da intendersi valida per ogni funzione vettoriale $\boldsymbol{v}^*(P_*) = \boldsymbol{v}(P)$ che, oltre rendere soddisfatta l'uguaglianza

$$(26)' \qquad \sum_{rm} \mathcal{D}_{rm} v^*_{rm} = 0 \ \ldots \ c_*,$$

equivalente a

$$\mathrm{div}_P \, \boldsymbol{v}(P) = 0 \ \ldots \ c,$$

si uniformi su $\sigma_v - \Delta\sigma$ *ai vincoli attuali*: restando poi localmente arbitraria, anche in verso, tanto su σ_l, *quanto su* $\Delta\sigma$. Assegnata la sollecitazione attiva, quando si sia riusciti a determinare le tre $u_r(P_*)$ — e quindi $\Delta\sigma$ — in modo da rendere completamente soddisfatta la relazione simbolica [insieme alla (22)] si potrà ulteriormente ricorrere alle (23) per ricavarne, con sole quadrature, le reazioni vincolari, dopodichè resteranno univocamente determinate le K_{rm}, da

$$K_{rm} = -S_{rm} + \tilde{\omega}\, \mathcal{D}_{rm}$$

e successivamente le X_{rs}, da

$$(27) \quad X_{rs} = -\sum_m S_{rm}\, x_{sm} + \tilde{\omega}\, \delta_{rs} = -(S_{rs} + \sum_m S_{rm}\, u_{sm}) + \tilde{\omega}\, \delta_{rs}.$$

III. Statica semilinearizzata

1. Piccole trasformazioni.

Questa conferenza riguarderà, sempre nell'ambito della Statica isoterma, solo le piccole trasformazioni degli S_e.

Sia dP_* un qualunque elemento lineare di c_* e dP il corrispondente elemento di c: insieme sia

$$\delta_a = \frac{|dP| - |dP_*|}{|dP_*|}$$

l'allungamento unitario di dP e θ la misura in radianti della sua deviazione $\widehat{dP_*\, dP}$. Dicendo *piccole trasformazioni* voglio proprio asserire la possibilità di trascurare, rispetto all'unità, tanto ogni δ_a, *quanto ogni* θ.

Questa approssimazione, elemento essenziale delle teorie classiche, equivale a convenire di trattare come quantità del primo ordine *tutte nove le u'*: è ciò che basta, *ma pure occorre*, perchè le caratteristiche di deformazione complete ε_j possano confondersi con le caratteristiche di deformazione linearizzate η_j, quantità del primo ordine.

Poniamo

$$Q_{rs} = \frac{\partial Q[\eta]}{\partial u_{rs}} = \frac{\partial Q[\eta]}{\partial \eta_j} \equiv \sum_1^6{}_q M_{iq}\,\eta_q + 2p_*\,\eta_{rs}.$$

Nella teoria delle piccole trasformazioni, accanto a

$$\mathcal{D} - 1 = \sum_r \eta_r\,, \qquad \mathcal{D}_{rs} = \delta_{rs}\,,$$

si può sistematicamente assumere

$$S = Q[\eta] - p_*\,(\sum_r \eta_r)^2,$$

in modo che il vincolo di incomprimibilità resta espresso da

$$(1) \qquad 0 = \sum_r \eta_r \equiv \operatorname{div}_{P_*} s \;\ldots\; c_*\,,$$

e, subordinatamente ad esso, le (II, 23) si traducono in

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y_r} - \displaystyle\sum_s \frac{\partial Q_{rs}}{\partial y_s} = F_r^*(P_*) \;\ldots\; c_*\,, \\[2ex] \tilde{\omega}\,\nu_r^* - \displaystyle\sum_s Q_{rs}\,\nu_s^* = \begin{cases} f_r^*(Q_*) \;.\;.\;.\; \sigma_1^*, \\ 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; \varDelta\sigma_*\,, \\ \varPhi_r^* \;.\;.\;.\;.\;.\; a\,; \end{cases} \end{cases}$$

mentre le (II, 27) danno luogo alle

$$(3) \qquad X_{rs} = -\,Q_{rs} + \tilde{\omega}\,\delta_{rs} \equiv \tilde{\omega}\,\delta_{rs} - \sum_q M_{jq}\,\eta_q - 2p_*\,\eta_{rs}\,,$$

aderenti alla legge di HOOKE.

Rimane, s'intende, quale proprietà principale di un S_v, la

$$(Q) \qquad \int_{c_*} Q\,[\eta^{(w)}]\,dc_* > 0\,,$$

da intendersi valida per ogni $w(P_*)$ — vettore solenoidale in c_* — pel quale le

$$\eta_r^{(w)} = w_{rr}\,, \qquad \eta_{3+t}^{(w)} = w_{rs} + w_{sr}$$

non risultino tutte identicamente nulle [caso di uno spostamento rigido infinitesimo]: e se S_e è omogeneo in c_*, come sua proprietà principale si viene ad avere più restrittivamente quella che gli M_{jq} e p_*, allora costanti, siano tali da far risultare

$$Q[\xi] \equiv \frac{1}{2}\sum_{jq} M_{jq}\,\xi_j\,\xi_q + p_* \left\{ \sum_r \xi_r^2 + \frac{1}{2}\sum_r \xi_{3+r}^2 \right\} > 0$$

almeno per ogni sestupla di valori delle ξ che verifichi l'uguaglianza $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$.

Comunque la specifica natura di S_e resta completamente caratterizzata dagli $M_{jq}(P_*)$ e $p_*(P_*)$. Anzi, all'atto pratico, nella Q il numero dei parametri essenziali riesce di regola assai minore di ventuno, e addirittura si riduce a *uno* quando il nostro S_e incomprimibile è *isotropo in* c_*, potendosi allora semplicemente assumere [14]

$$Q[\xi] = \frac{\mathrm{E}}{3}\left\{ \sum_r \xi_r^2 + \frac{1}{2}\sum_r \xi_{3+r}^2 \right\}, \tag{4}$$

con E costante, positiva, se il solido è anche omogeneo in c_*.

