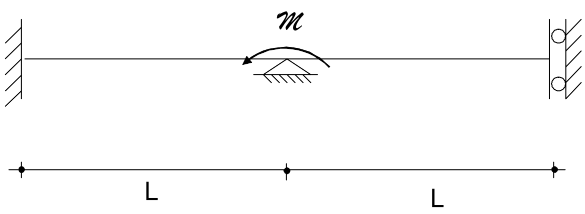
Esame 4 agosto 2010

Si consideri la trave di Figura, incastrata a sinistra, appoggiata in mezzeria e con bipendolo all'estremo di destra, caricata da una coppia di intensita' M in corrispondenza dell'appoggio centrale. Si richiede il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche, delle rotazioni e degli abbassamenti, nonche' il valore della rotazione in corrispondenza della coppia, e dello spostamento del bipendolo di estremita'



Passo 1 - Scelta del metodo solutivo

La trave e' costituita da un unico tratto, quindi possono scriversi due equazioni di equlibrio, mentre le incognite reattive sono quattro, ossia la reazione verticale e la coppia reattiva nell'incastro, la reazione verticale dell'appoggio e la coppia reattiva del bipendolo. Ne segue che la trave e' due volte iperstatica, e conviene utilizzare il metodo della scrittura delle equazioni differenziali del quarto ordine della linea elastica

Passo 2 - Scrittura e soluzione delle equazioni differenziali della linea elastica

Esiste un solo punto di discontinuita', in corrispondenza della mezzeria, quindi devono scriversi due equazioni differenziali negli spostamenti u_2 e v_2, e poiche' non esistono carichi distribuiti queste equazioni sono omogenee:

$$u_2''''(x_3) = 0 \qquad (1)$$
$$v_2''''(x_3) = 0$$

con soluzioni:

$$u_2(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \qquad (2)$$

$$v_2(x_3) = b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_3^2 + b_3 x_3^3 \qquad (3)$$

Le otto condizioni ai limiti dovranno esprimere due condizioni di congruenza nell'incastro:

$$\begin{aligned} &u_2(0) = 0 \\ &u_2'(0) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

quattro condizioni nell'appoggio intermedio:

$$\begin{aligned} &u_2(2) = 0 \\ &v_2(0) = 0 \\ &u_2'(L) = v_2'(0) \\ &EIu_2''(L) - EIv_2''(0) + \mathcal{M} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

ed ancora una condizione di congruenza ed una di equilibrio nel bipendolo a destra:

$$\begin{aligned} &v_2'(L) = 0 \\ &v_2'''(L) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Derivando opportunamente le (2) e (3) e valutando le (4-6), si giunge a scrivere il sistema di otto equazioni nelle otto costanti di integrazione a_i e b_i :

$$\begin{aligned} &a_0 = 0 \\ &a_1 = 0 \\ &a_0 + a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3 = 0 \\ &b_0 = 0 \\ &a_1 + 2 a_2 L + 3 a_3 L^2 = b_1 \\ &2 a_2 + 6 a_3 L - 2 b_2 + \frac{\mathcal{M}}{EI} = 0 \\ &b_1 + 2 b_2 L + 3 b_3 L^2 = 0 \\ &6 b_3 = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Tale sistema si riduce immediatamente ad un sistema di quattro equazioni:

$$\begin{aligned} &a_2 + a_3 L = 0 \\ &2 a_2 L + 3 a_3 L^2 = b_1 \\ &a_2 + 3 a_3 L - b_2 + \frac{\mathcal{M}}{2\,EI} = 0 \\ &b_1 + 2 b_2 L = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

facilmente risolvibilea fornire:

$$\begin{aligned} &a_2 = \frac{\mathcal{M}}{5\,EI} \\ &a_3 = -\frac{\mathcal{M}}{5\,EI\,L} \\ &b_1 = -\frac{\mathcal{M}L}{5\,EI} \\ &b_2 = \frac{\mathcal{M}}{10\,EI} \end{aligned} \tag{9}$$

Gli spostamenti lungo la trave sono forniti quindi da:

$$u_2(x_3) = \frac{\mathcal{M}}{5\,EI} x_3^2 - \frac{\mathcal{M}}{5\,EI\,L} x_3^3 \tag{10}$$

$$v_2(x_3) = -\frac{\mathcal{M}L}{5\,EI} x_3 + \frac{\mathcal{M}}{10\,EI} x_3^2 \tag{11}$$

le rotazioni sono pari a:

$$\phi^{(1)}(x_3) = -\frac{2\,\mathcal{M}}{5\,EI} x_3 + \frac{3\,\mathcal{M}}{5\,EI\,L} x_3^2 \tag{12}$$

$$\phi^{(2)}(x_3) = \frac{\mathcal{M}L}{5\,EI} - \frac{\mathcal{M}}{5\,EI} x_3 \tag{13}$$

il momento flettente e' esprimibile come:

