

Verifica n.43 - 12 crediti

Lunedì 3 febbraio 2014 - ore 9.30-10.30

Si consideri ora il telaio di Figura, sollecitato da una coppia agente in corrispondenza del nodo B. Si calcolino le reazioni vincolari, e si tracci il diagramma delle caratteristiche della sollecitazione interna.

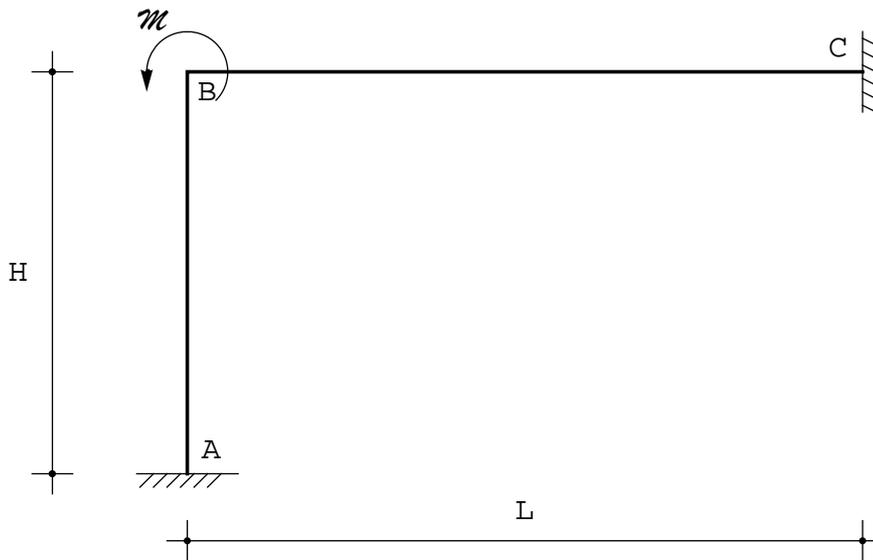


Figura 1

Primo metodo: la scrittura diretta delle equazioni di congruenza

Il telaio è tre volte iperstatico, ed una conveniente struttura isostatica equivalente è riportata in Figura 2, con le associate equazioni di congruenza:

$$\begin{aligned}\phi_A &= 0 \\ \phi_{BA} &= \phi_{BC} \\ \phi_C &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

e sfruttando la conoscenza dei coefficienti fondamentali per una trave appoggiata si ha:

$$\begin{aligned}-M_A \frac{H}{3EI} - M_{BA} \frac{H}{6EI} &= 0 \\ M_A \frac{H}{6EI} + M_{BA} \frac{H}{3EI} &= M_{BC} \frac{L}{3EI} + M_C \frac{L}{6EI} \\ -M_C \frac{L}{6EI} - M_{BC} \frac{L}{6EI} &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

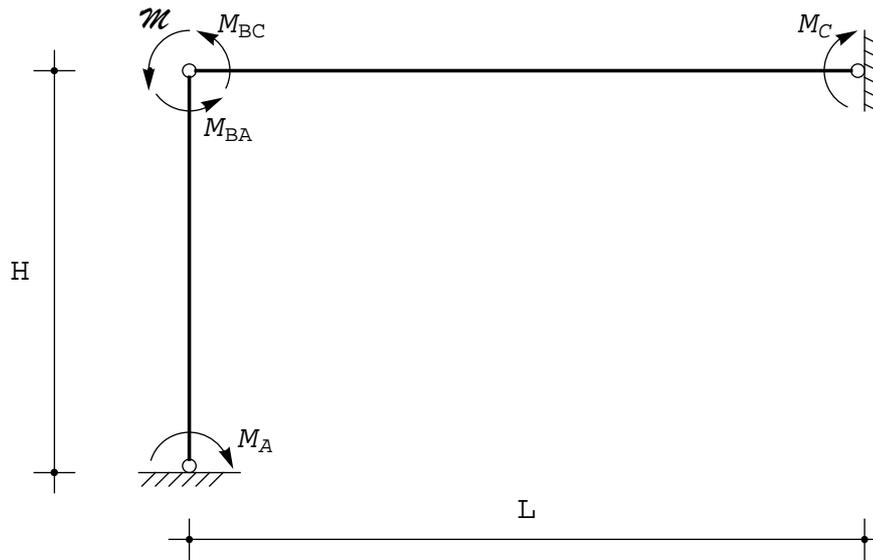


Figura 2 - La struttura isostatica equivalente

Per l'equilibrio del nodo B si potrà anche scrivere :