2. Relazioni sintetiche.

Continuando a indicare con $w(P_*)$ un qualunque vettore solenoidale in c_*,

$$\mathrm{div}_{P_*}\, w = 0 \quad \ldots \; c_*,$$

le (2) possono esattamente sintetizzarsi [15] nell'uguaglianza

$$-\int_{c_*} dc_* \cdot \sum_{rs} Q_{rs} w_{rs} + \int_{c_*} F(P_*)\, dc_* \times w +$$
$$+ \int_{\sigma_1^*} f^*\, d\sigma^* \times w + \int_{a} \Phi^*\, d\sigma^* \times w = 0\,,$$

[14] V. loc. cit. (4), Mem. 3, cap. II, n. 4; ma della (4) riparlerò anche in una delle prossime conferenze.

[15] Cfr. loc. cit. (4), Mem. 3a, cap. I, n. 2.

purchè la si intenda valida per ogni scelta di $\boldsymbol{w}(P_*)$. Anzi tale uguaglianza non differisce da

$$(W) \qquad -\int_{c_*} dc_* \cdot \sum_j Q_j[\eta]\, \eta_j^{(w)} + \int_{c_*} \boldsymbol{F}(P_*)\, dc_* \times \boldsymbol{w} + \\ + \int_{\sigma_l^*} \boldsymbol{f}^*\, d\sigma_l^* \times \boldsymbol{w} + \int_a \boldsymbol{\Phi}^*\, d\sigma^* \times \boldsymbol{w} = 0,$$

se anche qui si pone

$$Q_j[\eta] = \frac{\partial Q[\eta]}{\partial \eta_j} = Q_{rs}.$$

Proprio questa è la forma che ora va data alla (II, 25), perchè per le piccole trasformazioni la (II, 25)′ va ridotta a

$$\sum_r z_{rr}^* = 0 \;\ldots\; c_*,$$

col sostanziale vantaggio di non avere più a che fare con una restrizione dipendente dall'incognita c.

Altrettanto va detto riguardo allo spostamento effettivo $\boldsymbol{s}(P_*)$. Come è naturale, per piccole trasformazioni esso viene a rientrare fra gli spostamenti virtuali, $\boldsymbol{b}(P_*)$, *a partire dalla configurazione di riferimento*, caratterizzati dalla duplice condizione di essere solenoidali in c_*,

$$\operatorname{div}_{P_*} \boldsymbol{b}(P_*) = 0 \;\ldots\; c_*,$$

e di uniformarsi ai vincoli in superficie su tutta una ben determinata regione di σ^*, *l'intera* σ_v^*. Infatti, in aggiunta alla (1), si ha che il rispetto dei vincoli in superficie viene in ultima analisi a imporre a $\boldsymbol{s}$ le stesse restrizioni, proprio le altre restrizioni cui esattamente va soggetto un $\boldsymbol{b}(P_*)$, ad esempio

$$s_{\nu^*} \geq 0$$

se si tratta di un semplice appoggio.

Invece, sempre per piccole trasformazioni, nell'insieme dei $\boldsymbol{v}^*(P_*)$ [spostamenti virtuali a partire dalla configurazione *attuale*] resta traccia del divario tra c e c_*; ma solo attraverso l'incognita $\Delta\sigma_*$, o, se si vuole, attraverso la a, l'area complementare di σ_v^*. Accennerò con $\boldsymbol{v}^{(a)}(P_*)$ un vettore solenoidale in c_*,

$$\operatorname{div}_{P_*} \boldsymbol{v}^{(a)} = 0 \ \ldots \ c_*,$$

non appena lo si intenda obbligato a uniformarsi ai vincoli in superficie *sulla* a: lasciandolo così localmente arbitrario [anche in verso] tanto sulla superficie libera, *quanto sull'area di distacco.* Nel passaggio da trasformazioni finite a piccole trasformazioni, se non si esclude a priori la possibilità di un distacco, l'insieme dei $\boldsymbol{v}^*(P_*)$ si riduce proprio all'insieme dei $\boldsymbol{v}^{(a)}$, *non a quello dei soli* $\boldsymbol{b}$.

Dirò subito come convenga pensare anche a un altro insieme di spostamenti ausiliari, meno vasto dei $\boldsymbol{v}^{(a)}$, e che anzi neppure comprende tutti i $\boldsymbol{b}$. Precisamente, sia δ una parte di $\Delta\sigma_*$, comunque ristretta e *totalmente interna a* $\Delta\sigma_*$; A tutta l'area di σ_v^* complementare di δ, cioè l'insieme di a e $a' \equiv \Delta\sigma_* - \delta$. Converrà introdurre una notazione espressiva, $\boldsymbol{v}^{(A)}$, per indicare uno qualunque dei $\boldsymbol{v}^{(a)}$ che si annullano sull'intera a'.

Con le notazioni ora introdotte la (I, 16) può tradursi in

$$\Phi^* \times \boldsymbol{v}^{(a)} \geq 0 \ \ldots \ \sigma_v^* \tag{5}$$

e la (W) ha quale necessaria conseguenza, con ovvio significato dei simboli $\eta_j^{(a)}$, la *relazione simbolica ridotta*

$$(V)_a \qquad -\int_{c_*} dc_* \cdot \sum_j Q_j[\eta]\,\eta_j^{(a)} + \int_{c_*} \boldsymbol{F}^*(P_*)\,dc_* \times \boldsymbol{v}^{(a)} + \int_{\sigma_l^*} \boldsymbol{f}^*(Q_*)\,d\sigma_l^* \times \boldsymbol{v}^{(a)} \leq 0,$$

per ogni $\boldsymbol{v}^{(a)}$. E qui pure sussiste [16] la proprietà inversa: il verificarsi della $(V)_a$ per ogni $\boldsymbol{v}^{(a)}$ è pure sufficiente per l'esistenza di uno scalare $\tilde{\omega}(P_*)$ atto a rendere soddisfatte tutte le (2) e (5). Anzi, riprendendo la dimostrazione di quanto ora ho asserito, si riconosce ben facilmente che le (2) e (5) possono pure sintetizzarsi nella condizione, apparentemente meno restrittiva,

$$(V)_A \qquad -\int_{c_*} dc_* \cdot \sum_j Q_j[\eta]\,\eta_j^{(A)} + \int_{c_*} \boldsymbol{F}^*(P_*)\,dc_* \times \boldsymbol{v}^{(A)} + \int_{\sigma_l^*} \boldsymbol{f}^*(Q_*)\,d\sigma_l^* \times \boldsymbol{v}^{(A)} \leq 0,$$

