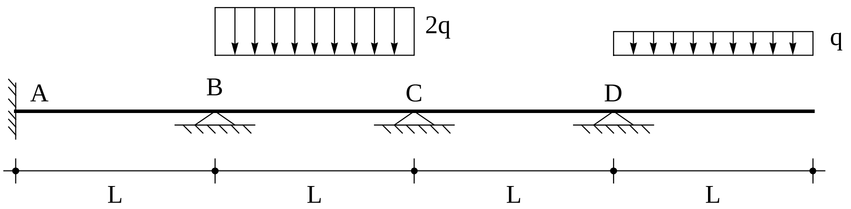
Verifica n.30

Giovedi' 2 Agosto 2012 - ore 9.30-11.30

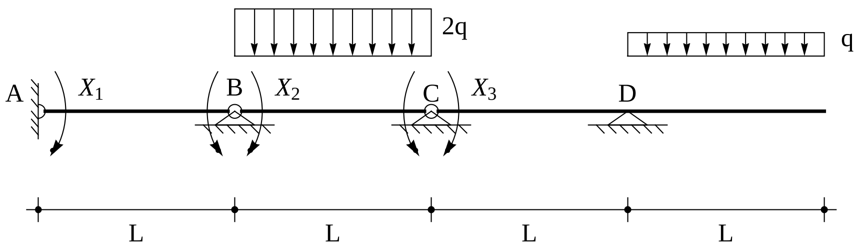
Si consideri la trave continua a tre luci con sbalzo di Figura, vincolata all'esterno con un incastro a sinistra e tre appoggi intermedi. La trave e' caricata da una stesa di carico di intensita' 2q sulla seconda campata, e da una stesa di carico di intensita' q sullo sbalzo.

Si calcolino le reazioni e si disegnino i diagrammi di tagli e momenti



Soluzione

La struttura e' tre volte iperstatica, e puo' convenientemente ridursi a tre travi semplicemente appoggiate inserendo tre cerniere in A,B e C, insieme ai tre valori incogniti dei rispettivi momenti flettenti X_1, X_2 ed X_3. La risultante struttura isostatica equivalente e' allora:



e su di essa occorre imporre il ripristino delle condizioni di congruenza:

$$\phi_A = 0 \tag{1}$$

$$\phi_{\text{Bsin}} = \phi_{\text{Bdes}} \tag{2}$$

$$\phi_{\text{Csin}} = \phi_{\text{Cdes}} \tag{3}$$

La scelta delle incognite iperstatiche - come gia' detto - riduce la trave continua ad un insieme di tre travi semplicemente appoggiate, su cui risulta immediato il calcolo delle rotaioni (schemi fondamentali di trave appoggiata soggetta a coppia all'estremo o a carico uniformemente distribuito). Si ha quindi, dall'esame della trave AB:

$$\phi_A = \frac{-X_1 L}{3\,\text{EI}} - \frac{X_2 L}{6\,\text{EI}} \tag{4}$$

$$\phi_{\text{Bsin}} = \frac{X_1 L}{6\,\text{EI}} + \frac{X_2 L}{3\,\text{EI}} \tag{5}$$

mentre sulla trave BC puo' leggersi:

$$\phi_{\text{Bdes}} = -\frac{X_2 L}{3\,\text{EI}} - \frac{X_3 L}{6\,\text{EI}} - 2\,q\,\frac{L^3}{24\,\text{EI}} \tag{6}$$

$$\phi_{\text{Csin}} = \frac{X_2 L}{6\,\text{EI}} + \frac{X_3 L}{3\,\text{EI}} + 2\,q\,\frac{L^3}{24\,\text{EI}} \tag{7}$$

ed infine, sulla trave CD si potra' ricavare:

$$\phi_{\text{Cdes}} = -\frac{X_3 L}{3\,\text{EI}} + q\,\frac{L^2}{2}\,\frac{L}{6\,\text{EI}} \tag{8}$$

Si noti che la stesa di carico agente sullo sbalzo e' stata ricondotta alla coppia applicata in D, e di intensita' - $qL^2/2$.

