

VII. SOLIDI ELASTICI INCOMPRESSIBILI OMOGENEI E ISOTROPI.

Tutto ciò che dirò in questa conferenza e nelle tre successive vuole specialmente riguardare i « solidi elastici incompressibili « isotropi e omogenei »,  $G_e$ . Anzi, per brevità e semplicità, fin da principio non parlerò che di essi, rinunciando a ogni ragguaglio su questioni più generali di Elasticità non linearizzata.

1. Proprietà principale.

Riattaccandomi a quanto dissi l'anno scorso sotto la condizione di isoterma, quale *proprietà principale* di  $G_e$  assumo quella che, per ciascun valore  $\tau$  della temperatura in un certo intervallo  $(\tau_1, \tau_2)$ , *esista qualche stato naturale intrinsecamente stabile di isotropia e di omogeneità alla temperatura uniforme  $\tau$ ,  $C_\tau$ .*

Appresso, insieme alla specializzazione di  $G_e$  in un  $G_e$ , sarà sempre sottinteso che  $C_*$  sia un  $C_\tau$ . Anzi marcherò la condizione di isotropia in  $C_*$  sostituendo ora la (VI, 17) con

$$\mathcal{F} = F^{(\tau)}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, T),$$

mentre la condizione di omogeneità in  $C_*$  varrà da sola a escludere che il secondo membro possa dipendere da altre variabili [le  $y_i$ ] oltre quelle ora indicate:  $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, T, \tau$ .

Se  $C$  non differisce da  $C_*$  [ciò che per ogni sistema incompressibile a temperatura costante implica  $T \equiv T_*$ ] insieme a

$$A_1 = A_2 = A_3 = 1, \quad \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = 3 \dots C_*,$$

per ogni  $G_e$  si ha dalle (VI, 18)" [nello stato attuale]

$$B_r - p = -2k^* [F_1 + 2F_2]_{\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = 3, T = T_*} \dots C_*.$$

Così la condizione che il nostro  $C_*$  sia anche *stato naturale* [ $B_1 = B_2 = B_3 \equiv 0$ ] si limita a imporre alla pressione *in tale stato* uno

stesso valore nell'intero  $C_*$ ,

$$(1) \quad p^{(\tau)} = 2k^* \left[ \frac{\partial F^{(\tau)}}{\partial \mathcal{J}_1} + 2 \frac{\partial F^{(\tau)}}{\partial \mathcal{J}_2} \right]_{\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 - 3, T - \tau}.$$

Resta da specificare l'ulteriore, *essenziale* restrizione che  $C_*$  sia « intrinsecamente stabile ». Per questo, va pensato anche qui a una qualunque trasformazione isoterma del sistema a partire da un  $C_\tau$ ,

$$\mathcal{S}^{(\tau)} \equiv C_\tau \rightarrow C^{(\tau)},$$

s' intende, sotto il vincolo intrinseco di incomprimibilità.

Sia  $\mathcal{L}^{(\tau)}$  il lavoro complessivo delle forze intime in  $\mathcal{S}^{(\tau)}$ . Dicendo stato naturale « intrinsecamente stabile » si vuole aggiungere la restrizione

$$(2) \quad \mathcal{L}^{(\tau)} < 0$$

per ogni  $\mathcal{S}^{(\tau)}$  che non degeneri in un semplice spostamento rigido: altrimenti  $\mathcal{L}^{(\tau)}$  è necessariamente nullo.

## 2. Potenziale elastico isoterma, espressione intrinseca del potenziale termodinamico.

Nella (2) è implicito che a partire da un  $C_\tau$  se ne può ottenere un altro alla stessa temperatura,  $C'_\tau$ , solo mediante uno spostamento rigido: altrimenti il lavoro complessivo delle forze intime verrebbe a essere negativo [invece che nullo] per ogni trasformazione isoterma di  $C_\tau$  in se stesso che portasse  $G_e$  a transitare per  $C'_\tau$ .