(16) Cfr. ancora loc. cit. (6).

in corrispondenza ai soli $v^{(A)}$. È questa una circostanza che tra non molto risulterà assai favorevole all'inversione del teorema della minima energia potenziale.

Comunque, già la $(V)_a$ è una relazione *pura*, dove il furtivo intervento dell'incognita a è bilanciato dall'essere l'insieme dei $v^{(a)}$ molto più vasto di quello dei b. Non è però detto che la relazione simbolica ridotta debba dare, per piccole trasformazioni, tutto ciò che per esse può ricavarsi dalle relazioni generali fissate nella scorsa conferenza. Riparlerò di questo più tardi.

OSSERVAZIONE.

Accenno con $\mathcal{R}$ il *solido irrigidito* nella configurazione c_*, cioè il sistema rigido cui si riduce S_e quando, senza variare i vincoli in superficie, per ogni parte di S_e si identifichi la forma attuale con la forma in c_*. Chiamo $\mathcal{S}^*$ l'insieme delle forze attive *riportate* allo stato di riferimento,

$$\mathcal{S}^* \equiv (P_*, \boldsymbol{F}^*(P_*)\, dc_*) + (Q_*, \boldsymbol{f}^*(Q_*)\, d\sigma_l^*),$$

mentre in seguito adoprerò il semplice $\mathcal{S}$ per indicare proprio la sollecitazione attiva attuale,

$$\mathcal{S} \equiv (P, \boldsymbol{F}^*(P_*)\, dc_*) + (Q, \boldsymbol{f}^*(Q_*)\, d\sigma_l^*).$$

Certo le $\boldsymbol{F}^*(P_*)$ e $\boldsymbol{f}^*(Q_*)$, per essere effettivamente compatibili con uno stato di quiete, devono sottostare a qualche restrizione globale, specificata volta per volta dal tipo dei vincoli in superficie; ma insieme conviene fin d'ora rilevare che l'ipotesi di piccola trasformazione si riflette, attraverso la $(V)_a$, in una tacita restrizione per la scelta di c_*. Lo stato di riferimento [stato di equilibrio spontaneo per il solido elastico] deve dare una posizione di equilibrio di $\mathcal{R}$ rispetto a $\mathcal{S}^*$, anche se i vincoli in superficie consentono spostamenti rigidi. Invero, accenniamo con $\boldsymbol{b}'(P_*)$, come farò anche in seguito, un qualunque spostamento virtuale *rigido* a partire da c_*. Il solo fatto di potere specializzare $\boldsymbol{v}^{(a)}$ in $\boldsymbol{b}'$ [specializzazione che riduce a zero tutte le $\eta_j^{(a)}$] permette di trarre dalla $(V)_a$,

$$(R) \qquad \int_{c_*} \boldsymbol{F}^*(P_*)\, dc_* \times \boldsymbol{b}'(P_*) + \int_{\sigma_l^*} \boldsymbol{f}^*(Q_*)\, d\sigma_l^* \times \boldsymbol{b}'(Q_*) \leq 0,$$

c. d. d.

3. Problemi d'integrazione non lineari con ambigue condizioni al contorno.

Nella seconda conferenza sono arrivato a indicare le relazioni generali della Statica isoterma e a sintetizzarle in una relazione simbolica che in sostanza corrisponde a una conveniente specificazione del principio dei lavori virtuali. Estremamente difficili, inevitabilmente complesse, sono le questioni di esistenza e unicità, di effettiva integrazione, che così vengono a prospettarsi. Si resta anzi di fronte a problemi analitici di tipo tutt'altro che banale anche quando, come oggi mi sono proposto di fare, ci si rivolge a piccole trasformazioni, senza escludere vincoli unilaterali. Ciò che mi appresto a dire ha carattere generale, ma per brevità, e anche per meglio far risaltare taluni concetti, direttamente mi riferirò al solo caso di un solido incomprimibile appoggiato a un piano π: diciamo pure, a un solido appoggiato al piano $y_3 = 0$, dalla parte delle $y_3 > 0$.

Si avrà dunque l'identità del versore di y_3 col versore $\boldsymbol{n}$ della normale esterna all'appoggio e insieme

$$\Phi_1^* = \Phi_2^* = 0\,, \qquad \Phi_3^* \geq 0 \ \ldots \ \sigma_v^*\,,$$

mentre le funzioni vettoriali $\boldsymbol{b}(P_*)$, $\boldsymbol{v}^{(a)}(P_*)$, $\boldsymbol{v}^{(A)}(P_*)$ — tutte solenoidali in c_* — resteranno definite da

$$b_3 \geq 0 \ \ldots \ \sigma_v^*$$

e

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} v_3^{(a)} \geq 0 \ \ldots \ a \\ v_3^{(A)} \geq 0 \ \ldots \ a\,, \quad v_3^{(A)} = 0 \ \ldots \ a'. \end{cases}$$

Ovvia restrizione aggiuntiva sarà quella che l'appoggio effettivamente intervenga in uno stato di quiete:

$$\text{(7)} \qquad \int_{\sigma_v^*} \Phi_3^*\, d\sigma_v^* \equiv \int_a \Phi_3^*\, d\sigma_v^* > 0\,.$$

In altri termini, intenderò non nullo il risultante $\boldsymbol{R}$ della sollecitazione attiva, cioè [cfr. (R)] $\mathcal{S}^*$ riducibile a un'unica forza, la $\boldsymbol{R}$, orientata come $-\boldsymbol{n}$, applicata a un punto $\boldsymbol{K}^*$ di π non esterno a una qualunque linea chiusa convessa che circondi l'intera σ_v^*: il *centro di pressione* di $\mathcal{S}^*$.