Le tre equazioni di congruenza, in definitiva, si scrivono:

$$\frac{-X_1}{3} - \frac{X_2}{6} = 0$$

$$\frac{X_1}{6} + \frac{X_2}{3} == -\frac{X_2}{3} - \frac{X_3}{6} - 2\,q\,\frac{L^2}{24}$$

$$\frac{X_2}{6} + \frac{X_3}{3} + 2\,q\,\frac{L^2}{24} == -\frac{X_3}{3} + q\,\frac{L^2}{2}\,\frac{1}{6}$$

con soluzione:

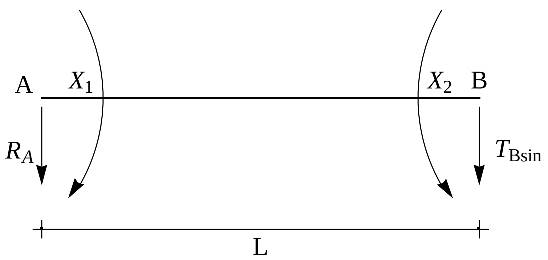
$$X_1 = q\,\frac{L^2}{13}$$

$$X_2 = -2\,q\,\frac{L^2}{13} \tag{9}$$

$$X_3 = q\,\frac{L^2}{26}$$

Il calcolo delle reazioni

Dalla scrittura delle equazioni di equilibrio per la trave AB, come puo' evincersi dalla Figura, si ha:



$$R_A + T_{\text{Bsin}} = 0 \tag{10}$$

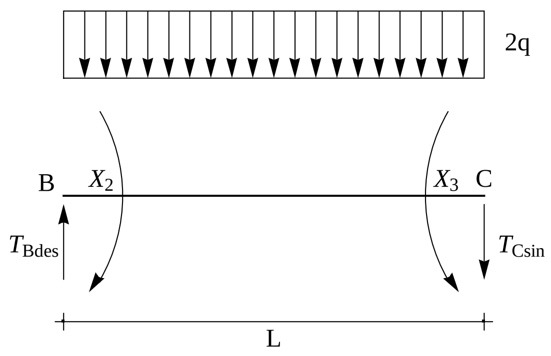
$$-X_1 + X_2 + R_A\,L = 0 \tag{11}$$

da cui subito:

$$R_A = \frac{3}{13}\,q\,L \tag{12}$$

$$T_{\text{Bsin}} = -\frac{3}{13}\,q\,L \tag{13}$$

Del tutto analogamente, esaminando la trave BC si ottiene:



$$-T_{Bdes} + T_{Csin} + 2\,q\,L = 0 \tag{14}$$

$$-X_2 + X_3 - T_{Bdes}\,L + 2\,q\,\frac{L^2}{2} = 0 \tag{15}$$

da cui subito:

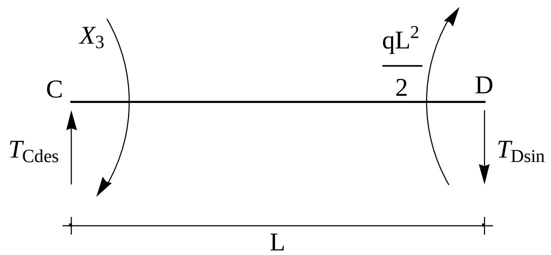
$$T_{Bdes} = \frac{31}{26}\,q\,L \tag{16}$$

$$T_{Csin} = -\frac{21}{26}\,q\,L \tag{17}$$

La reazione dell'appoggio in B sara' quindi pari a:

$$R_B = T_{Bsin} - T_{Bdes} = -\frac{37}{26}\,q\,L \tag{18}$$

Infine, sulla trave CD si potra' scrivere:



$$-T_{Cdes} + T_{Dsin} = 0 \tag{19}$$

$$-T_{Cdes}\,L - X_3 - \frac{qL^2}{2} = 0 \tag{20}$$

e quindi:

$$T_{Cdes} = -\frac{7}{13}\,q\,L \tag{21}$$

$$T_{Dsin} = -\frac{7}{13}\,q\,L \tag{22}$$

La reazione dell'appoggio in C sara' quindi pari a:

$$R_C = T_{Csin} - T_{Cdes} = -\frac{7}{26}\,q\,L \tag{23}$$

Infine, poiche' $T_{Ddes} =$ qL, si ha anche la reazione in D:

$$R_D = T_{Dsin} - T_{Ddes} = -\frac{20}{13}\,q\,L \tag{24}$$

I diagrammi sono banali, e vengono lasciati al lettore.

Appendice