

Verifica n.40

Mercoledì 4 settembre 2013 - ore 9.30-11.30

Determinare i diagrammi di tagli e momenti sullo schema di Figura:

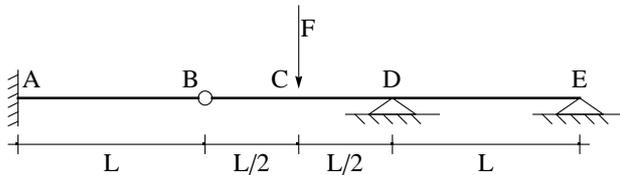


Figura 1 - Lo schema di partenza

Prima soluzione: scrittura diretta delle equazioni di congruenza

La struttura e' una volta iperstatica, ed il metodo di soluzione piu' naturale appare la scrittura diretta di una singola equazione di congruenza. Si assuma come sistema isostatico equivalente la trave di Figura 2, in cui l'incognita iperstatica X_1 deve essere tale da ripristinare la congruenza, ossia deve essere tale che le rotazioni immediatamente alla sinistra di D siano pari alle rotazioni alla destra di D:

$$\phi_{Dsin} = \phi_{Ddes} \quad (1)$$

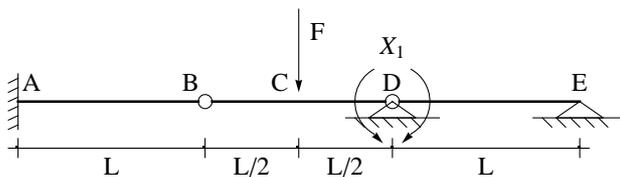


Figura 2 - Il sistema isostatico equivalente prescelto

■ Il calcolo di ϕ_{Dsin}

Per il calcolo di ϕ_{Dsin} si deve far riferimento allo schema di Figura 3.

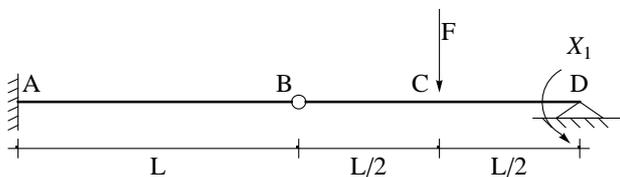


Figura 3 - Lo schema per il calcolo di ϕ_{Dsin}

Per il principio di sovrapposizione degli effetti si potrà scrivere:

$$\phi_{Dsin} = \phi_{Dsin}^{(0)} + \phi_{Dsin}^{(1)} \quad (2)$$

dove $\phi_{Dsin}^{(0)}$ e' la rotazione causata dalla forza F, mentre $\phi_{Dsin}^{(1)}$ e' la rotazione causata dalla incognita iperstatica X_1 .

■ Il calcolo di $\phi_{Dsin}^{(0)}$

Utilizzando il metodo dei corollari di Mohr, occorre calcolare preliminarmente il momento sulla trave di Figura 3, caricata dalla sola forza F. Si ha quindi il diagramma:

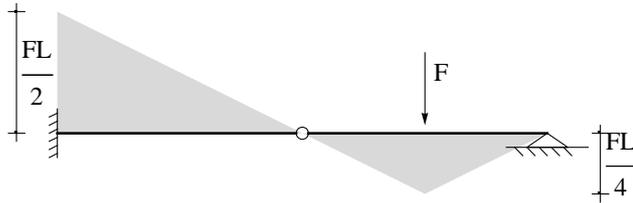


Figura 4 - Il diagramma del momento dovuto al carico applicato F

La richiesta rotazione coincide con la reazione R_D^* in D, cambiata di segno, calcolata sulla trave ausiliaria caricata dal carico fittizio $q^* = \frac{M}{EI}$:

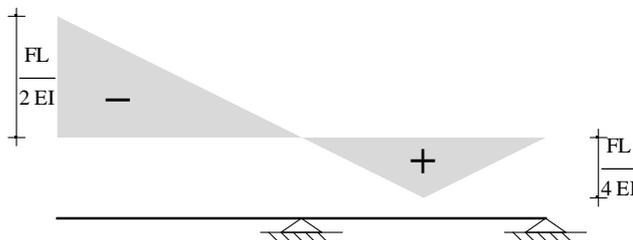


Figura 5 - La trave ausiliaria caricata dal suo carico fittizio q^*

Una semplice equazione di equilibrio alla rotazione scegliendo quale polo il punto B conduce a scrivere:

$$-\frac{1}{2} \frac{FL}{2EI} L - \frac{2}{3} L - \frac{1}{2} \frac{FL}{4EI} L - \frac{L}{2} - R_D^* L = 0 \quad (3)$$

da cui:

$$R_D^* = -\frac{11}{48} \frac{FL^2}{EI} = T_D^* \quad (4)$$

La rotazione richiesta e' allora pari a:

$$\phi_{Dsin}^{(0)} = \frac{11}{48} \frac{FL^2}{EI} \quad (5)$$

■ Il calcolo di $\phi_{Dsin}^{(1)}$

Del tutto analogamente, occorre adesso tracciare il diagramma del momento dovuto ad una coppia unitaria in D:

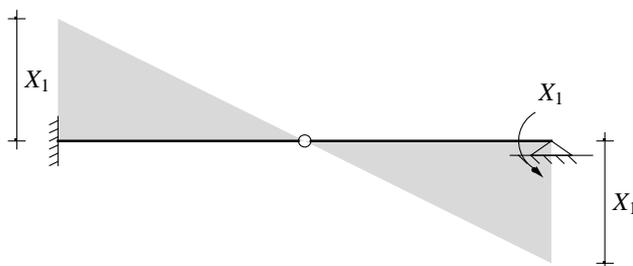


Figura 6 - Il diagramma del momento dovuto alla coppia applicata in D

La richiesta rotazione coincide con la reazione R_D^* in D, cambiata di segno, calcolata sulla trave ausiliaria caricata dal carico fittizio $q^* = \frac{M}{EI}$:

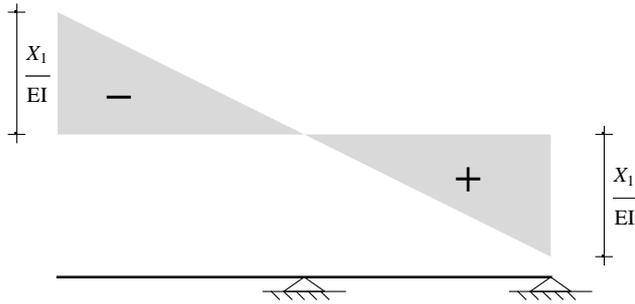


Figura 7 - La trave ausiliaria caricata dal suo carico fittizio q^*

Imponendo l'equilibrio alla rotazione scegliendo quale polo il punto B si ha:

$$-\frac{1}{2} \frac{X_1}{EI} L - \frac{2}{3} L - \frac{1}{2} \frac{X_1}{EI} L - \frac{2}{3} L - R_D^* L = 0 \quad (6)$$

da cui:

$$R_D^* = -\frac{2}{3} \frac{X_1}{EI} L \quad (7)$$

La rotazione richiesta e' allora pari a:

$$\phi_{Dsin}^{(1)} = \frac{2}{3} \frac{X_1}{EI} L \quad (8)$$

■ Il calcolo di ϕ_{Ddes}

Il calcolo della rotazione a destra di D si conduce su uno schema fondamentale, ed e' quindi immediata:

$$\phi_{Ddes} = -\frac{X_1 L}{3 EI} \quad (9)$$

■ Il calcolo dell'incognita iperstatica

La (1) diventa, utilizzando la (5), la (8) e la (9):

$$\frac{11}{48} \frac{FL^2}{EI} + \frac{2}{3} \frac{X_1}{EI} L = -\frac{X_1 L}{3 EI} \quad (10)$$

e quindi l'incognita iperstatica X_1 e' pari a:

$$X_1 = -\frac{11}{48} FL \quad (11)$$

Il diagramma delle caratteristiche

Per tracciare i diagrammi delle caratteristiche, si possono ora calcolare le reazioni vincolari. A tal fine, si scrivono le equazioni di equilibrio per il sistema isostatico equivalente, in cui X_1 ha il valore (11). Si ha quindi, dalla Figura 2:

$$R_A + T_B = 0 \quad (12)$$

$$-T_B L + \mathcal{M}_{tA} = 0 \quad (13)$$

$$-T_B + F + T_{Dsin} = 0 \quad (14)$$

$$-T_B L + F \frac{L}{2} - \frac{11}{48} F L = 0 \quad (15)$$

$$-T_{Ddes} + R_E = 0 \quad (16)$$

$$-T_{Ddes} L + \frac{11}{48} F L = 0 \quad (17)$$

da cui:

$$T_{Ddes} = \frac{11}{48} F \quad (18)$$

$$R_E = \frac{11}{48} F \quad (19)$$

$$T_B = \frac{13}{48} F \quad (20)$$

$$T_{Dsin} = -\frac{35}{48} F \quad (21)$$

$$R_A = -\frac{13}{48} F \quad (22)$$

$$\mathcal{M}_{\tau A} = \frac{13}{48} F L \quad (23)$$

Poiche' il taglio e' costante a tratti, il tracciamento del diagramma e' evidente, tenendo conto che a sinistra il taglio e' pari a $-R_A$, mentre a destra e' pari ad R_E :

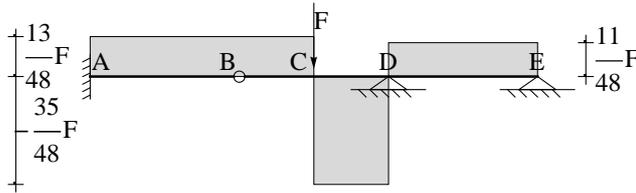


Figura 8 - Il diagramma del taglio

Il diagramma del momento variera' invece con legge lineare: dal valore $M_A = -\mathcal{M}_{\tau A}$ a sinistra si traccia una retta che passa per la cerniera e prosegue fino alla forza. Da questo punto si traccia un'altra linea fino al valore $X_1 = M_D$ in corrispondenza dell'appoggio interno. Infine, il diagramma si dovra' annullare a destra:

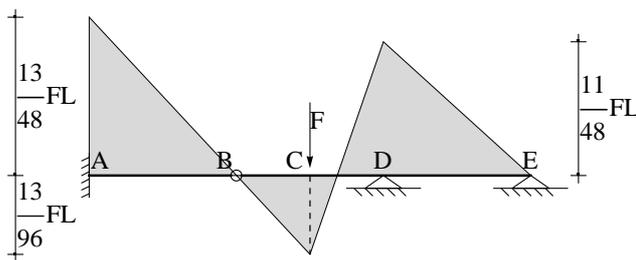


Figura 9 - Il diagramma del momento

■ **Nota**

Ovviamente, la scelta del momento in D quale incognita iperstatica e' arbitraria. Altre scelte sono altrettanto legittime, come il momento in A, il taglio in B, la reazione dell'appoggio in E, etc.

Seconda soluzione: il principio dei lavori virtuali

Si puo' anche ricavare una incognita iperstatica applicando opportunamente il principio dei lavori virtuali, e calcolare successivamente le altre reazioni. Utilizzando il sistema reale di Figura 1 come sistema di spostamenti, ed il sistema virtuale di forze di Figura 10, il lavoro virtuale esterno si annullera', in quanto lo spostamento in E sara' nullo, e si potra' scrivere (limitandosi al solo termine flessionale):