Anche questa ulteriore restrizione lascia indifferenti le equazioni indefinite e le condizioni al contorno relative alla superficie libera. Invece, sull'intera σ_v^*, alla restrizione principale evidentemente si abbinano le notevoli semplificazioni

$$\tilde{\omega}\, \nu_r^* - \sum_s Q_{rs}\, \nu_s^* = \tilde{\omega}\, \delta_{r3} - Q_{r3}$$

e

$$\Phi_1^* = -Q_{13}\,, \quad \Phi_2^* = -Q_{23}\,, \quad \Phi_3^* = \tilde{\omega} - Q_{33}\,,$$

ciò che intanto riduce le condizioni al contorno su σ_v^* a

(8) $$Q_{13} = Q_{23} = 0 \;\ldots\; \sigma_v^*$$

e

$$\tilde{\omega} - Q_{33} \geq 0 \;\ldots\; a\,, \qquad \tilde{\omega} - Q_{33} = 0 \;\ldots\; \Delta\sigma_*\,.$$

D'altra parte i punti di a e i punti interni a $\Delta\sigma_*$ sono nettamente differenziati dal fatto che per i primi è $u_3 = 0$, per i secondi $u_3 > 0$. In conclusione le condizioni al contorno relative a σ_v^* possono esprimersi dicendo che, in aggiunta alle (8), punto per punto va intesa valida *l'una o l'altra* delle due coppie di restrizioni

(A) $$u_3 = 0\,, \qquad \Phi_3^* \equiv \tilde{\omega} - Q_{33} \geq 0$$

e

(A)′ $$u_3 > 0\,, \qquad \Phi_3^* \equiv \tilde{\omega} - Q_{33} = 0:$$

senza che venga affatto prestabilito quale delle due dovrà effettivamente sussistere.

Ci si trova così in presenza a problemi d'integrazione non lineari con *ambigue* condizioni al contorno. Questa è la denominazione che vorrei proporre ([17]) per indicare che su σ_v^* s'impone solo la validità dell'una o dell'altra delle due coppie di restrizioni (A) e (A)′, tra loro contradittorie.

Non pare che gli Analisti abbiano mai specificamente studiato questo tipo di problemi, che pure non sono affatto di natura artificiale. Mi sembra anzi evidente che un approfondito esame di tali problemi potrebbe anche avviare a conclusioni di spiccato interesse per la Tecnica e su questo cercai di richiamare l'attenzione ([18]) fin dal 1932. Certo il non volere escludere un'area di

([17]) Dopo un'attenta consultazione di lessici italiani, latini, francesi.

([18]) *Sopra alcune questioni di elastostatica* [Atti della XXI Riunione della S. I. P. S., vol. 2°] pp. 7-8.

distacco, a priori incognita — se insieme si rinunzia a più o meno discutibili procedimenti per una sua preventiva determinazione — complica terribilmente le cose; sia per quanto può riguardare questioni di esistenza e unicità, sia per l'integrazione effettiva. Ciò che dirò nel resto di questa conferenza non ha, naturalmente, altra pretesa che quella di dare forma espressiva al poco da me fatto, nella speranza di invogliare a far di meglio qualche giovane Analista.

4. Teorema della minima energia potenziale, teorema di unicità.

Sarà bene riassumere le *relazioni principali* del nostro problema d'integrazione con ambigue condizioni al contorno, cioè le quattro equazioni indefinite

$$\operatorname{div}_{P_*} \boldsymbol{s} = 0\,, \qquad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y_r} - \sum_s \frac{\partial Q_{rs}}{\partial y_s} = F_r^*(P_*)\,,$$

le condizioni al contorno relative alla superficie libera,

$$\tilde{\omega}\nu_r^* - \sum_s Q_{rs}\nu_s^* = f_r^*\,,$$

e le coppie di restrizioni su σ_v^*,

$$(A) \qquad u_3 = 0\,, \qquad \Phi_3^* \equiv \tilde{\omega} - Q_{33} \geq 0$$

ovvero

$$(A)' \qquad u_3 > 0\,, \qquad \Phi_3^* \equiv \tilde{\omega} - Q_{33} = 0\,.$$

Sia poi $\boldsymbol{b}''$ un $\boldsymbol{b}'$ *reversibile*:

$$b_3'' = 0 \ldots \sigma_v^*\,.$$

L'aggiunta a $\boldsymbol{s}$ di un qualunque $\boldsymbol{b}'$ certo non modifica le η_j e Q_{rs}, in tutto c_*: ma se si tratta di un $\boldsymbol{b}''$ una tale aggiunta lascia pure invariata la u_3 sull'intera σ_v^*. Appare dunque evidente che le relazioni principali non possono individuare $\boldsymbol{s}$ altro che a meno dell'aggiunta di un qualunque $\boldsymbol{b}''$. Viceversa *una tale aggiunta è l'unica indeterminazione consentita a* $\boldsymbol{s}$ dalle relazioni principali, che quindi [cfr. (3)] *non possono lasciare alcuna indeterminazione nella* $\tilde{\omega}$ *e neppure nelle* X_{rs}.

