esse dovranno dare le tre radici dell'equazione secolare

$$\left| \frac{d_r d_s}{d_1 d_2 d_3} Y^*_{rs} - \delta_{rs} B \right| = 0. \tag{10}$$

VI. Estensione delle formule di Almansi, sistemi isotropi.

In questa conferenza mi propongo in primo luogo di richiamare l'attenzione su certe formule che in modo espressivo estendono a un qualunque G_ϱ [sistema incomprimibile a trasformazioni reversibili] le espressioni assegnate da ALMANSI, fin dal 1911, alle tensioni principali di un comune solido elastico isotropo. Da quelle formule, passando a parlare specificamente dei G_ϱ *isotropi nello stato di riferimento,* potrò agevolmente dedurre che per questi le ordinarie caratteristiche dello stress vengono a dipendere — oltre che dalla pressione e dalla temperatura — *solo* dalle caratteristiche di deformazione dello spostamento inverso: senza un esplicito intervento della rotazione locale.

1. Lemmi di Cinematica.

Mantengo le notazioni della conferenza precedente per un determinato stato $\mathcal{C}$ di G_ϱ, rivolgendomi a un determinato punto P^*, comunque scelto in C_*. Insieme, indipendentemente dallo speciale significato della terna trirettangola

$$\mathcal{P} \equiv P^* \boldsymbol{i}_1 \boldsymbol{i}_2 \boldsymbol{i}_3,$$

introduco tre parametri

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$$

con l'unica restrizione che complessivamente essi risultino in corrispondenza biunivoca col generico orientamento della $\mathcal{P}$. Ad es. potrà trattarsi di una terna di angoli di EULERO della $\mathcal{P}$ rispetto a una terna fissa scelta una volta tanto in modo del tutto arbitrario, indipendentemente dalla $\mathcal{C}$.

Relativamente a un qualunque altro stato $\mathcal{C}'$ di G_ϱ, sempre per P^* indicherò con $\mathcal{P}' \equiv P^* \boldsymbol{i}'_1 \boldsymbol{i}'_2 \boldsymbol{i}'_3$ la terna principale di deformazione, con φ'_r i valori dei φ_r spettanti alla $\mathcal{P}'$, con ε' l'omografia di deformazione, con E'_1, E'_2, E'_3 le caratteristiche principali di deformazione: e in seguito accennerò con T', T, T_* e p', p, p^* i valori della temperatura e della pressione dello stesso elemento P^* in $\mathcal{H}'$, in $\mathcal{H}$ e nello stato di riferimento.

Dovendo essere

$$\varepsilon' \boldsymbol{i}'_t = E'_t \cdot \boldsymbol{i}'_t \quad (t = 1, 2, 3),$$

avremo

$$\varepsilon' \boldsymbol{c}_s = \sum_t \boldsymbol{c}_s \times \boldsymbol{i}'_t \cdot \varepsilon' \boldsymbol{i}'_t = \sum_t E'_t \cdot \boldsymbol{c}_s \times \boldsymbol{i}'_t \cdot \boldsymbol{i}'_t$$

e

$$\boldsymbol{c}_r \times \varepsilon' \boldsymbol{c}_s = \sum_t E'_t \cdot \boldsymbol{c}_r \times \boldsymbol{i}'_t \cdot \boldsymbol{c}_s \times \boldsymbol{i}'_t . \tag{1}$$

In queste espressioni dei coefficienti della ε' rispetto alla $\mathcal{C}$, le E' intervengono solo esplicitamente e gli $\boldsymbol{i}'_t$ sono da trattare come determinate funzioni $\boldsymbol{i}'_t(\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3)$ dei soli φ'. Alle (1) corrispondono per le caratteristiche di deformazione ε'_j $(j = 1, 2, \ldots 6)$ le espressioni

$$\varepsilon'_l = \sum_t E'_t \cdot [\boldsymbol{c}_l \times \boldsymbol{i}'_t]^2, \quad \varepsilon'_{3+l} = 2 \sum_t E'_t \cdot \boldsymbol{c}_{l+1} \times \boldsymbol{i}'_t \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \boldsymbol{i}'_t \quad (l = 1, 2, 3). \tag{1'}$$

