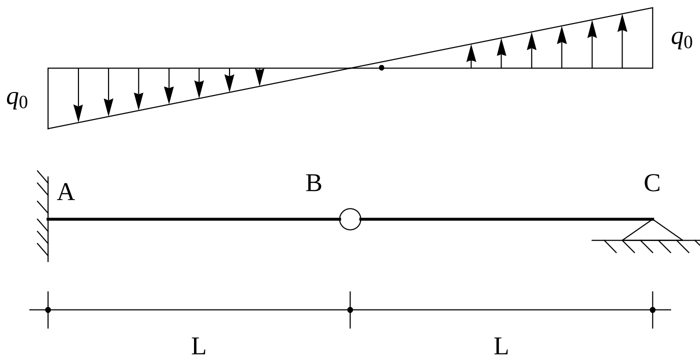
Verifica n.27

Lunedi' 4 Giugno 2012 - ore 9.30-11.30

Si consideri la trave di Figura, di luce 2L, vincolata all'esterno con un incastro a sinistra, una cerniera in mezzeria ed un appoggio a destra. La trave e' caricata da un carico distribuito con legge lineare, diretto verso il basso sulla luce di sinistra e verso l'alto sulla luce di destra

Si calcolino e si disegnino i diagrammi di tagli, momenti, rotazioni e spostamenti



Soluzione

La trave e' costituita da due tratti rigidi, connessi tra loro da una cerniera interna in B. Ne segue che i suoi gradi di liberta' - in assenza di vincoli - sono pari a 4. I vincoli esterni eliminano 3 possibilita' di movimento, uno nell' appoggio e due in corrispondenza dell'incastro. Inoltre, la sconnessione semplice in B aggiunge un'ulteriore restrizione di movimento, e la struttura risulta isostatica: 2t - 2 = 4 - 4 = 0.

Poiche' la struttura e' isostatica, potrebbe utilizzarsi il metodo della doppia integrazione, oppure sfruttare le analogie di Mohr. Si preferisce invece l'approccio generale, risolvendo le due equazioni differenziali del quarto ordine

$$u_2'''' = \frac{q}{\mathrm{EI}} \tag{1}$$

$$v_2'''' = \frac{q}{\mathrm{EI}} \tag{2}$$

valide rispettivamente in AB ed in BC. Il calcolo evolve secondo le seguenti fasi:

1. deduzione dell'espressione analitica del carico

2. soluzione delle equazioni differenziali ed imposizione delle condizioni ai limiti

3. deduzione degli spostamenti, ed in cascata, di rotazioni, momenti e tagli

4. tracciamento dei grafici diel taglio e del momento

5. tracciamento del grafico di rotazioni ed abbassamenti

L'espressione analitica del carico

Nel tratto AB il carico e' distribuito con legge lineare:

$$q(x_3) = a_0 + a_1 x_3 \tag{3}$$

e poiche' dovra' essere:

$$q(0) = q_0 \tag{4}$$

$$q(L) = 0 \tag{5}$$

si avra':

$$q(x_3) = q_0\left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \tag{6}$$

Nel tratto BC, assumendo l'origine degli assi in B, si avra' ancora:

$$q(x_3) = b_0 + b_1\, x_3 \tag{7}$$

ma stavolta dovra' essere:

$$q(0) = 0 \tag{8}$$

$$q(L) = -q_0 \tag{9}$$

e quindi in BC il carico sara' esprimibile come:

$$q(x_3) = -\, q_0\, \frac{x_3}{L} \tag{10}$$

■ La soluzione delle equazioni della linea elastica

Le due equazioni (1-2) si scrivono quindi:

$$u_2'''' = \frac{q_0}{\mathrm{EI}}\left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \tag{11}$$

$$v_2'''' = -\frac{q_0}{\mathrm{EI}}\,\frac{x_3}{L} \tag{12}$$

con soluzione:

$$u_2(x_3) = \frac{q_0}{\mathrm{EI}}\left(\frac{x_3^4}{24} - \frac{x_3^5}{120\, L}\right) + c_0 + c_1\, x_3 + c_2\, x_3^2 + c_3\, x_3^3 \tag{13}$$

$$v_2(x_3) = -\,\frac{q_0}{\mathrm{EI}}\,\frac{x_3^5}{120\, L} + d_0 + d_1\, x_3 + d_2\, x_3^2 + d_3\, x_3^3 \tag{14}$$