$$M_{BA} + M_{BC} + \mathcal{M} = 0 \quad (3)$$

Dalla prima e dalla terza delle (2) si ha subito:

$$M_A = -\frac{M_{BA}}{2} \quad (4)$$

$$M_C = -\frac{M_{BC}}{2}$$

e sostituendo nella seconda, si ha :

$$M_{BA} \frac{3H}{4} = M_{BC} \frac{3L}{4} \quad (5)$$

Infine, utilizzando la (3), si ha :

$$M_{BA} = -\frac{\mathcal{M}L}{H+L} \quad (6)$$

$$M_{BC} = -\frac{\mathcal{M}H}{H+L} \quad (7)$$

ed ancora :

$$M_A = \frac{\mathcal{M}L}{2(H+L)} \quad (8)$$

$$M_C = \frac{\mathcal{M}H}{2(H+L)}$$

Si ha quindi, infine :

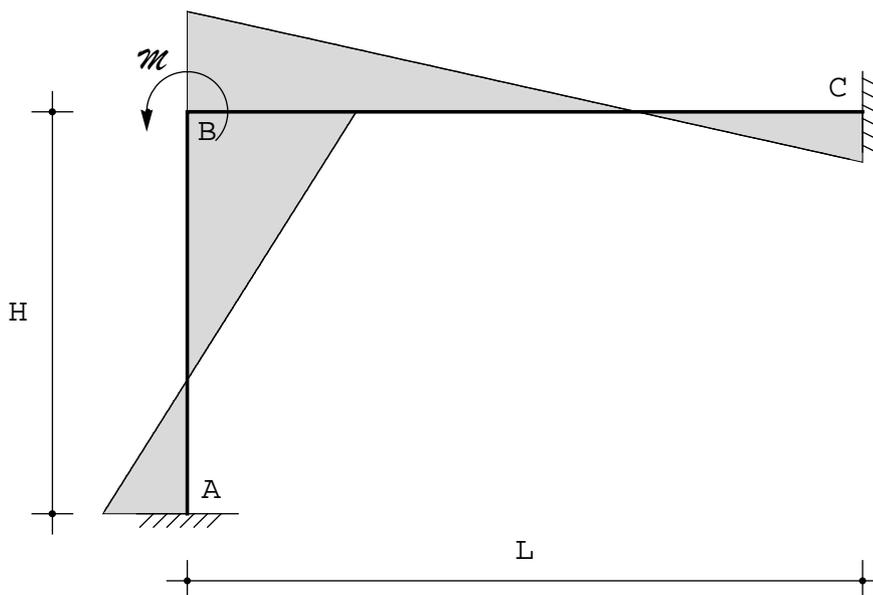


Figura 3 - Il diagramma finale del momento flettente

Secondo metodo: una seconda scelta di sistema isostatico equivalente

Si puo' anche assumere - come sistema isostatico equivalente - la mensola di Figura 4, con le associate equazioni di congruenza:

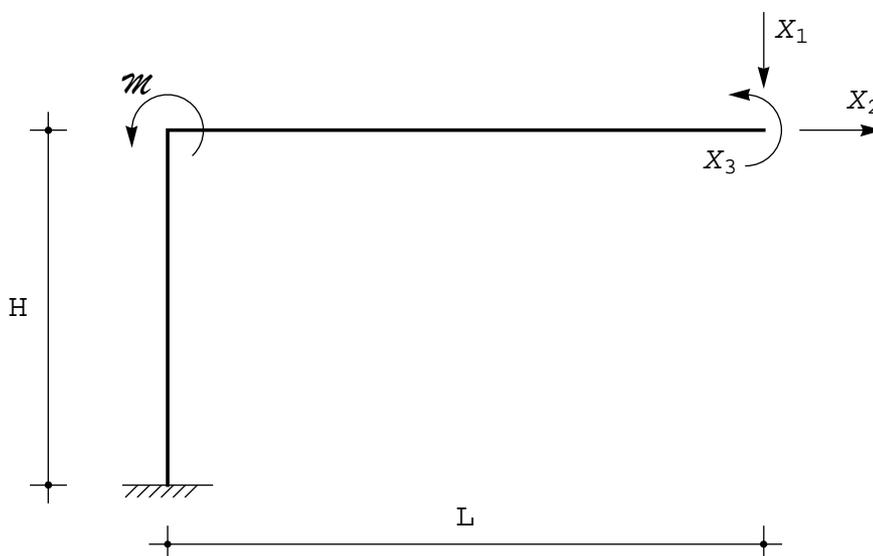


Figura 4 - La struttura isostatica equivalente a mensola

$$\begin{aligned}
 v_C &= 0 \\
 w_C &= 0 \\
 \phi_C &= 0
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti si potra' scrivere :

$$\begin{aligned} v_C^{(0)} + X_1 v_C^{(1)} + X_2 v_C^{(2)} + X_3 v_C^{(3)} &= 0 \\ w_C^{(0)} + X_1 w_C^{(1)} + X_2 w_C^{(2)} + X_3 w_C^{(3)} &= 0 \\ \phi_C^{(0)} + X_1 \phi_C^{(1)} + X_2 \phi_C^{(2)} + X_3 \phi_C^{(3)} &= 0 \end{aligned}$$

■ Il calcolo dei coefficienti di X_1

Lo schema di calcolo e' riportato in Figura 5, insieme al diagramma dei momenti (essenziale per l'utilizzo del metodo della composizione degli spostamenti).

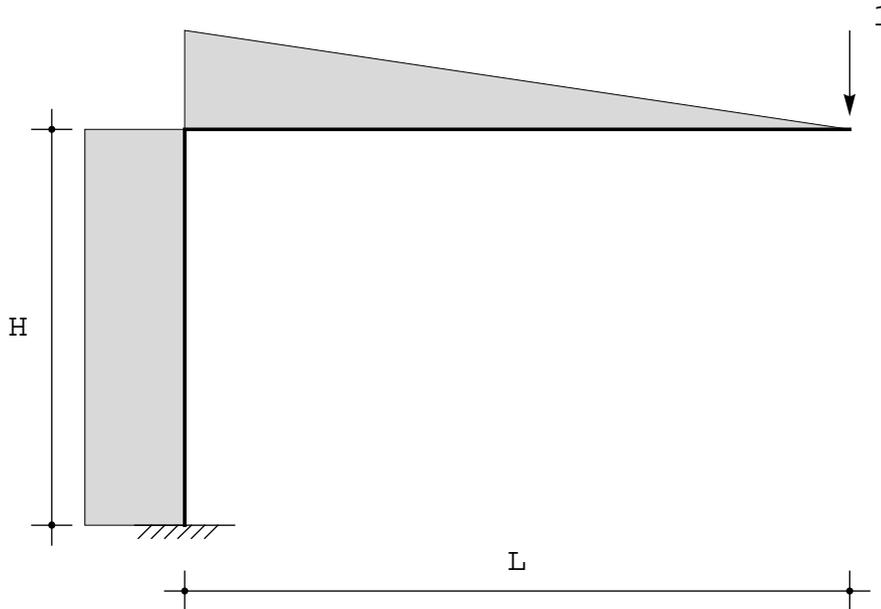


Figura 5 - Lo schema $M^{(1)}$ per il calcolo dei coefficienti di X_1

Si ha subito :

$$\begin{aligned} v_C^{(1)} &= L \frac{H}{EI} L + \frac{L^3}{3 EI} \\ w_C^{(1)} &= L \frac{H^2}{2 EI} \\ \phi_C^{(1)} &= -L \frac{H}{EI} - \frac{L^2}{2 EI} \end{aligned} \quad (11)$$