Queste hanno come evidenti conseguenze tutte le uguaglianze

$$\left[\frac{\partial \varepsilon'_l}{\partial E'_r}\right]_{\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}} = [\boldsymbol{c}_l \times \boldsymbol{i}_r]^2, \quad \left[\frac{\partial \varepsilon'_{3+l}}{\partial E'_r}\right]_{\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}} = 2 \boldsymbol{c}_{l+1} \times \boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \boldsymbol{i}_r \quad (r = 1, 2, 3) \tag{2}$$

e

$$\left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial \varepsilon'_l}{\partial \varphi'_r}\right]_{\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}} = 2 \sum_1^3{}_t E_t \cdot \boldsymbol{c}_l \times \boldsymbol{i}_t \cdot \boldsymbol{c}_l \times \frac{\partial \boldsymbol{i}_t}{\partial \varphi_r}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (l = 1, 2, 3) \\ &\left[\frac{\partial \varepsilon'_{3+l}}{\partial \varphi'_r}\right]_{\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}} = 2 \sum_1^3{}_t E_t \left\{ \boldsymbol{c}_{l+1} \times \frac{\partial \boldsymbol{i}_t}{\partial \varphi_r} \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \boldsymbol{i}_t + \boldsymbol{c}_{l+1} \times \boldsymbol{i}_t \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \frac{\partial \boldsymbol{i}_t}{\partial \varphi_r} \right\}. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Pongo ora

$$\boldsymbol{\omega}_r = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_t \boldsymbol{i}_t \wedge \frac{\partial \boldsymbol{i}_t}{\partial \varphi_r} \qquad (r = 1, 2, 3),$$

cioè [31]

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}_l}{\partial \varphi_r} = \boldsymbol{\omega}_r \wedge \boldsymbol{i}_l \qquad (r, l = 1, 2, 3). \tag{4}$$

(31) Cfr. ad es. A. SIGNORINI, *Meccanica razionale con elementi di Statica grafica*, Vol. I, 3a ediz. (Roma, Cremonese, 1959) Cap. III, n. 15.

formazione: e in seguito accennerò con T', T, T_* e p', p, p^* i valori della temperatura e della pressione dello stesso elemento P^* in $\mathcal{H}'$, in $\mathcal{H}$ e nello stato di riferimento.

Dovendo essere

$$\varepsilon' \boldsymbol{i}'_t = E'_t \cdot \boldsymbol{i}'_t \quad (t = 1, 2, 3),$$

avremo

$$\varepsilon' \boldsymbol{c}_s = \sum_t \boldsymbol{c}_s \times \boldsymbol{i}'_t \cdot \varepsilon' \boldsymbol{i}'_t = \sum_t E'_t \cdot \boldsymbol{c}_s \times \boldsymbol{i}'_t \cdot \boldsymbol{i}'_t$$

e

$$\boldsymbol{c}_r \times \varepsilon' \boldsymbol{c}_s = \sum_t E'_t \cdot \boldsymbol{c}_r \times \boldsymbol{i}'_t \cdot \boldsymbol{c}_s \times \boldsymbol{i}'_t . \tag{1}$$

In queste espressioni dei coefficienti della ε' rispetto alla $\mathcal{C}$, le E' intervengono solo esplicitamente e gli $\boldsymbol{i}'_t$ sono da trattare come determinate funzioni $\boldsymbol{i}'_t(\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3)$ dei soli φ'. Alle (1) corrispondono per le caratteristiche di deformazione ε'_j $(j = 1, 2, \ldots 6)$ le espressioni

$$\varepsilon'_l = \sum_t E'_t \cdot [\boldsymbol{c}_l \times \boldsymbol{i}'_t]^2, \quad \varepsilon'_{3+l} = 2 \sum_t E'_t \cdot \boldsymbol{c}_{l+1} \times \boldsymbol{i}'_t \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \boldsymbol{i}'_t \quad (l = 1, 2, 3). \tag{1)'$$

Queste hanno come evidenti conseguenze tutte le uguaglianze

$$\left[\frac{\partial \varepsilon'_l}{\partial E'_r}\right]_{\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}} = [\boldsymbol{c}_l \times \boldsymbol{i}_r]^2, \quad \left[\frac{\partial \varepsilon'_{3+l}}{\partial E'_r}\right]_{\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}} = 2 \boldsymbol{c}_{l+1} \times \boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \boldsymbol{i}_r \quad (r = 1, 2, 3) \tag{2}$$