$$\int_s \frac{M M'}{EI} ds = 0 \quad (24)$$

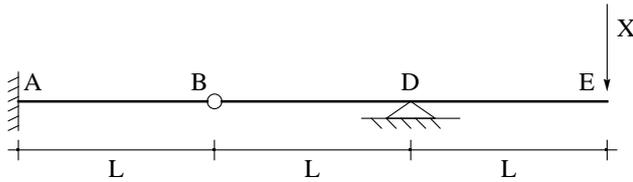


Figura 10 - Il sistema di forze fittizio prescelto

e sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, il momento M potra' essere suddiviso nelle due aliquote M^0 , dovuto al carico F , ed $X M'$, dovuto all'incognita iperstatica. Ne segue che la (24) si scrive:

$$\int_s \frac{M^0 M'}{EI} ds + X \int_s \frac{(M')^2}{EI} ds = 0 \quad (25)$$

L'incognita iperstatica X varra' dunque:

$$X = - \frac{\int_s \frac{M^0 M'}{EI} ds}{\int_s \frac{(M')^2}{EI} ds} \quad (26)$$

■ Il calcolo di M^0

Il momento dovuto alla forza applicata F e' riportato in Figura 11

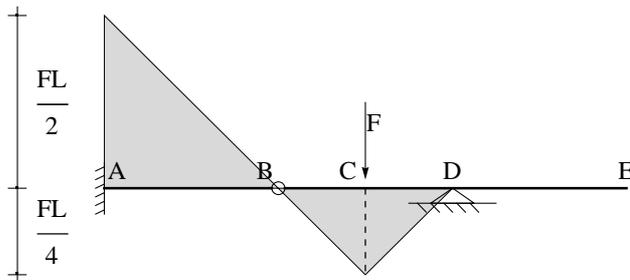


Figura 11 - Il momento M^0

Analiticamente si potra' scrivere:

$$M_{AB}^0 = -\frac{FL}{2} \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \quad (27)$$

$$M_{BC}^0 = -F x_3 \quad (28)$$

$$M_{CD}^0 = \frac{FL}{4} \left(1 - \frac{2x_3}{L}\right) \quad (29)$$

avendo scelto in A, B e C le origini dei rispettivi sistemi di riferimento

■ Il calcolo di M^1

Il momento $M^{(1)}$, dovuto all'incognita X unitaria, e' riportato in Figura 12

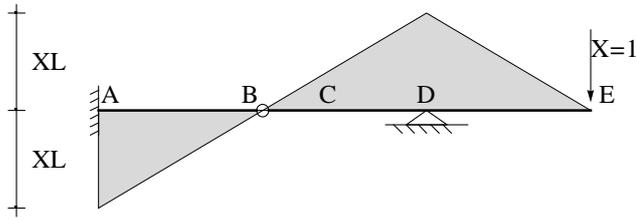


Figura 12 - Il momento $M^{(1)}$

Analiticamente si potrà scrivere:

$$M_{AB}^1 = X L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \quad (30)$$

$$M_{BC}^1 = -X x_3 \quad (31)$$

$$M_{CD}^1 = -\frac{X L}{2} - X x_3 \quad (32)$$

$$M_{DE}^1 = -X L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \quad (33)$$

■ Il calcolo dell'incognita iperstatica

Utilizzando le espressioni analitiche appena dedotte, il calcolo degli integrali della (26) diviene banale:

$$\int_s M^0 M' ds = -\int_0^L F \frac{L}{2} L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right)^2 dx_3 - F \int_0^{L/2} \frac{x_3^2}{2} dx_3 - \int_0^{L/2} F \frac{L}{4} \left(1 - \frac{2x_3}{L}\right) \left(\frac{L}{2} + x_3\right) dx_3 = -\frac{11}{48} F L^3 \quad (34)$$

$$\int_s (M')^2 ds = \int_0^L L^2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right)^2 dx_3 + \int_0^{L/2} x_3^2 dx_3 + \int_0^{L/2} \left(\frac{L}{2} + x_3\right)^2 dx_3 + \int_0^L L^2 \left(1 - \frac{x_3}{L}\right)^2 dx_3 = L^3 \quad (35)$$

da cui:

$$X = \frac{11}{48} F \quad (36)$$

Il resto del procedimento e' analogo a quanto detto per la prima soluzione proposta