■ Il calcolo dei coefficienti di X_2

Lo schema di calcolo e' riportato in Figura 6, e da esso si evince:

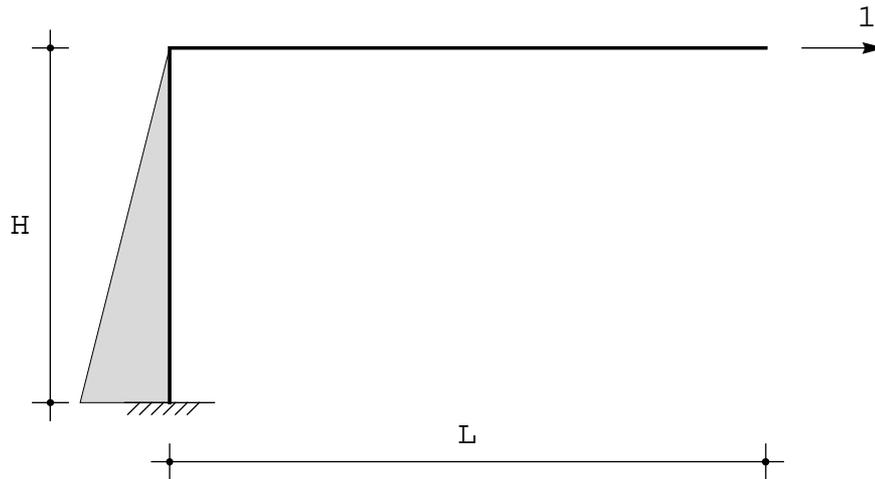


Figura 6 - Lo schema $M^{(2)}$ per il calcolo dei coefficienti di X_2

$$\begin{aligned} v_C^{(2)} &= \frac{H^2}{2 EI} L \\ w_C^{(2)} &= \frac{H^3}{3 EI} \\ \phi_C^{(2)} &= -\frac{H^2}{2 EI} \end{aligned} \quad (12)$$

■ Il calcolo dei coefficienti di X_3

Lo schema di calcolo è riportato in Figura 7, e da esso si evince:

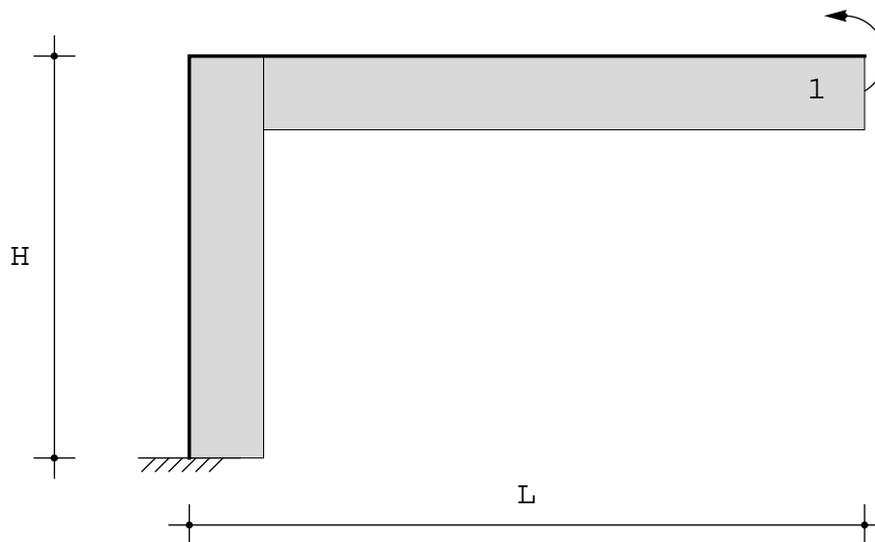


Figura 7 - Lo schema $M^{(3)}$ per il calcolo dei coefficienti di X_3

$$v_C^{(3)} = -\frac{H}{EI} L - \frac{L^2}{2 EI}$$

$$w_C^{(3)} = -\frac{H^2}{2EI}$$

$$\phi_C^{(3)} = \frac{H}{EI} + \frac{L}{EI}$$

■ Il calcolo dei termini noti

Lo schema di calcolo e' riportato in Figura 8, e da esso si evince:

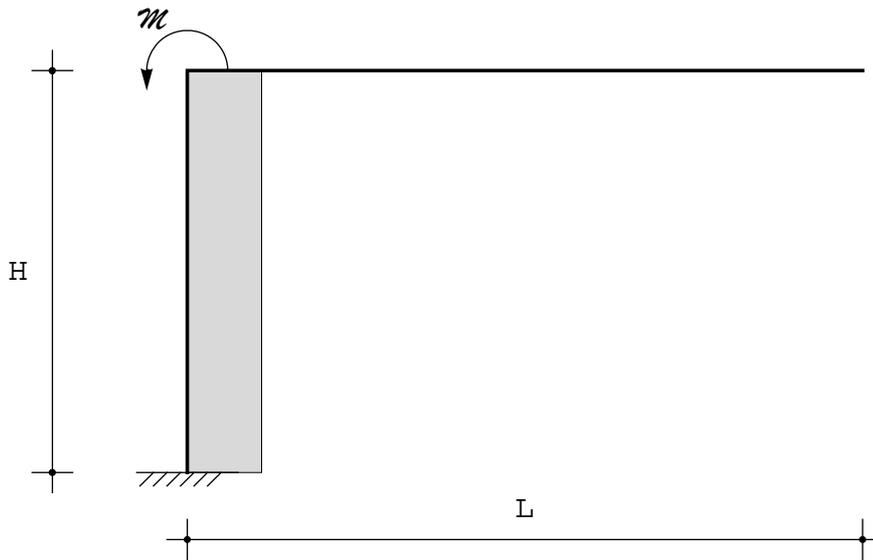


Figura 8 - Lo schema $M^{(0)}$ per il calcolo dei termini noti

$$v_C^{(0)} = -\frac{M H}{EI} L$$

$$w_C^{(0)} = -\frac{M H^2}{2EI} \tag{14}$$

$$\phi_C^{(0)} = \frac{M H}{EI}$$

Le tre equazioni di congruenza diventano quindi un sistema di tre equazioni:

$$\left(H L^2 + \frac{L^3}{3} \right) X_1 + \frac{H^2 L}{2} X_2 - \left(H L + \frac{L^2}{2} \right) X_3 = M H L$$

$$L X_1 + \frac{2 H}{3} X_2 - X_3 = M \tag{15}$$

$$\left(H L + \frac{L^2}{2} \right) X_1 + \frac{H^2}{2} X_2 - (H + L) X_3 = M H$$

con soluzione :

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \mathcal{M} \frac{3H}{2L(H+L)} \\
 X_2 &= \mathcal{M} \frac{3L}{2H(H+L)} \\
 X_3 &= \mathcal{M} \frac{H}{2(H+L)}
 \end{aligned} \tag{16}$$

Il tracciamento del momento, infine, e' immediato tenendo conto che il diagramma deve essere lineare, e che nei nodi esso vale:

$$\begin{aligned}
 M_C &= X_3 = \mathcal{M} \frac{H}{2(H+L)} \\
 M_{BC} &= -X_1 L + X_3 = -\mathcal{M} \frac{H}{H+L} \\
 M_{BA} &= -M_{BC} - \mathcal{M} = -\mathcal{M} \frac{L}{H+L} \\
 M_A &= -\mathcal{M} + X_1 L + X_2 H - X_3 = \mathcal{M} \left(\frac{L}{2(H+L)} \right)
 \end{aligned} \tag{17}$$

riottenendo gli stessi valori del primo approccio

Terzo metodo: il principio dei lavori virtuali

Siano ora M i momenti flettenti effettivi, $M^{(0)}$ i momenti flettenti generati dalla coppia applicata, $M^{(1)}$ i momenti flettenti generati da una reazione unitaria $X_1=1$, $M^{(2)}$ i momenti generati da una reazione unitaria $X_2=1$ ed $M^{(3)}$ i momenti generati da una reazione unitaria $X_3=1$.