e

$$\left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial \varepsilon'_l}{\partial \varphi'_r}\right]_{\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}} = 2 \sum_1^3{}_t E_t \cdot \boldsymbol{c}_l \times \boldsymbol{i}_t \cdot \boldsymbol{c}_l \times \frac{\partial \boldsymbol{i}_t}{\partial \varphi_r}, \\ & \hspace{20em} (l = 1, 2, 3) \\ &\left[\frac{\partial \varepsilon'_{3+l}}{\partial \varphi'_r}\right]_{\mathcal{C}' \equiv \mathcal{C}} = 2 \sum_1^3{}_t E_t \left\{ \boldsymbol{c}_{l+1} \times \frac{\partial \boldsymbol{i}_t}{\partial \varphi_r} \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \boldsymbol{i}_t + \boldsymbol{c}_{l+1} \times \boldsymbol{i}_t \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \frac{\partial \boldsymbol{i}_t}{\partial \varphi_r} \right\}. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Pongo ora

$$\boldsymbol{\omega}_r = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_t \boldsymbol{i}_t \wedge \frac{\partial \boldsymbol{i}_t}{\partial \varphi_r} \qquad (r = 1, 2, 3),$$

cioè [31]

$$\frac{\partial \boldsymbol{i}_l}{\partial \varphi_r} = \boldsymbol{\omega}_r \wedge \boldsymbol{i}_l \qquad (r, l = 1, 2, 3). \tag{4}$$

(31) Cfr. ad es. A. SIGNORINI, *Meccanica razionale con elementi di Statica grafica,* Vol. I, 3ª ediz. (Roma, Cremonese, 1959) Cap. III, n. 15.

Tanto gli ω_r, quanto le loro componenti p_{rl} rispetto alla terna principale $\mathcal{P}$ risultano ben determinate funzioni dei soli φ_r. Ad es. se per i φ_r si assume una terna di angoli di EULERO della $\mathcal{P}$, e, più precisamente, se s'intende

$$\varphi_1 = \theta\,, \quad \varphi_2 = \psi\,; \quad \varphi_2 = \varphi\,, \tag{5}$$

gli ω_r ordinatamente si riducono [32] al versore della linea dei nodi, al versore dell'asse di precessione e al versore dell'asse di figura, e le p_{rl} restano semplicemente espresse da

$$\left\{\begin{array}{lll} p_{11} = \cos\varphi\,, & p_{12} = -\sin\varphi\,, & p_{13} = 0\,, \\ p_{21} = \sin\theta\sin\varphi\,, & p_{22} = \sin\theta\cos\varphi\,, & p_{23} = \cos\theta\,, \\ p_{31} = 0\,, & p_{32} = 0\,, & p_{33} = 1\,. \end{array}\right. \tag{6}$$

Stante le (4), dalle (3) subito si ricava che è anche

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{\partial \varepsilon'_l}{\partial \varphi'_r}\right]_{\mathcal{S}'\equiv\mathcal{S}} = 2\,\Sigma_t E_t \cdot \boldsymbol{c}_l \times \boldsymbol{i}_t \cdot \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{i}_t \wedge \boldsymbol{c}_l) \\ \hfill (l\,, r = 1, 2, 3) \\ \left[\dfrac{\partial \varepsilon'_{3+l}}{\partial \varphi'_r}\right]_{\mathcal{S}'\equiv\mathcal{S}} = 2\,\Sigma_t E_t \,\{\boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{i}_t \wedge \boldsymbol{c}_{l+1}) \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \boldsymbol{i}_t + \boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{i}_t \wedge \boldsymbol{c}_{l+2}) \cdot \boldsymbol{c}_{l+1} \times \boldsymbol{i}_t\}. \end{array}\right. \tag{7}$$

Nulla vieta — e a questo punto conviene — di assumere per la $\mathcal{T}$ la $\mathcal{P}$, *senza cambiare il primitivo significato dei* φ. Accenno con ε_j^* i valori delle ε_j corrispondenti a questa specializzazione della $\mathcal{T}$: per riferire le (2) e (7) alle ε_j^* non ci sarà che da porre nei loro secondi membri

$$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{i}_1\,, \quad \boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{i}_2\,, \quad \boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{i}_3\,.$$

Con questo le (2) evidentemente dànno

$$\left[\frac{\partial \varepsilon^*_l}{\partial E'_r}\right]_{\mathcal{S}'\equiv\mathcal{S}} = \delta_{lr}\,, \quad \left[\frac{\partial \varepsilon^*_{3+l}}{\partial E'_r}\right]_{\mathcal{S}'\equiv\mathcal{S}} = 0 \qquad (r\,, l = 1, 2, 3) \tag{8}$$

e le $(7)_1$

$$\left[\frac{\partial \varepsilon^*_l}{\partial \varphi'_r}\right]_{\mathcal{S}'\equiv\mathcal{S}} = 0 \qquad (r\,, l = 1, 2, 3) \tag{9$_1$}$$

perchè per ogni l e t si annulla o $\boldsymbol{i}_l \times \boldsymbol{i}_t$ o $\boldsymbol{i}_l \wedge \boldsymbol{i}_t$.