Le otto costanti di integrazione si determinano in base alle condizioni ai limiti. Nel caso in esame occorrera' imporre che spostamenti e rotazioni siano nulle nell'incastro a sinistra:

$$u_2(0) = 0 \tag{15}$$

$$u_2'(0) = 0 \tag{16}$$

In B, occorrera' imporre la continuita' degli abbassamenti, l'annullarsi del momento e la continuita' dei tagli:

$$u_2(L) = v_2(0) \tag{17}$$

$$-\mathrm{EI}\, u_2''(L) = 0 \tag{18}$$

$$-\mathrm{EI}\, v_2''(0) = 0 \tag{19}$$

$$-\mathrm{EI}\, u_2'''(L) = -\mathrm{EI}\, v_2'''(0) \tag{20}$$

Infine, in C occorrera' annullare abbassamenti e momenti:

$$v_2(L) = 0 \tag{21}$$

$$-\mathrm{EI} v_2''(L) = 0 \tag{22}$$

Queste otto condizioni si tramutano nel sistema di otto equazioni nelle otto costanti di integrazione:

$$c_0 = 0 \tag{23}$$

$$c_1 = 0 \tag{24}$$

$$\frac{q_0}{EI}\left(\frac{L^4}{24}-\frac{L^4}{120}\right)+c_0+c_1 L+c_2 L^2+c_3 L^3=d_0 \tag{25}$$

$$\frac{q_0}{EI}\left(\frac{L^2}{2}-\frac{L^2}{6}\right)+2 c_2+6 c_3 L=0 \tag{26}$$

$$2 d_2=0 \tag{27}$$

$$\frac{q_0}{EI}\left(L-\frac{L}{2}\right)+6 c_3=6 d_3 \tag{28}$$

$$-\frac{q_0}{EI}\frac{L^4}{120}+d_0+d_1 L+d_2 L^2+d_3 L^3=0 \tag{29}$$

$$-\frac{q_0}{EI}\frac{L^2}{6}+2 d_2+6 d_3 L=0 \tag{30}$$

che si tramutano immediatamente in un sistema di cinque equazioni in cinque incognite:

$$\frac{q_0}{EI}\left(\frac{L^4}{24}-\frac{L^4}{120}\right)+c_2 L^2+c_3 L^3=d_0 \tag{31}$$

$$\frac{q_0}{EI}\left(\frac{L^2}{2}-\frac{L^2}{6}\right)+2 c_2+6 c_3 L=0 \tag{32}$$

$$\frac{q_0}{EI}\left(L-\frac{L}{2}\right)+6 c_3=6 d_3 \tag{33}$$

$$-\frac{q_0}{EI}\frac{L^4}{120}+d_0+d_1 L+d_3 L^3=0 \tag{34}$$

$$-\frac{q_0}{EI}\frac{L}{6}+6 d_3=0 \tag{35}$$

Dall'ultima si ricava d_3 :

$$d_3=\frac{q_0 L}{36\,EI} \tag{36}$$

Dalla terza si ricava allora c_3 :

$$c_3=-\frac{q_0 L}{18\,EI} \tag{37}$$

Dalla seconda si deduce c_2 :

$$c_2=0 \tag{38}$$

Dalla prima puo' quindi calcolarsi d_0 :

$$d_0=-\frac{q_0 L^4}{45\,EI} \tag{39}$$

ed infine dalla quarta si calcola d_1:

$$d_1=\frac{q_0 L^3}{360\,EI} \tag{40}$$

■ La deduzione di spostamenti, rotazioni, momenti e tagli

Utilizzando i valori delle costanti di integrazione appena dedotti, si potranno scrivere gli spostamenti come:

$$u_2(x_3)=\frac{q_0}{EI}\left(\frac{x_3^4}{24}-\frac{x_3^5}{120\,L}\right)-\frac{q_0 L}{18\,EI}x_3^3 \tag{41}$$

$$v_2(x_3) = -\frac{q_0}{EI}\frac{x_3^5}{120\,L} - \frac{q_0\,L^4}{45\,EI} + \frac{q_0\,L^3}{360\,EI}x_3 + \frac{q_0\,L}{36\,EI}x_3^3 \tag{42}$$