Potrò dunque parlare del  $C_T$  corrispondente alla temperatura attuale  $T$  di un determinato, ma qualunque, elemento  $e$  del sistema, delle caratteristiche di deformazione,  $\varepsilon_j^{(\tau, T)}$ , e degli invarianti principali,  $\mathcal{J}_r^{(\tau, T)}$ , relativi allo spostamento  $C_\tau \rightarrow C_T$ ; dell'uniforme pressione [cfr. (1)] in  $C_T$ ,  $p^{(T)}$ ; dell'entropia [cfr. ad es. (IV, 20)<sub>2</sub>] in  $C_T$ ,  $s^{(T)}$ . Risulta dunque funzione della sola  $T$  anche il *calore specifico*

$$c^{(T)} = \frac{T ds^{(T)}}{dT},$$

da considerare come un altro dato sperimentale circa la natura di  $G_e$ . Indicando naturalmente con  $k_T$  la densità in  $C_T$ , introduco il

potenziale elastico isoterma alla temperatura  $T$ ,  $W_T$ , mediante la posizione

$$(3) \quad W_T = k_T \{ F^{(\tau)}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, T) - F^{(\tau)}(\mathcal{J}_1^{(\tau, T)}, \mathcal{J}_2^{(\tau, T)}, T) \},$$

che implica  $W_T \equiv 0$  per  $C \equiv C_*$ , qualunque sia  $\tau$ .

Riprendo poi la (IV, 18),

$$d\mathcal{F} \cdot k^* dC_* = -\partial' l^{(e)} - s \partial' T \cdot k^* dC_*,$$

e penso alla speciale trasformazione isoterma,

$$\mathcal{S}_O^{(T)} \equiv C_T \rightarrow O^{(T)}$$

definita dallo spostamento omogeneo tangente in  $e$  a  $C_T \rightarrow C$ .

In essa, dovendosi assumere  $\partial' T = 0$ , il lavoro complessivo delle forze intime per  $e$ ,  $l_e^{(T)}$ , viene a essere espresso da

$$l_e^{(T)} = -k^* dC_* \{ \mathcal{F}(e | T) - \mathcal{F}(e^{(\tau, T)} | T) \},$$

cioè da

$$(4) \quad l_e^{(T)} = -dC_T \cdot W_T,$$

con  $dC_T = k^* dC_*/k_T$ .

Questa uguaglianza è molto espressiva. In primo luogo essa mette in luce che  $W_T$  ha un valore *intrinseco*, come  $l_e^{(T)}$ : cambiando la temperatura  $\tau$  di  $C_*$ , cambia la sua espressione mediante gli  $\mathcal{J}$ , ma il suo valore non può mai essere diverso da quello che la (3) dà per  $\tau = T$ , cioè <sup>(36)</sup>

$$k_T \{ F^{(T)}(\mathcal{J}_1^{(T)}, \mathcal{J}_2^{(T)}, T) - F^{(T)}(3, 3, T) \},$$

se si accennano con  $\mathcal{J}_r^{(T)}$  gli invarianti principali di  $\mathcal{S}_O^{(T)}$ , che, riguardo a ciascun  $e$ , hanno gli stessi valori degli invarianti principali per  $C_T \rightarrow C$ . Insomma per  $W_T$  si ha sempre un'espressione intrinseca del tipo

$$W_T = W_T(\mathcal{J}_1^{(T)}, \mathcal{J}_2^{(T)}).$$

$$^{(36)} \mathcal{J}_1^{(T, T)} = \mathcal{J}_2^{(T, T)} = 3.$$

È poi evidente che, sempre in conseguenza della (4), la (2) impone, per ciascun  $T$ ,

$$(5) \quad W_T(\mathcal{J}_1^{(T)}, \mathcal{J}_2^{(T)}) \geq 0,$$

col segno = per  $\mathcal{J}_1^{(T)} = \mathcal{J}_2^{(T)} = 3$ , col segno  $> 0$  per ogni altra possibile scelta dei due argomenti: dicendo « possibile » voglio dire per ogni altra scelta dei due argomenti compatibile col loro significato di invarianti principali per uno spostamento che come l'attuale  $\mathcal{S}_0^{(T)}$  conserva i volumi.