Il *teorema di unicità* ora enunciato è immediata conseguenza di quello che propriamente mi appresto a dimostrare, il *teorema della minima energia potenziale.* Pongo

$$\mathrm{E}\,[\boldsymbol{b}] = \int_{c_*} Q\,[\eta^{(b)}]\,dc_* - \int_{c_*} \boldsymbol{F}^*(P_*)\,dc_* \times \boldsymbol{b}\,(P_*) - \int_{\sigma_l^*} \boldsymbol{f}^*(Q_*)\,d\sigma_l^* \times \boldsymbol{b}\,(Q_*),$$

cioè indico con $\mathrm{E}\,[\boldsymbol{b}]$ la variazione di energia potenziale inerente a un qualunque $\boldsymbol{b}\,(P_*)$: *basta che* $\boldsymbol{s}\,(P_*)$ *dia una soluzione delle relazioni principali perchè necessariamente risulti*

$$\mathrm{E}\,[\boldsymbol{s}] \leq \mathrm{E}\,[\boldsymbol{b}]\,, \tag{9}$$

col segno $=$ *solo se* $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{s}$ *è un* $\boldsymbol{b}''$.

Invero, la differenza

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{s} \equiv \overline{\boldsymbol{w}}$$

non può non risultare solenoidale in c_* [tali essendo $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{s}$] e questo $\boldsymbol{w}$, per ogni $\boldsymbol{b}$, deve rientrare fra i $\boldsymbol{v}^{(a)}$:

$$\overline{w}_3 \geq 0 \ldots a\,, \tag{10}$$

perchè su a, insieme a $u_3 = 0$, certo si ha $b_3 \geq 0$.

D'altra parte, dall'identità

$$\mathrm{E}\,[\boldsymbol{b}] - \mathrm{E}\,[\boldsymbol{s}] =$$
$$= \int_{c_*} dc_* \cdot \sum_j Q_j\,[\eta]\,\eta_j^{(\overline{w})} + \int_{c_*} dc_* \cdot Q\,[\eta^{(\overline{w})}] - \int_{c_*} \boldsymbol{F}^*\,dc_* \times \overline{\boldsymbol{w}} - \int_{\sigma_l^*} \boldsymbol{f}^*\,d\sigma_l^* \times \overline{\boldsymbol{w}}\,,$$

non appena si faccia intervenire il fatto che $\boldsymbol{s}$ e $\overline{\boldsymbol{w}}$ non possono non rendere soddisfatta la (W), risulta

$$\mathrm{E}\,[\boldsymbol{b}] - \mathrm{E}\,[\boldsymbol{s}] =$$
$$= \int_{c_*} dc_* \cdot Q\,[\eta^{(\overline{w})}] + \int_a \boldsymbol{\Phi}^* \times \overline{\boldsymbol{w}}\,d\sigma_v^* = \int_{c_*} dc_* \cdot Q\,[\eta^{(\overline{w})}] + \int_a \Phi_3^*\,\overline{w}_3\,d\sigma_v^*.$$

Così, non potendo la Φ_3^* esser mai negativa, le (Q) e (10) vengono intanto a rendere evidente che per ogni $\boldsymbol{b}$ sussiste la (9), col segno $=$ solo quando simultaneamente sia

$$\int_{c_*} dc_* \cdot Q\,[\eta^{(\overline{w})}] = 0\,, \qquad \int_{a} \Phi_3^* \,\overline{w}_3\, dc_v^* = 0\,.$$

La prima di queste condizioni dice che $\overline{w}$ deve essere del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi, e in particolare impone a $\overline{w}_3$ un'espressione del tipo

$$h_3 + k_1\, y_2 - k_2\, y_1$$

con h_3, k_1, k_2 costanti. La seconda condizione, dovendo escludersi [cfr. (7)] che Φ_3^* possa annullarsi sull'intera σ_v^*, esattamente aggiunge per $\overline{w}_3$ la restrizione di annullarsi almeno in qualche regione bidimensionale di a. Le tre costanti h_3, k_1 e k_2 non potranno dunque essere altro che nulle,

$$\overline{w}_3 = 0 \;\ldots\; \sigma_v^*\,,$$

cioè $\overline{w}$ necessariamente rientrerà anche tra i $\boldsymbol{b}''$, c. d. d.

5. Inversione del teorema della minima energia potenziale.

Ammettiamo che tra i $\boldsymbol{b}\,(P_*)$ ne esista uno, $\boldsymbol{s}\,(P_*)$, pel quale sia sempre

$$\mathrm{E}\,[\boldsymbol{s}] \leq \mathrm{E}\,[\boldsymbol{b}]\,: \tag{11}$$

mi propongo di stabilire che $\boldsymbol{s}(P_*)$ necessariamente dà una soluzione delle relazioni principali. Dopo quanto ho detto a proposito della $(V)_A$, basterà accertare che essa dovrà sussistere per ogni scelta di $\boldsymbol{v}^{(A)}$ attinente al nostro $\boldsymbol{s}\,(P_*)$.

Pensiamo a uno qualunque di tali $\boldsymbol{v}^{(A)}$ [cfr. (6)] indicando con M il minimo di $v_3^{(A)}$ in δ e con

$$m > 0$$

il minimo (19) di u_3 nella stessa δ. Sia poi λ un parametro *positivo*, indipendente da P_*.

Insieme a

$$\operatorname{div}_{P_*}(\boldsymbol{s} + \lambda\,\boldsymbol{v}^{(A)}) = 0 \;\ldots\; c_*,$$

sarà

$$u_3 + \lambda\, v_3^{(A)} \geq 0 \;\ldots\; A,$$

perchè nell'intera A si ha anche $v_3^{(A)} \geq 0$. Per $M \geq 0$ si può senz'altro aggiungere

$$u_3 + \lambda\, v_3^{(A)} \geq 0 \;\ldots\; \delta, \tag{12}$$

per ogni scelta di λ, mentre per $M < 0$ si presenta sicura solo la limitazione

$$u_3 + \lambda\, v_3^{(A)} \geq m - \lambda\,|\,M\,| \;\ldots\; \delta.$$

Ma questa implica la (12) non appena s'intenda λ convenientemente piccolo. Precisamente, viene a essere evidente che, almeno quando sia

$$\lambda < \frac{m}{|\,M\,|}, \tag{13}$$

si ha $u_3 + \lambda\, v_3^{(A)} \geq 0$ sull'intera σ_v^*: cioè $\boldsymbol{s} + \lambda\,\boldsymbol{v}^{(A)}$ rientra fra i $\boldsymbol{b}$ e come diretta conseguenza della (11) resta acquisita la limitazione

$$\mathrm{E}[\boldsymbol{s}] - \mathrm{E}[\boldsymbol{s} + \lambda\,\boldsymbol{v}^{(A)}] \leq 0. \tag{14}$$