Utilizzando il sistema di spostamenti effettivo, ed il sistema di forze virtuali in cui $X_1 = 1$, si puo' scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$\int_s M^{(1)} \frac{M}{EI} ds = 0 \tag{18}$$

Utilizzando invece il sistema di spostamenti effettivo, ed il sistema di forze virtuali in cui $X_2 = 1$, si puo' scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$\int_s M^{(2)} \frac{M}{EI} ds = 0 \tag{19}$$

ed infine, utilizzando il sistema di spostamenti effettivo, ed il sistema di forze virtuali in cui $X_3 = 1$, si puo' scrivere il principio dei lavori virtuali come:

$$\tag{20}$$

$$\int_s M^{(3)} \frac{M}{EI} ds = 0 \tag{21}$$

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il momento M puo' esprimersi come somma dei momenti generati dalla coppia \mathcal{M} , e dalle tre incognite X_i :

$$M = M^{(0)} + X_1 M^{(1)} + X_2 M^{(2)} + X_3 M^{(3)} \tag{22}$$

e quindi le (10-12) divengono :

$$\begin{aligned}
& \int_s M^{(1)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + X_1 \int_s M^{(1)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + \\
& X_2 \int_s M^{(1)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds + X_3 \int_s M^{(1)} \frac{M^{(3)}}{EI} ds = 0 \\
& \int_s M^{(2)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + X_1 \int_s M^{(2)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + \\
& X_2 \int_s M^{(2)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds + X_3 \int_s M^{(2)} \frac{M^{(3)}}{EI} ds = 0 \\
& \int_s M^{(3)} \frac{M^{(0)}}{EI} ds + X_1 \int_s M^{(3)} \frac{M^{(1)}}{EI} ds + \\
& X_2 \int_s M^{(3)} \frac{M^{(2)}}{EI} ds + X_3 \int_s M^{(3)} \frac{M^{(3)}}{EI} ds = 0
\end{aligned}$$

■ Il calcolo degli integrali

Il tracciamento dei diagrammi del momento non presenta alcuna difficoltà, ed è stato peraltro già riportato nelle Figure 2-5. Scegliendo le origini in A ed in B, rispettivamente, sul ritto si avrà'

$$\begin{aligned}
M^{(0)}(x_3) &= \mathcal{M} \\
M^{(1)}(x_3) &= -L \\
M^{(2)}(x_3) &= -H \left(1 - \frac{x_3}{H}\right) \\
M^{(3)}(x_3) &= 1
\end{aligned} \tag{24}$$

mentre sul traverso :

$$\begin{aligned}
M^{(0)}(x_3) &= 0 \\
M^{(1)}(x_3) &= -L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right) \\
M^{(2)}(x_3) &= 0 \\
M^{(3)}(x_3) &= 1
\end{aligned} \tag{25}$$

Sarà quindi, eliminando la rigidezza flessionale EI :

$$\int_s M^{(1)} M^{(0)} ds = - \int_0^H \mathcal{M} L dx_3 = -\mathcal{M} H L \tag{26}$$

$$\int_s M^{(2)} M^{(0)} ds = -\mathcal{M} H \int_0^H \left(1 - \frac{x_3}{H}\right) dx_3 = -\mathcal{M} \frac{H^2}{2} \tag{27}$$

$$\int_s M^{(3)} M^{(0)} ds = \mathcal{M} \int_0^H dx_3 = \mathcal{M} H$$

$$\int_s M^{(1)} M^{(1)} ds = L^2 \int_0^H dx_3 + L^2 \int_0^L \left(1 - \frac{x_3}{L}\right)^2 dx_3 = L^2 H + \frac{L^3}{3}$$