Anzi, riprendendo le precedenti considerazioni, si riconosce subito che la (5) [stante l'omogeneità in  $C_T$ ] proprio equivale alla (2).

Già a questo punto si ha per  $F^{(\tau)}$  l'espressione

$$F^{(\tau)}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, T) = \frac{1}{k_T} W_T(\mathcal{J}_1^{(T)}, \mathcal{J}_2^{(T)}) + F^{(\tau)}(\mathcal{J}_1^{(\tau, T)}, \mathcal{J}_2^{(\tau, T)}, T).$$

Ma pensiamo anche alla trasformazione non isoterma risultante dal successivo passaggio di  $G_e$  per tutti gli stati naturali  $C_{\tau'}$  da  $C_{\tau}$  a  $C_T$ . In corrispondenza a ogni stato naturale è  $\partial' l^{(s)} \equiv 0$ , onde la (IV, 18) viene a dare per il generico elemento della trasformazione in esame

$$-s^{(\tau')} d\tau' = dF^{(\tau)}(\mathcal{J}_1^{(\tau, \tau')}, \mathcal{J}_2^{(\tau, \tau')}, \tau').$$

Ne risulta

$$F^{(\tau)}(\mathcal{J}_1^{(\tau, T)}, \mathcal{J}_2^{(\tau, T)}, T) = - \int_{T_0}^T s^{(\tau')} d\tau' = - \int_{T_0}^T d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} \frac{c^{(\tau'')}}{\tau''},$$

con  $\tau_0$  e  $T_0$  costanti arbitrarie. Il potenziale termodinamico, stante la sua stessa definizione,

$$\mathcal{F} = w - sT,$$

doveva bene essere suscettibile di un'espressione intrinseca [a meno dell'aggiunta di una funzione lineare di  $T$ ]: essa è ormai acquisita nell'uguaglianza

$$(6) \quad F^{(\tau)}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, T) = \frac{1}{k_T} W_T(\mathcal{J}_1^{(T)}, \mathcal{J}_2^{(T)}) - \int_{T_0}^T d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} \frac{c^{(\tau'')}}{\tau''},$$

dovuta a P. G. BORDONI<sup>(37)</sup>.

(37) P. G. BORDONI, *On the Exact Relation Between the Specific Heats of an Elastic Solid* « Journal of Rational Mechanics and Analysis » Vol. 4 (1955) pp. 975-981.

OSSERVAZIONE.

È la (5) la proprietà del potenziale termodinamico che nettamente distingue un solido elastico incomprimibile, omogeneo e isotropo, da un generico  $G_e$ . Converrà in particolare rilevare che essa esclude la degenerazione della  $F^{(\tau)}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, T)$  in una funzione della sola  $T$  — il caso dei liquidi perfetti — perchè allora risulterebbe  $W_T \equiv 0$ .

3. Necessaria similitudine degli stati naturali.

La proprietà principale, prima di un qualunque altro ricorso all'esperienza, permette di caratterizzare il tipo delle deformazioni dovute a semplici variazioni di temperatura: precisamente, come ora farò vedere, dalla sola proprietà principale risulta che *quando si vari  $\tau$  in  $\tau'$ , la deformazione di  $C_\tau$  in un  $C_{\tau'}$  deve corrispondere a una semplice similitudine.*

Basterà per questo far vedere che lo spostamento  $C_\tau \rightarrow C_{\tau'}$  deve essere uno spostamento conforme. Invero, un celebre teorema di LIOUVILLE assicura che per uno spostamento conforme [in tre dimensioni] la deformazione può essere data solo da una similitudine o da una antiinversione per raggi vettori reciproci, e la seconda eventualità resta qui senz'altro esclusa dalla presupposta omogeneità in  $C_\tau$  e in  $C_{\tau'}$ .