da cui le rotazioni:

$$\phi^{(1)}(x_3) = \frac{q_0}{EI}\left(-\frac{x_3^3}{6} + \frac{x_3^4}{24\,L}\right) + \frac{q_0\,L}{6\,EI}x_3^2 \tag{43}$$

$$\phi^{(2)}(x_3) = \frac{q_0}{EI}\frac{x_3^4}{24\,L} - \frac{q_0\,L^3}{360\,EI} - \frac{q_0\,L}{12\,EI}x_3^2 \tag{44}$$

ed ancora i momenti:

$$M^{(1)}(x_3) = q_0\left(-\frac{x_3^2}{2} + \frac{x_3^3}{6\,L}\right) + \frac{q_0\,L}{3}x_3 \tag{45}$$

$$M^{(2)}(x_3) = q_0\frac{x_3^3}{6\,L} - \frac{q_0\,L}{6}x_3 \tag{46}$$

ed infine i tagli:

$$T^{(1)}(x_3) = q_0\,x_3\left(\frac{x_3}{2\,L} - 1\right) + \frac{q_0\,L}{3} \tag{47}$$

$$T^{(2)}(x_3) = q_0\frac{x_3^2}{2\,L} - \frac{q_0\,L}{6} \tag{48}$$

■ Il tracciamento dei diagrammi di tagli e momenti

Poiche' il carico e' distribuito con legge lineare, il taglio variera' con legge quadratica. Nel primo tratto si avra':

$$T_A = \frac{q_0\,L}{3} \tag{49}$$

$$T_B = -\frac{q_0\,L}{6} \tag{50}$$

Inoltre, esso avra' in B una tangenza orizzontale, in quanto il carico si annulla in B, e si annullera' all'ascissa $L - \frac{L}{\sqrt{3}}$.

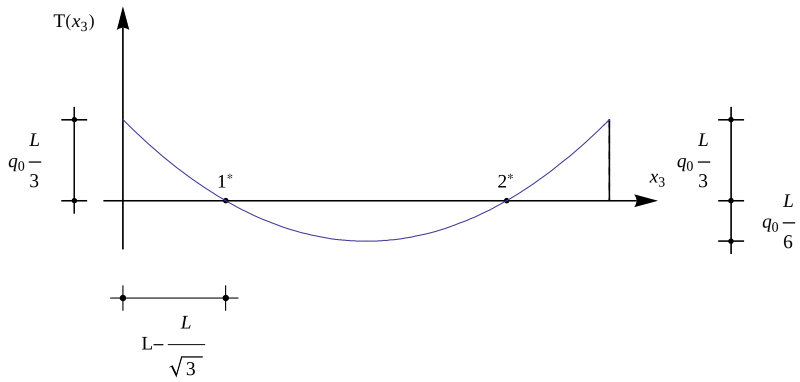
Nel secondo tratto, si avra' ancora:

$$T_B = -\frac{q_0\,L}{6} \tag{51}$$

$$T_C = \frac{q_0\,L}{3} \tag{52}$$

e l'ascissa di nullo sara' situata ad $\frac{L}{\sqrt{3}}$.

Il diagramma si presentera' come:



Per il tracciamento del diagramma del momento, si hanno le seguenti informazioni:

1. andamento cubico

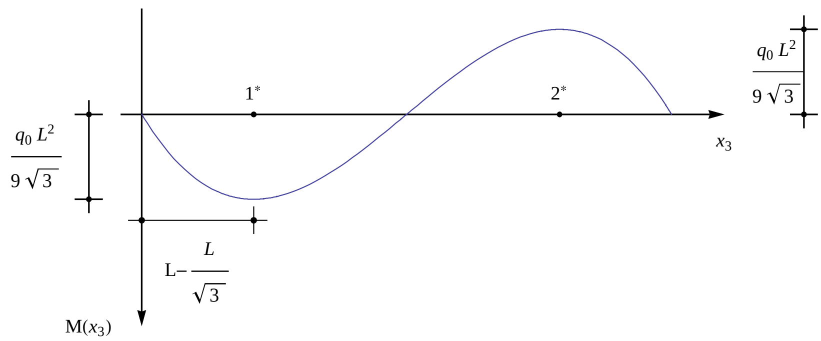
2. punti di nullo in B ed in C

3. punto di nullo anche in A (cfr. eq.45)

4. pendenza nulla nei due punti in cui si annulla il taglio

5. andamento crescente da A ad 1^*, decrescente da 1^* a 2^*, crescente da 2^* a C

Ne segue che il momento cresce da zero, in A, fino a raggiungere un massimo in 1^* (dove vale $q_0 \frac{L^2}{9\sqrt{3}}$), per poi decrescere fino ad annullarsi in B, e poi continuare a decrescere fino ad attingere un minimo in 2^*. Da 2^* ritorna a crescere, annullandosi in C.



