

Verifica n.44 - 9 crediti

Lunedì 3 febbraio 2014 - ore 9.30-10.30

Si consideri la seguente matrice delle tensioni:

$$\begin{pmatrix} 0 & 200 & 0 \\ 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{pmatrix} \text{ Kg/cm}^2 \quad (1)$$

Si calcolino:

1. le tensioni principali
2. le corrispondenti direzioni principali di tensione
3. le massime e minime tensioni tangenziali
4. si traccino i cerchi di Mohr principali

1. Calcolo tensioni principali

Dovra' essere:

$$\text{Det} \begin{pmatrix} -\sigma & 200 & 0 \\ 200 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 200 - \sigma \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

ed utilizzando la regola di Laplace sull'ultima riga si ha subito:

$$(\sigma - 200) (\sigma^2 - 200^2) = 0 \quad (3)$$

da cui le tensioni principali :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -200 \text{ Kg/cm}^2 \\ \sigma_{2,3} &= 200 \text{ Kg/cm}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

2. Calcolo direzioni principali

La direzione principale corrispondente alla tensione σ_1 puo' calcolarsi senza alcuna difficolta':

$$\begin{pmatrix} -\sigma_1 & 200 & 0 \\ 200 & -\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 200 - \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

ossia:

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= 0 \\ n_3 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

e quindi $n_I = (1, -1, 0)$

In corrispondenza della radice doppia $\sigma_{2,3}$ si ha invece:

$$\begin{pmatrix} -\sigma_2 & 200 & 0 \\ 200 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 200 - \sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

ossia :

$$-n_1 + n_2 = 0 \quad (8)$$

Ne segue che la matrice $S - \sigma_2 I$ ha rango uno, e possono identificarsi le due direzioni principali:

$$\begin{aligned} n_{\text{II}} &= (1, 1, 0) \\ n_{\text{III}} &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (9)$$

3. Il tracciamento dei cerchi di Mohr

Esiste un solo cerchio di Mohr principale di diametro diverso da zero, con centro nell'origine e raggio 200 Kg/cm². Ne segue anche che le massime e minime tensioni tangenziali valgono ± 200 Kg/cm², e non sono accompagnate da tensioni normali.