Ben facilmente si può controllare che, se si accenna con $\mathcal{A}$ il primo membro della $(V)_A$ — non dipendente da λ — la (14) esattamente equivale a

$$\lambda\,\mathcal{A} - \lambda^2 \int_{c_*} dc_* \cdot Q\,[\eta^{(A)}]\, dc_* \leq 0.$$

Dovendo anche questa limitazione sussistere almeno per tutti i valori di λ compatibili con la (13), si conclude

$$\mathcal{A} \leq 0,$$

(19) La u_3 è da intendersi sempre > 0 dentro $\Delta\,\sigma_*$ e la δ totalmente interna a tale area.

cioè proprio la validità della $(V)_A$ in corrispondenza al considerato $v^{(A)}$, comunque scelto tra tutti quelli che riguardano il nostro $s(P_*)$.

6. Sistemi isotropi, esempio di facile integrazione.

Per piccole trasformazioni, le ordinarie caratteristiche dello stress sono sempre legate alla $\tilde{\omega}$ e alle η dalle uguaglianze

$$(3) \qquad X_{rs} = \tilde{\omega}\,\delta_{rs} - Q_{rs} = \tilde{\omega}\,\delta_{rs} - \sum_q M_{jq}\,\eta_q - 2p_*\,\eta_{rs},$$

che evidentemente permettono di tradurre le relazioni principali [20] nelle quattro equazioni indefinite

$$(15) \qquad \sum_s \eta_s = 0, \quad \sum_s \frac{\partial X_{rs}}{\partial y_s} = F_r^*(P_*),$$

e nelle condizioni al contorno

$$(16) \qquad \sum_s X_{rs}\,\nu_s^* = f_r^*(Q_*) \;\ldots\; \sigma_l^*, \quad X_{13} = X_{23} = 0 \;\ldots\; \sigma_v^*,$$

completate, per l'intera σ_v^*, dall'obbligo di validità dell'una o dell'altra delle due coppie di restrizioni

$$(17) \qquad u_3 = 0,\ X_{33} \geq 0; \qquad u_3 > 0,\ X_{33} = 0.$$

Se S_e è *isotropo in* c_* [cfr. (4)] le (3) estremamente si semplificano, riducendosi a

$$X_{rs} = \tilde{\omega}\,\delta_{rs} - \frac{2}{3} E\,\eta_{rs},$$

e il loro abbinamento alla $(15)_1$ dà luogo a sette uguaglianze assai espressive, la

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3),$$

atta a lasciare ignorata la $\tilde{\omega}$, e le sei

$$(18) \qquad \eta_r = -\frac{1}{E}\left\{X_r - \frac{1}{2}(X_{r+1} + X_{r+2})\right\}, \quad \eta_{3+r} = -\frac{3}{E} X_{3+r}:$$

[20] Come appare ben naturale se si ripensa alle iniziali equazioni di CAUCHY.

per un solido isotropo incomprimibile il rapporto di POISSON si riduce a $1/2$ e il μ di LAMÉ a $E/3$.

Intendo ora che:

a) il nostro S_e sia isotropo in c_* e ivi si presenti come una piastra rettangolare omogenea [parallelepipedo retto rettangolo] di baricentro O e spigoli diretti come i versori $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$ e $\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{n}$ di y_1, y_2 e y_3;

b) la piastra sia soggetta a flessione semplice e a pressoflessione, e precisamente, insieme a $\boldsymbol{F}^*(P_*) \equiv 0$, si abbia

$$f_1^* = b y_2 \nu_1^*, \quad f_2^* = 0, \quad f_3^* = (d + a y_1) \nu_3^* \quad \ldots \quad \sigma_l^*$$

con b, d e a costanti;

c) la d sia positiva e $2d/a$ superi la lunghezza degli spigoli paralleli all'asse y_1, in modo da avere $d + a y_1 > 0$ in tutto c_*, oltre l'appartenenza di K^* al rettangolo σ_v^*.

È questo un caso di facile integrazione che, come farò vedere al termine di questa conferenza, risulta atto anche a dare, nella Elastostatica semilinearizzata, un esempio tangibile di certe eventuali « incompatibilità » da me prospettate ([21]) fin dal 1935, ma riguardo alla sola teoria classica.

Stante il teorema di unicità, basterà trovare *una* soluzione dell'attuale sistema $(15)_2$ - (16) - (17) - (18) perchè resti individuata *ogni* possibile sua soluzione [mediante l'aggiunta di un $\boldsymbol{b}''$]: naturalmente dovremo tenere ben presente la definizione delle η_{rs},

$$\eta_{rs} = \frac{1}{2}(u_{rs} + u_{sr}). \tag{19}$$

Comincio col rilevare che tutte le *attuali* $(15)_2$ e (16) sono soddisfatte da

$$X_1 = b\, y_2\,, \quad X_3 = d + a\, y_1\,, \quad X_2 = X_{3+r} = 0\,.$$

Ma la stessa posizione [cfr. *c*)] dato che implica $X_{33} > 0$ sulla intera σ_v^*, ha pure l'immediato, grande vantaggio di escludere una

([21]) *Trasformazioni termoelastiche finite*, ecc. [Atti della XXIV Riunione della S. I. P. S., vol. 3°] pp. 17-18.

area di distacco, riducendo così le (17) a imporre proprio

$$u_3 = 0 \ \dots \ \sigma_v^*. \tag{20}$$

Avremo dunque raggiunto lo scopo non appena si riconosca che è possibile scegliere le u_r in modo da verificare le (18), (19) e (20).