Si noti anche che in B si annulla la curvatura del diagramma, come segnalato dall'annullarsi del carico.

- **Il tracciamento dei diagrammi di rotazione ed abbassamento**

Per tracciare il diagramma delle rotazioni, si hanno le seguenti informazioni:

1. l'andamento sara' quello di un polinomio di ordine quattro

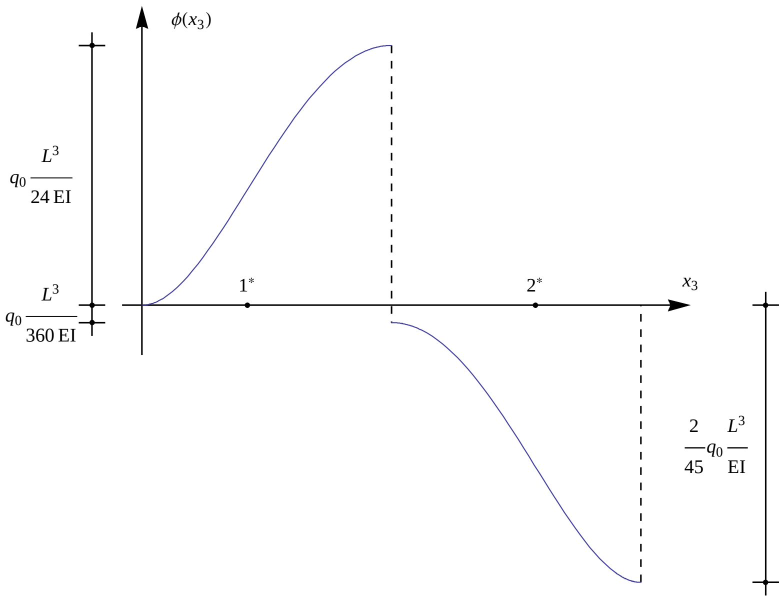
2. in A la rotazione e' nulla, e - poiche' e' nullo il mopmento - il diagramma dovra' avere una tangente orizzontale

3. la rotazione cresce da A a B, dove arriva con una tangente orizzontale

4. in 1^* si ha un cambio di curvatura

5. in B si ha una discontinuita' del diagramma, e la rotazione decresce da B a C, dove si avra' una tangente orizzontale

6. in 2^* si ha un cambio di curvatura



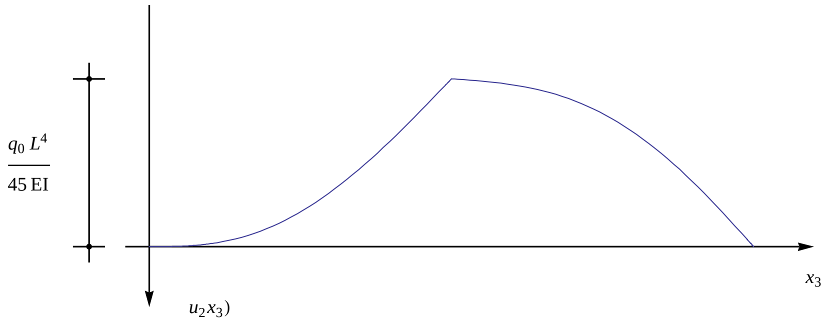
Infine, il diagramma degli spostamenti puo' essere disegnato a partire dalle seguenti informazioni:

1. nell'incastro il diagramma ha un punto di nullo, ed una tangente orizzontale

2. da A a B la funzione e' decrescente

3. in B il diagramma ha una discontinuita' angolare, poi decresce fino ad annullarsi in C

4. in B si ha un cambio di curvatura, come indicato dal diagramma del momento:



Figure