[32] Cfr. ad es. op. cit. nella nota prec., Cap. IV, n. 5.

Al tempo stesso si viene ad avere

$$\omega_r \times (\boldsymbol{i}_t \wedge \boldsymbol{c}_{l+1}) \cdot \boldsymbol{c}_{l+2} \times \boldsymbol{i}_t + \omega_r \times (\boldsymbol{i}_t \wedge \boldsymbol{c}_{l+2}) \cdot \boldsymbol{c}_{l+1} \times \boldsymbol{i}_t =$$

$$= \omega_r \times (\boldsymbol{i}_t \wedge \boldsymbol{i}_{l+1})\, \delta_{t,l+2} + \omega_r \times (\boldsymbol{i}_t \wedge \boldsymbol{i}_{l+2})\, \delta_{t,l+1}$$

onde le $(7)_2$ semplicemente aggiungono

$$(9)_2 \qquad \left[\frac{\partial \varepsilon^*_{3+l}}{\partial \varphi'_r}\right]_{\mathcal{B}'\equiv\mathcal{B}} = 2p_{rl}\,(E_{l+1} - E_{l+2}) \qquad (r\,, l = 1, 2, 3)\,.$$

2. Estensione delle formule di Almansi.

Sempre per quanto riguarda l'elemento P^*, il potenziale termodinamico di G_ϱ si presenta come una funzione del tipo

$$\mathcal{F}[\varepsilon' \mid T']$$

la cui forma effettiva dipende dalla scelta dello stato di riferimento e generalmente anche da quella dell'orientamento della $\mathcal{C}$. Indicherò con

$$\mathcal{F}^*[\varepsilon^* \mid T']$$

la particolare forma che la $\mathcal{F}[\varepsilon' \mid T']$ assume per $\mathcal{C} \equiv \mathcal{P}$.

Riprendo la relazione stabilita al termine della prima conferenza tra l'omografia lagrangiana di tensione β_*, la pressione p, la dilatazione associata alla $\mathcal{D}[\varepsilon]$ e il prodotto per k^* della dilatazione associata al potenziale termodinamico,

$$\beta_* = p \cdot \|\mathcal{D}_j[\varepsilon]\| - \varphi\,;$$

relazione omografica cui vengono a corrispondere, con ovvio significato dei simboli, le sei equazioni scalari

$$(10) \qquad Y_j' = p\,\frac{\partial \mathcal{D}[\varepsilon']}{\partial \varepsilon_j'} - k^*\,\frac{\partial \mathcal{F}[\varepsilon' \mid T']}{\partial \varepsilon_j'}\,.$$

Continuando a indicare con A_r i coefficienti principali della $\tilde{\omega}$ in P^* e con d_r quelli della α_δ, dall'identità

$$\mathcal{D}^2[\varepsilon'] = \|\delta_{rs} + 2\varepsilon'_{rs}\|\,.$$

è ben facile ricavare

$$\left[\mathcal{D}\,\frac{\partial\mathcal{D}\,[\varepsilon^*]}{\partial\varepsilon_r^*}\right]_{\mathcal{S}'=\mathcal{S}} = A_{r+1}\,A_{r+2} = d_{r+1}^2 d_{r+2}^2\,,\ \left[\frac{\partial\,\mathcal{D}\,[\varepsilon^*]}{\partial\varepsilon_{3+r}^*}\right]_{\mathcal{S}'=\mathcal{S}} = 0\,,$$

in modo che, chiamando anche qui Y^* le caratteristiche lagrangiane di tensione [in P^*] rispetto alla $\mathcal{P}$, le (10) dànno

$$(11)\qquad Y_{rr}^* = p\,\frac{d_{r+1}^2\,d_{r+2}^2}{d_1 d_2 d_3} - k^*\left[\frac{\partial\,\mathcal{F}^*}{\partial\varepsilon_r^*}\right]_{\mathcal{S}'=\mathcal{S}},\qquad Y_{3+r}^* = -\,k^*\left[\frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial\varepsilon_{3+r}^*}\right]_{\mathcal{S}'=\mathcal{S}}.$$