Per lo spostamento  $C_\tau \rightarrow C_{\tau'}$ , riguardo a un qualunque  $P^*$ , indico con  $\mathcal{P}_\sigma \equiv P^*j_1j_2j_3$  la terna principale di deformazione; con  $\mathcal{P}'_\sigma \equiv P'j'_1j'_2j'_3$  l'immagine di  $\mathcal{P}_\sigma$  su  $C_{\tau'}$ ; con  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  i coefficienti principali della deformazione pura. Lo spostamento  $C_\tau \rightarrow C_{\tau'}$  risulterà conforme solo quando si abbia<sup>(38)</sup>

$$(7) \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \lambda(\tau', \tau)$$

per ogni  $P^*$ .

Per dimostrare la necessità della (7), partiamo da qualche osservazione di carattere puramente cinematico. Rivolgiamo l'attenzione a tre elementi lineari di  $C_\tau$ ,

$$(8) \quad dP_r^* = ds_r j_r,$$

<sup>(38)</sup> Uno spostamento risulta conforme solo quando, per ogni elemento del sistema, siano uguali i tre allungamenti principali. Nelle (7) si tiene conto del fatto che per  $C_\tau \rightarrow C_{\tau'}$  il coefficiente di dilatazione cubica viene sempre a esser dato da  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$ .

uscanti da  $P^*$  con gli orientamenti degli  $j_r$ , e siano  $dP_r$  e

$$(8)' \quad dP_r' = ds_r' j_r' = \sigma_r ds_r j_r'$$

gli elementi corrispondenti di  $C$  e  $C_r'$ . Conservando le notazioni abituali per lo spostamento  $C_r \rightarrow C$  e invece distinguendo con un ' tutto ciò che può riguardare  $C_r' \rightarrow C$ , si deve intendere

$$dP_r = \alpha dP_r^* = \alpha' dP_r'$$

e quindi

$$dP_r \times dP_s = dP_r^* \times \tilde{\omega} dP_s^* = dP_r' \times \tilde{\omega}' dP_s',$$

ciò che implica, per le (8) e (8)',

$$j_r \times \tilde{\omega} j_s = \sigma_r \sigma_s j_r' \times \tilde{\omega}' j_s'.$$

Si hanno dunque le semplicissime relazioni

$$(9) \quad b_{rs} = \sigma_r \sigma_s b'_{rs}$$

tra i coefficienti  $b_{rs}$  della  $\tilde{\omega}$  rispetto alla  $\mathcal{P}_\sigma$  e i coefficienti  $b'_{rs}$  della  $\tilde{\omega}'$  rispetto alla  $\mathcal{P}'_\sigma$ . Questo in particolare vuol dire che, accanto alle espressioni

$$(10) \quad \mathcal{J}'_1 = \sum_r b'_{rr}, \quad \mathcal{J}'_2 = \sum_r (b'_{r+1,r+1} b'_{r+2,r+2} - b'^2_{r+1,r+2}),$$

$$\mathcal{J}'_3 = \|\tilde{b}'_{rs}\| = \lambda^6(T, \tau')$$

degli invarianti principali della  $\tilde{\omega}'$ , necessariamente si hanno per gli  $\mathcal{J}_r$  le uguaglianze

$$(11) \quad \mathcal{J}_1 = \sum_r \sigma_r^2 b'_{rr}, \quad \mathcal{J}_2 = \sum_r \sigma_{r+1}^2 \sigma_{r+2}^2 (b'_{r+1,r+1} b'_{r+2,r+2} - b'^2_{r+1,r+2}),$$

$$\mathcal{J}_3 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2 \mathcal{J}'_3.$$