$$M_1^{(1)}(x_3) = -\frac{2\,\mathcal{M}}{5} + \frac{6\,\mathcal{M}}{5\,L} x_3 \tag{14}$$

$$M_1^{(2)}(x_3) = -\frac{\mathcal{M}}{5} \tag{15}$$

Infine, il taglio e' pari a:

$$T_2^{(1)}(x_3) = \frac{6\,\mathcal{M}}{5\,L} \tag{16}$$

$$T_2^{(2)}(x_3) = 0 \tag{17}$$

■ Passo 3 - Tracciamento diagramma del taglio e del momento flettente

Il diagramma del taglio sara' costante lungo il primo tratto, e pari a 6/5 $\mathcal{M}$/L, mentre sara' nullo nel secondo tratto. In corrispondenza dell'appoggio si avra' quindi una discontinutita' pari al valore della reazione.

Il momento sara' pari a -2/5 $\mathcal{M}$ nell'incastro, e variera' linearmente fino all'appoggio centrale, con pendenza pari al valore del taglio, crescendo quindi fino al valore 4/5 $\mathcal{M}$ sull'appoggio. Si ha poi un salto pari al valore della coppia applicata, e nel secondo tratto, dove il taglio e' nullo, il momento prosegue con valore costante, e pari a -$\mathcal{M}$/5.
Tutto cio' permette di dedurre le reazioni vincolari:
- nell'incastro $R_A = -T_2^{(1)}(x_3 = 0)$

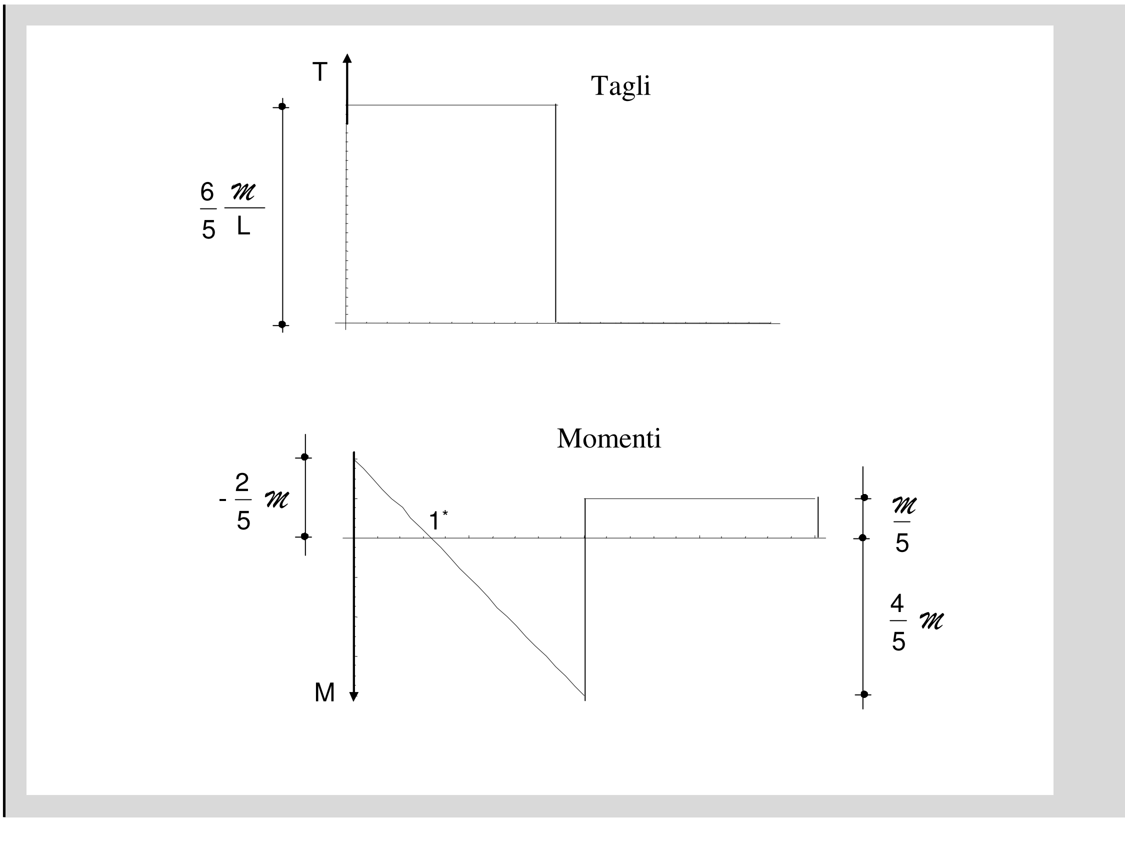
$$\begin{aligned} R_A &= -T_2^{(1)}(x_3 = 0) = -\frac{6\,\mathcal{M}}{5\,L} \\ M_{rA} &= -M_1^{(1)}(x_3 = 0) = \frac{2\,\mathcal{M}}{5} \end{aligned} \tag{18}$$