Le (1)$'$ direttamente permettono di ridurre la $\mathcal{F}[\varepsilon'\mid T']$ a una funzione del tipo

$$\mathcal{F}^{(E)}\{E'\mid\varphi'\mid T'\},$$

la stessa qualunque sia la $\mathcal{C}$ di partenza, e l'identità

$$\mathcal{F}^*\,[\varepsilon^*\mid T'] = \mathcal{F}^{(E)}\,\{E'\mid\varphi'\mid T'\}$$

ha come necessaria conseguenza

$$\frac{\partial\mathcal{F}^{(E)}}{\partial E_r} \equiv \left[\frac{\partial\mathcal{F}^{(E)}\,\{E'\mid\varphi'\mid T'\}}{\partial E_r'}\right]_{\mathcal{S}'=\mathcal{S}} = \sum_1^6{}_j\left[\frac{\partial\,\mathcal{F}^*}{\partial\varepsilon_j^*}\,\frac{\partial\varepsilon_j^*}{\partial E_r'}\right]_{\mathcal{S}'=\mathcal{S}},$$

insieme a

$$\frac{\partial\mathcal{F}^{(E)}}{\partial\varphi_r} \equiv \left[\frac{\partial\mathcal{F}^{(E)}\,\{E'\mid\varphi'\mid T'\}}{\partial\varphi_r'}\right]_{\mathcal{S}'=\mathcal{S}} = \sum_1^6{}_j\left[\frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial\varepsilon_j^*}\,\frac{\partial\varepsilon_j^*}{\partial\varphi_r'}\right]_{\mathcal{S}'=\mathcal{S}}.$$

Con l'intervento delle (8) e (9) rispettivamente si ottiene

$$(12)\qquad \frac{\partial\mathcal{F}^{(E)}}{\partial E_r} = \left[\frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial\varepsilon_r^*}\right]_{\mathcal{S}'=\mathcal{S}}$$

e

$$(13)\qquad \frac{\partial\mathcal{F}^{(E)}}{\partial\varphi_r} = 2\sum_1^3{}_l\,p_{rl}\,(E_{l+1} - E_{l+2})\left[\frac{\partial\mathcal{F}^*}{\partial\varepsilon_{3+l}^*}\right].$$

Dalle (11)$_1$ e (12) risulta

$$(14)\qquad Y_{rr}^* = p\,\frac{d_{r+1}^2\,d_{r+2}^2}{d_1 d_2 d_3} - k^*\,\frac{\partial\mathcal{F}^{(E)}}{\partial E_r}\,;$$

dalle (13) e $(11)_2$

$$(15)\qquad k^* \frac{\partial \mathcal{F}^{(E)}}{\partial \varphi_r} \equiv -2 \sum_1^3 {}_l\, p_{rl} (E_{l+1} - E_{l+2})\, Y^*_{3+l} .$$

Sono queste, in sostanza, le formule che dànno la preannunziata estensione delle formule di ALMANSI, come meglio potrò dire dopo aver cominciato a parlare di sistemi isotropi. Frattanto osserviamo che per quanto riguarda le X^*_{rs} — le ordinarie caratteristiche dello stress rispetto all'immagine $\mathcal{P}_\varrho$ di $\mathcal{P}$ — le (14), in base alle relazioni generali

$$X^*_{rs} = \frac{d_r\, d_s}{d_1\, d_2\, d_3}\, Y^*_{rs} ,$$

implicano

$$(16)\qquad X^*_{rr} = p - \frac{k^*\, d_r}{d_{r+1}\, d_{r+2}} \frac{\partial \mathcal{F}^{(E)}}{\partial E_r} .$$

Facciamo intervenire anche la funzione

$$\mathcal{F}^{(\Delta)} \{\Delta \mid \varphi \mid T\}$$

che si ricava dalla $\mathcal{F}^{(E)} \{E \mid \varphi \mid T\}$ esprimendo le E mediante [33] gli allungamenti principali Δ. Evidentemente sarà

$$d_r \frac{\partial \mathcal{F}^{(E)}}{\partial E_r} = \frac{d E_r}{d \Delta_r} \frac{\partial \mathcal{F}^{(E)}}{\partial E_r} = \frac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \Delta_r} ,$$

onde le (16) possono tradursi in

$$(16)'\qquad X^*_{rr} = p - \frac{k^*}{(1 + \Delta_{r+1})(1 + \Delta_{r+2})} \frac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \Delta_r} \qquad (r = 1, 2, 3).$$