Le (18) dànno ora per tutte le η_j espressioni *lineari* nelle y, ad esempio

$$\eta_2 \equiv \frac{\partial u_2}{\partial y_2} = \frac{1}{2E}\{d + a\,y_1 + b\,y_2\}. \tag{21}$$

Risultano dunque identicamente soddisfatte le condizioni di congruenza di DE SAINT-VENANT, esistono spostamenti regolari che ammettono come caratteristiche di deformazione linearizzate proprio tali η.

Anzi, risultando nulle tutte le η_{rs} con indici diversi, lo spostamento non può essere altro che del tipo [22]

$$\boldsymbol{s}(P_*) = \sum_1^3{}_s \int_\Omega^{P_*} dy_s \{\eta_s \boldsymbol{c}_s + \mathrm{rot}_{P_*}(\eta_s \boldsymbol{c}_s) \wedge \overline{P}_* P_*\} + \boldsymbol{r}(P_*), \tag{22}$$

ove con Ω si indichi un punto qualunque di π, con $\overline{P}_*$ il punto generico del cammino d'integrazione e con $\boldsymbol{r}$ uno spostamento del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi.

Resta così solo da vedere se si può scegliere $\boldsymbol{r}$ in modo da rendere soddisfatta la (20).

Su σ_v^* $[y_3 = \mathrm{cost.}]$ l'espressione di u_3 imposta dalla (22) evidentemente può semplificarsi in

$$u_3 = \sum_1^2{}_s \int_\Omega^{P_*} dy_s \cdot \boldsymbol{n} \times (\mathrm{rot}_{P_*} \eta_s \boldsymbol{c}_s \wedge \overline{P}_* P_*) + r_3, \tag{23}$$

ma in più — dato che nessuna delle attuali η_j dipende da y_3 — si ha il parallelismo di $\boldsymbol{n}$ a

$$\mathrm{rot}\ \eta_s \boldsymbol{c}_s = \mathrm{grad}\ \eta_s \wedge \boldsymbol{c}_s,$$

[22] Applico la *formula di* VOLTERRA [cfr. ad es. loc. cit. [4], Mem. 1ª, cap. I, n. 21].

tanto per $s = 1$, quanto per $s = 2$: onde la (23) finisce per dare $u_3 = r_3$ e la (20) viene a essere soddisfatta non appena si abbia

$$r_3 = 0 \; ... \; \sigma_v^*.$$

In conclusione, perchè alla nostra diretta scelta delle X_{rs} si abbini un'effettiva soluzione delle relazioni principali — calcolabile elementarmente sulla (22) — occorre e basta che $\boldsymbol{r}$ sia un $\boldsymbol{b}''$, in completo accordo col teorema di unicità.

La naturalezza delle precedenti considerazioni non deve però illudere circa le difficoltà da superare quando i termini del problema non siano tanto comodi, quasi direi, come quelli ora discussi.

7. L'equazione complementare.

Indipendentemente dalle restrizioni *a*), *b*), *c*) del n. precedente, per il nostro solido incomprimibile appoggiato al piano π certo si può assumere nella (R)

$$\boldsymbol{b}' = \pm \, \boldsymbol{n} \wedge OP_* ,$$

col risultato, ben prevedibile,

$$\boldsymbol{n} \times \left\{ \int_{c_*} OP_* \wedge \boldsymbol{F}^* \, dc_* + \int_{\sigma_l^*} OP_* \wedge \boldsymbol{f}^* \, d\sigma_l^* \right\} = 0 . \tag{24}$$

È questa, come ogni altra conseguenza della (R), solo una restrizione per la scelta di c_*, imposta dall'ipotesi di piccola trasformazione. D'altra parte una rotazione infinitesima di asse normale a π evidentemente rientra anche fra gli spostamenti virtuali a partire da un effettivo stato di quiete, c, onde in parallelo a (24) deve aversi

$$\boldsymbol{n} \times \left\{ \int_{c_*} OP \wedge \boldsymbol{F}^* \, dc_* + \int_{\sigma_l^*} OP \wedge \boldsymbol{f}^* \, d\sigma_l^* \right\} = 0 ,$$

esatta proprietà globale degli incogniti $OP = OP_* + \boldsymbol{s}(P_*)$. Per differenza, si ha la relazione esatta

$$\boldsymbol{n} \times \left\{ \int_{c_*} \boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{F}^* \, dc_* + \int_{\sigma_l^*} \boldsymbol{s} \wedge \boldsymbol{f}^* \, d\sigma_l^* \right\} = 0 , \tag{25}$$

che nell'ipotesi di piccola trasformazione non svanisce affatto, ma *neppure rientra fra le conseguenze delle relazioni principali:* come ho voluto avvertire fin da quando ho parlato della relazione simbolica ridotta [p. 32].

Chiamerò la (25), per piccole trasformazioni, la *equazione complementare.* Proprio ad essa ci si deve rivolgere se non si è disposti ad accettare come definitiva tutta l'indeterminazione lasciata in $\boldsymbol{s}$ dal teorema di unicità. Certo deve restare indeterminata una traslazione parallela a π. Non è invece fisicameute plausibile che resti sistematicamente indeterminata una rotazione d'insieme, attorno a un asse normale a π.