Dopo queste osservazioni di carattere puramente cinematico, la condizione che  $G_e$  sia isotropo tanto in  $C_r$  quanto in  $C_r'$  può tradursi in quella che per ogni  $T$  e per ogni possibile scelta dei  $b'_{rs}$  le (10) e (11) diano luogo a una relazione del tipo

$$(12) \quad F^{(\tau)}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, T) = f(\mathcal{J}'_1, \mathcal{J}'_2, T).$$

È ciò che si verifica se lo spostamento  $C_r \rightarrow C_r'$  è conforme, perchè allora le (11) si riducono a stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli  $\mathcal{I}_r$  e gli  $\mathcal{I}_r'$ ,

$$(13) \quad \mathcal{I}_r = \lambda^{2r}(\tau', \tau) \mathcal{I}_r' \quad (r = 1, 2, 3).$$

Per dimostrare anche la necessità delle (7), basta adoperare la (12) per

$$T = \tau', \quad \mathcal{I}_3' = 1.$$

Comincerò col pensare che  $F^{(*)}$  effettivamente dipenda dall'argomento  $\mathcal{I}_2$ , in guisa che [insieme a  $\mathcal{I}_3' = 1$ ] si debba intendere soddisfatta, quale necessaria conseguenza della (12), un'eguaglianza del tipo

$$(14) \quad \mathcal{I}_2 = \Phi(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_1', \mathcal{I}_2').$$

Tra tutte le possibili scelte dei  $b'_{rs}$  certo è legittima quella che consiste nell'assumere

$$b'_{11} = b'_{22} = 1, \quad b'_{12} = 0$$

e insieme nell'attribuire valori costanti pure a  $b'_{33}, b'_{13}, b'_{23}$ , con le ulteriori restrizioni

$$b'_{33} > 1, \quad b'_{13} + b'_{23} = b'_{33} - 1, \quad b'_{13} \neq b'_{23};$$

perchè essa dà subito luogo a

$$\mathcal{I}_1' = 2 + b'_{33} = 3 + b'_{13} + b'_{23} = \mathcal{I}_2', \quad \mathcal{I}_3' = 1$$

e anche fa risultare positive tutte tre le radici dell'equazione secolare<sup>(39)</sup> in  $A'$ ,

$$\| b'_{rs} - \delta_{rs} A' \| = 0.$$

Ma in più, con tale scelta dei  $b'_{rs}$ , dalle (11) si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2(1 + b'_{13} + b'_{23}), \quad \mathcal{I}_2 = \sigma_2^2 \sigma_3^2 (b'_{33} - b'_{23}) + \\ &+ \sigma_3^2 \sigma_1^2 (b'_{33} - b'_{13}) + \sigma_1^2 \sigma_2^2 = \sigma_3^2 (\sigma_2^2 b'_{13} + \sigma_1^2 b'_{23}) + \Sigma \sigma_{r+1}^2 \sigma_{r+2}^2. \end{aligned}$$

<sup>(39)</sup> Si tratta qui dell'equazione

$$0 = A'^3 - (2 + b'_{33}) A'^2 + (2 + b'_{33}) A' - 1 = (A' - 1) \{ A'^2 - (1 + b'_{33}) A' + 1 \}$$

Così tutti gli argomenti della  $\Phi$  sono dati da funzioni simmetriche delle due variabili  $b'_{13}, b'_{23}$  e la (14) viene a dire che tale dovrà essere anche il binomio  $\sigma_2^2 b'_{13} + \sigma_1^2 b'_{23}$ , cioè a imporre l'uguaglianza

$$\sigma_2 = \sigma_1,$$

che evidentemente equivale alla (7).

Abbiamo però ammesso che la  $F^{(\nu)}$  effettivamente dipenda da  $\mathcal{J}_2$ . Quando questo non si verifichi, la  $F^{(\nu)}$  dovrà effettivamente dipendere<sup>(40)</sup> da  $\mathcal{J}_1$  e con un ragionamento analogo a quello ora svolto<sup>(41)</sup>, che solo per brevità non riassumo, si arriva lo stesso a dimostrare la necessità delle (7).