3. Sistemi isotropi in C_*.

Dirò che G_ϱ è *isotropo in un determinato suo stato*, C_*, quando il tipo del potenziale termodinamico sia tale che, in corrispondenza a un qualunque stato attuale, C, *l'immagine di una terna principale di deformazione risulti sempre terna principale di tensione.*

[33] $1 + 2E_r = (1 + \Delta_r)^2 = d_r^2$.

È una restrizione che risulta identicamente soddisfatta nel caso dei liquidi perfetti. Comunque essa non ha affatto carattere formale e, con la terminologia ormai adottata, impone, e solo impone, che vengano a essere identicamente nulle le X^*_{rs} con indici diversi: restrizione che a sua volta, stante le (V, 9), equivale a quella che risultino identicamente nulle Y^*_4, Y^*_5, Y^*_6.

Ripensando alle (15), si ha dunque che, come ben poteva presumersi, la nostra definizione di «isotropia in C_*» non differisce dall'imporre alla $\mathcal{F}^{(E)}$ di non dipendere effettivamente dall'orientamento della terna principale di deformazione, cioè da $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Se G_ϱ è isotropo in C_*, il potenziale termodinamico può dipendere dalle caratteristiche di deformazione solo attraverso alle E o agli allungamenti principali:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(E)}\{E \mid T\} = \mathcal{F}^{(\Delta)}\{\Delta \mid T\}.$$

Invece che delle E_r o dei Δ_r si può parlare degli

$$A_r = 1 + 2E_r = (1 + \Delta_r)^2$$

o dei tre invarianti principali della $\tilde{\omega}$,

$$\mathcal{I}_1 = A_1 + A_2 + A_3\,, \mathcal{I}_2 = A_2A_3 + A_3A_1 + A_1A_2\,, \mathcal{I}_3 = A_1A_2A_3 = \mathcal{D}^2,$$

che spesso chiamerò anche *invarianti principali per lo spostamento* $C_* \to C$ o invarianti principali di deformazione.

Anzi, stante il vincolo di incomprimibilità a temperatura uniforme,

$$\mathcal{D} = \lambda^3 (T, T_*),$$

si può identificare $\mathcal{I}_3$ con $\lambda^6 (T, T_*)$. Così in definitiva, per ogni G_ϱ isotropo in C_*, al potenziale termodinamico potremo sempre attribuire un'espressione del tipo

$$\mathcal{F} = F(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, T), \tag{17}$$

lasciando anche qui sottinteso l'intervento della temperatura T_* nello stato di riferimento, nonchè quello di P^* se G_ϱ non è omogeneo in C_*.

Nelle stesse condizioni, certo è terna principale di tensione l'immagine $\mathcal{P}_\varrho \equiv \alpha_\varrho \mathcal{P}$ di $\mathcal{P}$ su C e le X^*_{rr} non possono differire dalle tensioni principali B_r: in guisa che, introducendo le *tensioni principali* *depurate* mediante le posizioni

$$B_r^{(a)} = B_r - p,$$

le relazioni generali (16)′ si riducono a

$$B_r^{(a)} = -\frac{k^*}{(1+\Delta_{r+1})(1+\Delta_{r+2})}\frac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \Delta_r}. \tag{18}$$

Sono proprio queste [salvo la considerazione di trasformazioni qualsiasi di un G_ϱ invece delle sole trasformazioni isoterme di un solido elastico esente da ogni vincolo intrinseco] le formule di ALMANSI ripetutamente citate ([34]). Esse esprimono le tensioni principali depurate in funzione degli allungamenti principali [oltre che della T]. Le (16)′ possono anche leggersi dicendo che i secondi membri delle (18) conservano un semplice significato anche per sistemi anisotropi: precisamente essi continuano a dare gli *sforzi normali depurati* $X_{rr}^* - p$ sugli elementi di superficie *corrispondenti a quelli che nello stato di riferimento appartengono ai piani principali di deformazione* ([35]).

OSSERVAZIONE.

