ Terzo tratto

Sul terzo tratto, di luce L, agisce solo in carico triangolare, variabile dal valore $\frac{1}{4} q_0$ a sinistra a 0 a destra. Esso ha risultante $\frac{1}{8} q_0$ L, e deve essere applicato nel baricentro del triangolo, ossia ad un terzo dalla base. Si ha cosi' la situazione descritta in Figura 5, che permette l'immediata scrittura delle equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione (intorno al punto D):



$$-T_D + R_E + \frac{1}{8} q_0 L = 0$$
$$M_E - R_E L - \frac{1}{8} q_0 L \frac{L}{3} = 0 \qquad (5)$$

Semplificando si ha:

$$-T_D + R_E + \frac{1}{8} q_0 L = 0$$
$$M_E - R_E L - \frac{1}{24} q_0 L^2 = 0 \qquad (6)$$

■ Soluzione delle equazioni di equilibrio

Riscrivendo le sei equazioni si ha il sistema:

$$R_A + T_B + \frac{7}{8} q_0 L = 0$$
$$T_B + \frac{5}{12} q_0 L = 0$$
$$-T_B + R_C + T_D + q_0 L = 0$$
$$R_C + 2 T_D + \frac{5}{6} q_0 L = 0 \qquad (7)$$
$$-T_D + R_E + \frac{1}{8} q_0 L = 0$$
$$M_E - R_E L - \frac{1}{24} q_0 L^2 = 0$$

La seconda equazione fornisce T_B :

$$T_B = -\frac{5}{12} q_0 L \qquad (8)$$

La prima equazione fornisce R_A :

$$R_A = -\frac{11}{24} q_0 L \qquad (9)$$

La terza e la quarta equazione forniscono R_C e T_D :

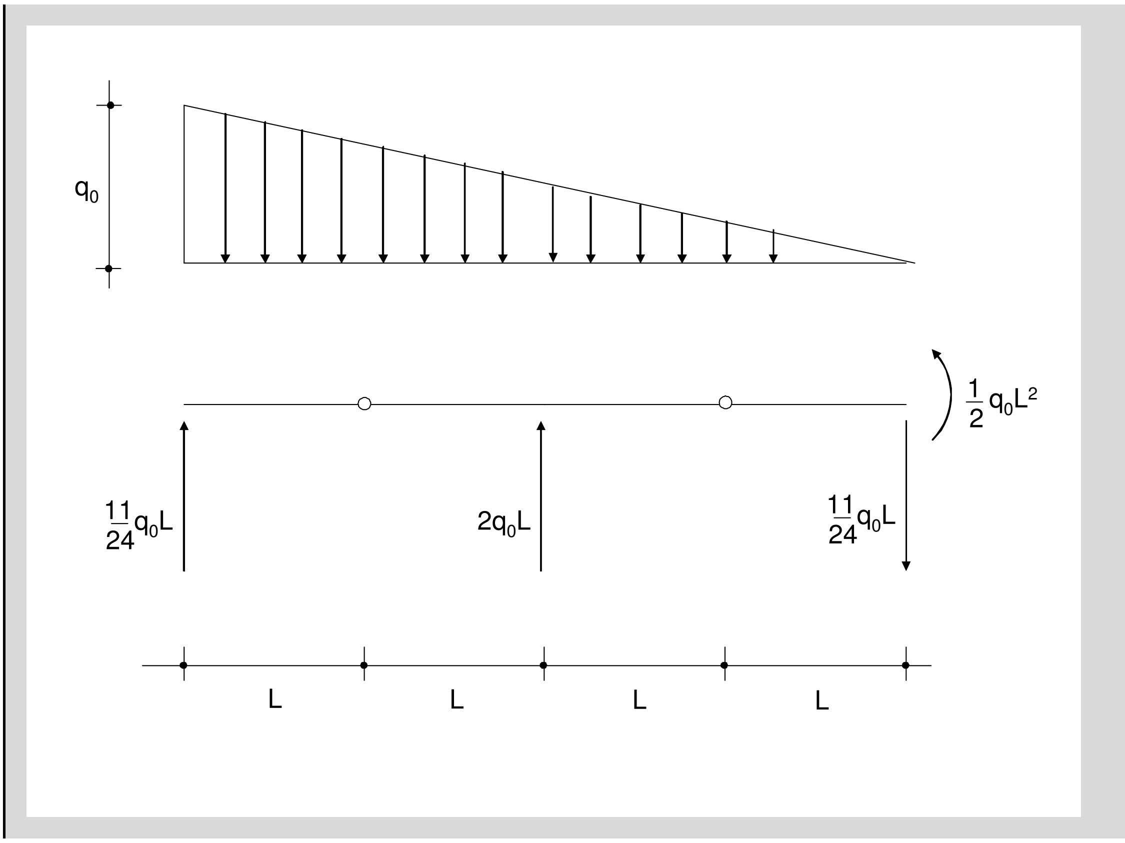
$$T_D = \frac{7}{12} q_0 L \qquad (10)$$
$$R_C = -2 q_0 L$$

Infine, le ultime due equazioni forniscono R_E ed M_E :

$$R_E = \frac{11}{24} q_0 L \qquad (11)$$
$$M_E = \frac{1}{2} q_0 L^2$$

■ Verifica della correttezza dei risultati

Ottenute le reazioni, e' possibile verificare la correttezza dei risultati, riportando le reazioni coi loro versi, e controllando che la trave sia equilibrata. Dalla Figura 6 si possono scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione (intorno al punto A) dell'intera trave:



$$-\frac{11}{24} q_0 L - 2 q_0 L + \frac{11}{24} q_0 L + \frac{1}{2} q_0 4 L = 0 \qquad (12)$$

$$2 q_0 L 2 L - \frac{11}{24} q_0 L 4 L - \frac{1}{2} q_0 4 L \frac{1}{3} 4 L + \frac{1}{2} q_0 L^2 = 0 \qquad (13)$$

Semplificando, e' possibile controllare che ambedue le condizioni sono verificate.