Prescindendo da una traslazione parallela a π e accennando con $\boldsymbol{s}^{(p)}(P_*)$ una qualunque, ben determinata soluzione delle relazioni principali, per lo spostamento effettivo va inteso

$$\boldsymbol{s}(P_*) = \boldsymbol{s}^{(p)}(P_*) + \varrho\, \boldsymbol{c}_3 \wedge OP_*\,,$$

con ϱ costante. Quindi, non appena si ponga

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{M} &= \boldsymbol{c}_3 \times \left\{ \int_{c_*} \boldsymbol{s}^{(p)} \wedge \boldsymbol{F}^* \, dc_* + \int_{\sigma_l^*} \boldsymbol{s}^{(p)} \wedge \boldsymbol{f}^* \, d\sigma_l^* \right\}, \\ \mathcal{N} &= \boldsymbol{c}_3 \times \left\{ \int_{c_*} (\boldsymbol{c}_3 \wedge OP_*) \wedge \boldsymbol{F}^* \, dc_* + \int_{\sigma_l^*} (\boldsymbol{c}_3 \wedge OP_*) \wedge \boldsymbol{f}^* \, d\sigma_l^* \right\}, \end{aligned}\right.$$

la (25) può sostituirsi con

$$(C) \qquad \mathcal{M} + \varrho\, \mathcal{N} = 0.$$

Null'altro occorre perchè resti messo in chiaro che *in genere si può eliminare l'indeterminazione di ϱ tenendo il dovuto conto dell'equazione complementare.*

Ho detto « in genere », data la possibilità che le $\boldsymbol{F}^*(P_*)$ e $\boldsymbol{f}^*(Q_*)$ siano tali da annullare $\mathcal{N}$. Allora la (C) non individua più la ϱ, anzi, se all'annullarsi di $\mathcal{N}$ non si accompagna quello di $\mathcal{M}$, ci si viene a trovare di fronte a un caso di netta « incompatibilità » fra l'Elastostatica semilinearizzata e la teoria delle deformazioni finite.

Il problema particolare risolto nel n. precedente, come ivi ho accennato, si presta bene a dare un esempio del fatto che una tale incompatibilità può presentarsi pure in corrispondenza a qualche sollecitazione attiva di tipo semplice e non artificiale.

Intanto, riguardo a un tale problema, è ben facile riconoscere che si viene ad avere

$$\mathcal{N} = -\int_{\sigma_l^*} (f_1^* y_1 + f_2^* y_2)\, d\sigma_l^* = -\,b \int_{\sigma_l^*} y_2\, \nu_1^*\, y_1\, d\sigma_l^* \;,$$

e quindi anche

$$\mathcal{N} = -\,b \int_{\sigma^*} y_1\, y_2\, \nu_1^*\, d\sigma^* = b \int_{c_*} y_2\, dc_* . \tag{26}$$

Insieme è

$$\mathcal{M} = \boldsymbol{c}_3 \times \int_{\sigma_l^*} d\sigma_l^* \cdot \boldsymbol{s}^{(p)} \wedge \boldsymbol{f}^* = \boldsymbol{c}_3 \times \int_{\sigma_l^*} d\sigma_l^* \cdot \boldsymbol{s}^{(p)} \wedge f_1^*\, \boldsymbol{c}_1 \,,$$

cioè

$$\mathcal{M} = -\int_{\sigma_l^*} d\sigma_l^* \cdot u_2^{(p)} f_1^* = -\,b \int_{\sigma^*} d\sigma^* \cdot u_2^{(p)}\, y_2\, \nu_1^* \,;$$

ovvero

$$\mathcal{M} = b \int_{c_*} y_2 \frac{\partial u_2^{(p)}}{\partial y_1}\, dc_* . \tag{27}$$

Per giungere alla voluta conclusione basta allora profittare della circostanza che la linearità delle singole ε_j implica quella di ogni $u_{rs}^{(p)}$; in particolare, implica

$$\frac{\partial u_2^{(p)}}{\partial y_1} = l_0 + \sum_s l_s\, y_s \,,$$

con tutte le l costanti e

$$l_2 = \frac{a}{2E} \,,$$

dato che la (21) precisa proprio in $a/2E$ il comune valore di $\partial^2 u_2^{(p)}/\partial y_2 \partial y_1$ e $\partial^2 u_2^{(p)}/\partial y_1\, \partial y_2$.

Essendo gli attuali assi coordinati assi centrali d'inerzia del solido omogeneo, da (26) risulta

$$\mathcal{N} = 0$$

e da (27)

$$\mathcal{M} = b\, l_2 \int_{c_*} y_2^2 \, dc_* = \frac{ab}{2E} \int_{c_*} y_2^2 \quad c_* \, .$$

La (C) non ammette dunque alcuna soluzione, a meno che non si voglia intendere ([23]) $a = 0$ o $b = 0$; nel qual caso si ha invece che la (C) è soddisfatta da un qualunque valore di ϱ.

IV. Specificazione delle equazioni di Kirchhoff per solidi elastici incomprimibili.

1. Introduzione.

Le precedenti conferenze ([24]) si sono specialmente rivolte ai problemi d'integrazione con ambigue condizioni al contorno imposti dalla teoria delle piccole trasformazioni quando si abbia a che fare con vincoli unilaterali. Cominciai, è vero, col richiamare l'attenzione sul *problema centrale* della teoria delle trasformazioni termoelastiche finite: *scelta dell'espressione completa del potenziale termodinamico.* Ma poi, non parlai più di questo difficilissimo problema di vera Fisica matematica, proprio perchè quando ci si rivolge a piccole trasformazioni il potenziale termodinamico va inteso come una funzione di secondo grado, e per raggiungerne l'espressione definitiva si hanno solo da chiedere all'esperienza i valori di alcuni parametri, non più l'intera struttura di una funzione di più variabili.

Questa e quasi tutte le seguenti conferenze vorranno invece riguardare il *problema centrale per solidi incomprimibili*, omogenei e isotropi, dopo una conveniente sintesi di risultati indispensabili a un' esauriente sua trattazione.

([23]) Uniforme compressione accompagnata da sollecitazione a flessione sopra una coppia di facce laterali della piastra; ovvero sola pressoflessione.

([24]) Forse è opportuno citare anche la mia conferenza *Sulla statica dei solidi elastici vincolati* [Atti del 6º Congresso della U.M.I., pp. 79-93], le tre conferenze su *Questioni di elasticità* [Conf. 48-49-50 del Sem. mat. di Bari] e la mia quarta Memoria sulle *Trasformazioni termoelastiche finite,* in corso di stampa nel volume degli « Annali » dedicato all'amico Sansone.