- in corrispondenza dell'appoggio:

$$R_B = T_2^{(1)}(x_3 = L) - T_2^{(2)}(x_3 = 0) = \frac{6\,\mathcal{M}}{5\,L} \tag{19}$$

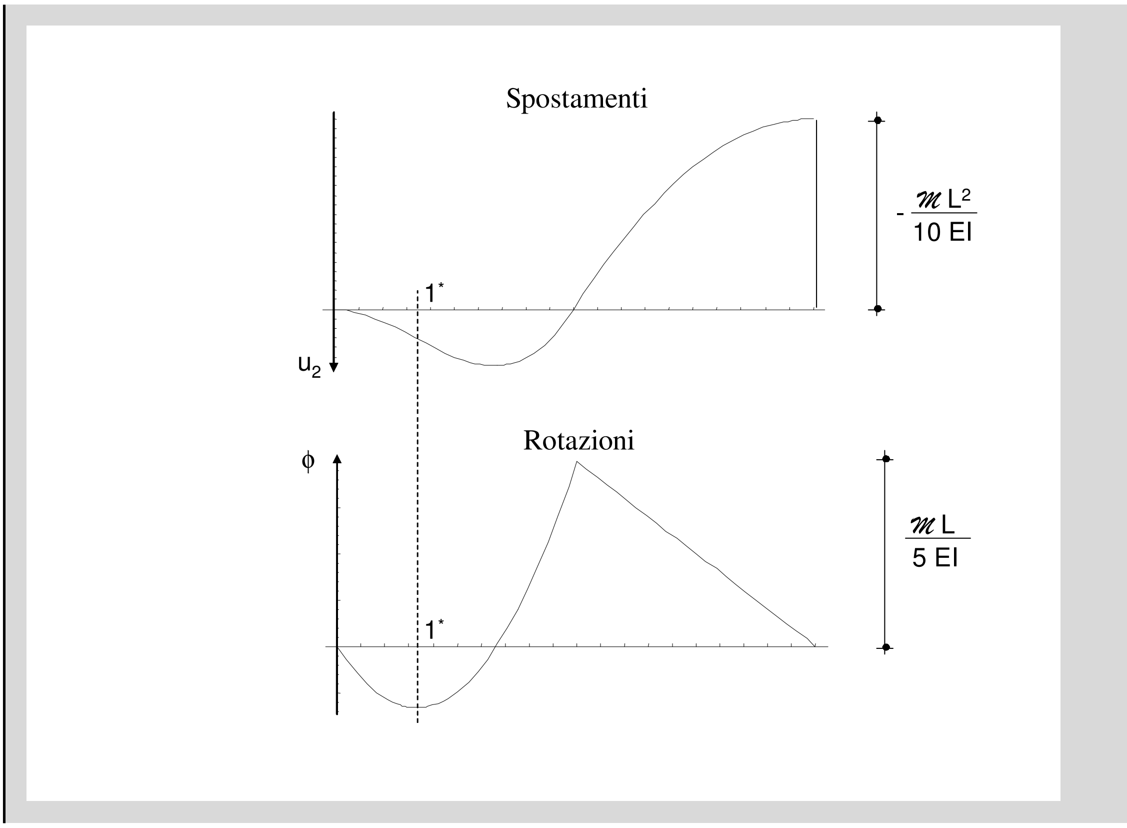
- in corrispondenza del bipendolo:

$$M_{rC} = M_1^{(2)}(x_3 = L) = -\frac{\mathcal{M}}{5} \tag{20}$$



■ Passo 4 - Tracciamento del diagramma di rotazione e spostamento

Per tracciare il diagramma delle rotazioni e degli spostamenti si hanno le seguenti informazioni:
1. il diagramma delle rotazioni sara' quadratico nel primo tratto, lineare nel secondo
2. il diagramma delle rotazioni dovra' annullarsi in corrispondenza dell'incastro e del bipendolo
3. il diagramma degli spostamenti si annulla nell'incastro, dove avra' tangenza orizzontale, ed in corrispondenza dell'appoggio. Inoltre presentera' tangenza orizzontale nell'estremo di destra
4. il diagramma delle rotazioni raggiunge un minimo in corrispondenza dell'ascissa 1*, dove il momento si annulla. Nella stessa scissa il diagramma degli spostamenti ha un punto di flesso.



■ Passo 5 - Determinazione del valore massimo dello spostamento

Lo spostamento del bipendolo e' immediatamente calcolabile come

$$u_{2\,min} = v_2\,(x_3 = L) = -\frac{\mathcal{M} L^2}{10\, EI} \tag{21}$$

mentre la rotazione in corrispondenza della coppia applicata sara':

$$\phi_B = v_2\,(0) = \phi^{(1)}\,(x_3 = L) = \phi^{(2)}\,(x_3 = 0) = \frac{\mathcal{M} L}{5\, EI} \tag{22}$$