$$\int_s M^{(1)} M^{(2)} ds = H L \int_0^H \left(1 - \frac{x_3}{H}\right) dx_3 = H^2 \frac{L}{2} \tag{28}$$

$$\int_s M^{(1)} M^{(3)} ds = -L \int_0^H dx_3 - L \int_0^L \left(1 - \frac{x_3}{H}\right) dx_3 = -L H - \frac{L^2}{2}$$

$$\int_{\mathbf{s}} M^{(2)} M^{(2)} d\mathbf{s} = H^2 \int_0^H \left(1 - \frac{x_3}{H}\right)^2 dx_3 = \frac{H^3}{3} \quad (29)$$

$$\int_{\mathbf{s}} M^{(2)} M^{(3)} d\mathbf{s} = -H \int_0^H \left(1 - \frac{x_3}{H}\right) dx_3 = -\frac{H^2}{2} \quad (30)$$

$$\int_{\mathbf{s}} M^{(3)} M^{(3)} d\mathbf{s} = \int_0^H dx_3 + \int_0^L dx_3 = H + L$$

ritrovando le tre equazioni (15)

Quarto metodo: la scrittura delle equazioni della linea elastica

Trascurando le deformazioni da sforzo assiale, si possono definire le linee elastiche:

$$\begin{aligned} v_{BA}(x_3) &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ v_{BC}(x_3) &= c_0 + c_1 x_3 + c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (31)$$

imponendo poi le condizioni ai limiti:

In corrispondenza dell'incastro A si avranno le condizioni di congruenza dettate dai vincoli:

$$\begin{aligned} v_{BA}(H) &= 0 \\ \phi_{BA}(H) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Nel punto B si avranno tre condizioni di congruenza e una equazione di equilibrio:

$$\begin{aligned} v_{BA}(0) &= 0 \\ v_{BC}(0) &= 0 \\ \phi_{BA}(0) &= \phi_{BC}(0) \\ M_{BA}(0) + M_{BC}(0) + \mathcal{M} &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

In corrispondenza del punto C si avranno le condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned} v_{BC}(L) &= 0 \\ \phi_{BC}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Si hanno quindi le equazioni:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 H + a_2 H^2 + a_3 H^3 &= 0 \\ a_1 + 2 a_2 H + 3 a_3 H^2 &= 0 \\ a_0 &= 0 \\ c_0 &= 0 \\ a_1 &= c_1 \\ -2 EI a_2 - 2 EI c_2 + \mathcal{M} &= 0 \\ c_0 + c_1 L + c_2 L^2 + c_3 L^3 &= 0 \\ c_1 + 2 c_2 L + 3 c_3 L^2 &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

con soluzione:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= -\mathcal{M} \frac{H L}{4 EI (H + L)} \end{aligned}$$

$$a_2 = \mathcal{M} \frac{L}{2 EI H + 2 EI L}$$

$$a_3 = -\mathcal{M} \frac{L}{4 EI H^2 + 4 EI H L}$$

$$c_0 = 0$$

$$c_1 = -\mathcal{M} \frac{H L}{4 EI (H + L)}$$

$$c_2 = \mathcal{M} \frac{H}{2 EI H + 2 EI L}$$

$$c_3 = -\mathcal{M} \frac{H}{4 EI H L + 4 EI L^2}$$

Le due linee elastiche sono quindi:

$$v_{BA} = -\frac{L (H - x_3)^2 x_3}{4 EI H (H + L)} \mathcal{M} \quad (37)$$

$$v_{BC} = -\frac{H (L - x_3)^2 x_3}{4 EI L (H + L)} \mathcal{M} \quad (38)$$

Si ha quindi la deformata :