#### 4. Proprietà invariantiva del potenziale termodinamico.

Appresso, per ciascun valore della temperatura, indicherò con

$$l_T = \frac{1}{\sqrt[3]{k_T}}$$

la lunghezza degli spigoli di un cubo di  $C_T$  avente massa uno. La necessaria similitudine degli stati naturali specializza la  $\lambda(T, \tau)$  in

$$\lambda(T, \tau) = \frac{l_T}{l_\tau}$$

e insieme permette di ricavare dalle (13) tutte le uguaglianze

$$(15) \quad l_\tau^{2r} \mathcal{J}_r = l_\tau^{2r} \mathcal{J}'_r = l_T^{2r} \mathcal{J}_r^{(T)}.$$

Come immediata conseguenza si ha che la completa determinazione della struttura della  $F^{(\nu)}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, T)$  resta sempre e assai semplicemente ricondotta all'assegnare, per ogni  $T$ , l'espressione del potenziale elastico isoterma, insieme ai valori della densità e del calore speci-

<sup>(40)</sup> La simultanea indipendenza da  $\mathcal{J}_1$  e da  $\mathcal{J}_2$ , come ho già osservato, è esclusa dalla (5).

<sup>(41)</sup> V. G. CARICATO, *Sulle trasformazioni di un sistema elastico atte a conservare l'isotropia* « Rend. di Mat. » vol. 17 (1958) pp. 313-318.

fico. Invero le (15) permettono di ridurre la (6) a

$$(16) \quad F^{(\tau)}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, T) = \frac{1}{k_T} W_T \left( \frac{l_\tau^2}{l_T^2} \mathcal{J}_1, \frac{l_\tau^4}{l_T^4} \mathcal{J}_2 \right) - \int_{T_0}^T d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} \frac{e^{(\tau'')}}{\tau''}.$$

Anzi le stesse (15) dicono che i prodotti  $l_\tau^{2r} \mathcal{J}_r$  hanno struttura invariante rispetto alla scelta di  $\tau$ : donde la necessità che lo stesso si verifichi per l'intera  $F^{(\tau)}$ . Resta quindi messa fuori di ogni dubbio la bontà del postulato che adoperai<sup>(42)</sup> fin dal 1942 per caratterizzare completamente la struttura del potenziale termodinamico nella Elasticità di secondo grado.

### VIII. POTENZIALE ELASTICO ISOTERMO.

Al termine dell'ultima conferenza si è visto che, almeno per i  $G_e$ , il *problema centrale* [cfr. IV, n. 1] della teoria delle trasformazioni termoelastiche finite sostanzialmente si riduce alla determinazione del potenziale elastico isoterma. Sarà data oggi una conveniente sintesi di risultati sperimentali all'uopo già nettamente acquisiti.

Assai utile sembra l'introduzione di certe due variabili indipendenti al posto dei tre allungamenti principali. Fra l'altro, essa porta a delimitare in modo assai espressivo l'area di definizione del potenziale elastico isoterma.

#### 1. Estensioni, scorrimenti semplici.

Pensando a una qualunque trasformazione *omogenea* isoterma di un qualsiasi  $G_e$  — e anche qui indicando con  $\Delta_r$  gli allungamenti principali, con  $d_r = 1 + \Delta_r$  i coefficienti principali della deformazione pura — serviamoci del vincolo di conservazione dei volumi,

$$(1) \quad d_1 d_2 d_3 = 1,$$

<sup>(42)</sup> V. anche C. TOLOTI, *Sul potenziale termodinamico dei solidi elastici omogenei e isotropi per trasformazioni finite* « Atti dell'Accademia d'Italia » Vol. XIV (1943) pp. 529-541.