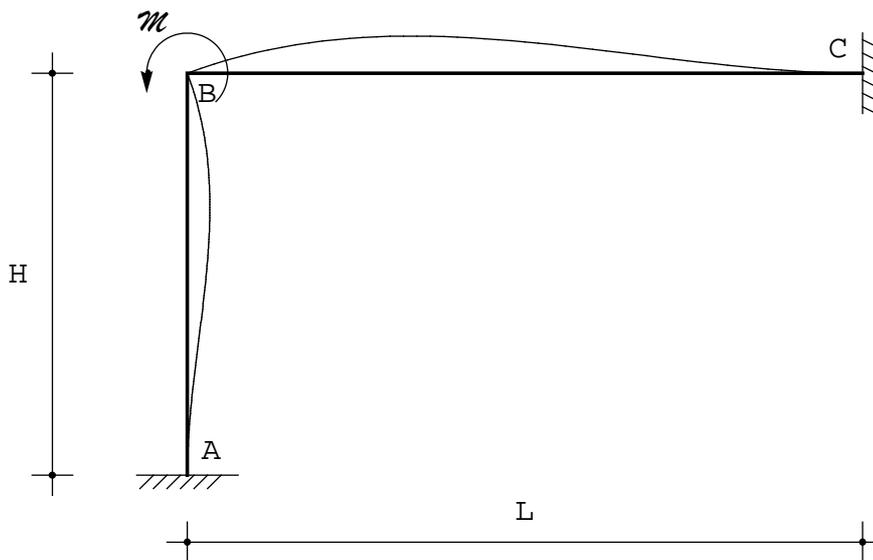


Figura 9 - La deformata

Il momento flettente varia linearmente, e vale:

$$M_{BA} = \frac{L (-2 H + 3 x_3)}{2 H (H + L)} \mathcal{M} \quad (39)$$

$$M_{BC} = \frac{H (-2 L + 3 x_3)}{2 L (H + L)} \mathcal{M} \quad (40)$$

I tagli sono quindi costanti a tratti, e si ottiene subito:

$$T_{BA} = \frac{3 L M}{2 H (H + L)}$$

$$T_{BC} = \frac{3 H M}{2 L (H + L)}$$

Si noti la correlazione tra la curvatura della deformata ed il diagramma dei momenti flettenti, ed in particolare la variazione di segno della curvatura in corrispondenza dei due punti di nullo del momento.

Quinto metodo: la scrittura delle equazioni della linea elastica II

Adottando due sistemi di riferimento con origine in A ed in C si ottiene una semplificazione delle linee elastiche. Infatti, la presenza degli incastri in A ed in C impone che sia:

$$\begin{aligned} v_{AB}(x_3) &= a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 \\ v_{CB}(x_3) &= c_2 x_3^2 + c_3 x_3^3 \end{aligned} \quad (42)$$

avendo già annullato i termini costanti e lineari. Restano solo da scrivere le equazioni di equilibrio e congruenza nel nodo B:

$$\begin{aligned} v_{AB}(H) &= 0 \rightarrow a_2 H^2 + a_3 H^3 = 0 \\ v_{CB}(L) &= 0 \rightarrow c_2 L^2 + c_3 L^3 = 0 \\ \phi_{AB}(H) &= \phi_{CB}(L) \rightarrow 2 a_2 H + 3 a_3 H^2 = 2 c_2 L + 3 c_3 L^2 \\ -M_{AB}(H) - M_{CB}(L) + \mathcal{M} &= 0 \rightarrow 2 EI a_2 + 2 EI c_2 + \mathcal{M} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

e semplificando:

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_3 H \\ c_2 &= -c_3 L \\ 2 a_2 H + 3 a_3 H^2 &= 2 c_2 L + 3 c_3 L^2 \\ a_2 + c_2 &= \frac{-\mathcal{M}}{2 EI} \end{aligned} \quad (44)$$

Le due linee elastiche sono quindi:

$$v_{AB} = \frac{L (H - x_3)^2 x_3}{4 EI H (H + L)} \mathcal{M} = -v_{BA} \quad (45)$$

$$v_{CB} = \frac{H (L - x_3)^2 x_3}{4 EI L (H + L)} \mathcal{M} = -v_{BC} \quad (46)$$

Si noti la discrepanza di segno tra le linee elastiche ottenute con il presente approccio, e quelle ottenute con l'approccio precedente. Essa dipende dal diverso orientamento degli assi x_2 .