L'isotropia in C_* ha come necessaria conseguenza che la β_* ammette come terna trirettangola unita la $\mathcal{P}[Y_4^* = Y_5^* = Y_6^* \equiv 0]$: richiede dunque che pure la

$$\alpha_\delta \beta_*$$

sia una dilatazione, con la $\mathcal{P}$ come terna unita e i coefficienti principali [cfr. (14)]

$$pd_{r+1}\,d_{r+2} - k^*\,d_r \frac{\partial \mathcal{F}^{(E)}}{\partial E_r} = pd_{r+1}\,d_{r+2} - k^* \frac{\partial \mathcal{F}^{(\Delta)}}{\partial \Delta_r}.$$

([34]) E. ALMANSI, *Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi*, Nota I, « Rend. Acc. Lincei », serie V, vol. XX, 1° sem. 1911, pp. 705-714.

([35]) Adoperando pure le (15) si può anche, per ogni G_ϱ, specificare un'equazione secolare di 3° grado avente per radici proprio le B_r, esprimendone tutti i coefficienti mediante derivate parziali prime della $\mathcal{F}^{(\Delta)}\{\Delta \mid \varphi \mid T\}$. Naturalmente nel caso di isotropia essa si spezza in tre equazioni di 1° grado equivalenti alle formule di ALMANSI. [V. *Estensione delle formule di Almansi a sistemi elastici anisotropi*, « Rend. Acc. Lincei » s. VIII, vol. XXV (1958) pp. 246-253].

4. Espressione delle sei caratteristiche dello stress mediante le caratteristiche di deformazione dello spostamento inverso.

Ma le formule di ALMANSI, o le equivalenti

$$(18)' \qquad B_r^{(a)} = - \frac{k^* d_r}{d_{r+1}\, d_{r+2}} \frac{\partial \mathcal{F}^{(E)}}{\partial E_r} = - \frac{k^* d_r^2}{\lambda^3 (T, T_*)} \frac{\partial \mathcal{F}^{(E)}}{\partial E_r},$$

si prestano pure assai bene a mettere in luce notevoli espressioni di tutte le

$$X_{rs}^{(a)} = X_{rs} - \delta_{rs}\, p,$$

le ordinarie caratteristiche dello stress *depurate,* rispetto a una qualunque $\mathcal{C}$.

Cominciamo, per questo, con l'osservare che alla (17) si associano, per le $\partial \mathcal{F}^{(E)}/\partial E_r$, le espressioni

$$\frac{\partial \mathcal{F}^{(E)}}{\partial E_r} = 2 \frac{\partial F}{\partial \mathcal{I}_1} + 2 \frac{\partial F}{\partial \mathcal{I}_2} (A_{r+1} + A_{r+2}).$$

Ne segue che le (18)', quando si adottino le notazioni abbreviative

$$\frac{\partial F}{\partial \mathcal{I}_1} = F_1, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathcal{I}_2} = F_2,$$

possono sostituirsi con

$$B_r^{(a)} = - \frac{2k^*}{\lambda^3} \{F_1 A_r + F_2 A_r (A_{r+1} + A_{r+2})\}$$

e pure con

$$(18)'' \qquad B_r^{(a)} = - 2k_T \{F_2 \mathcal{I}_2 + F_1 A_r - F_2 A_{r+1} A_{r+2}\},$$

se s'indica con k_T la densità attuale, legata a k^* dall'uguaglianza $k^* = k_T\, \mathcal{D} = k_T \lambda^3$.

Gli A_r sono i coefficienti principali della dilatazione $\tilde{\omega} \doteq 1 + 2\varepsilon$, gli $A_{r+1} A_{r+2}$ quelli della dilatazione complementare $\mathrm{R}\tilde{\omega}$, ma le (18)'' [cfr. (V, 3)] non hanno come necessaria conseguenza l'uguaglianza omografica

$$\beta - p = - 2k_T \{F_2 \mathcal{I}_2 + F_1 \tilde{\omega} - F_2 \mathrm{R}\tilde{\omega}\},$$

perchè la $\alpha_\varrho \mathcal{P}$, terna unita di β, di regola non è orientata come la $\mathcal{P}$ [terna unita di $\tilde{\omega}$ e $\mathrm{R}\,\tilde{\omega}$].

Per giungere al risultato voluto occorre fare intervenire lo spostamento inverso,

$$C \rightarrow C_* .$$

Rispetto ad esso, anche fisicamente, $C_* \rightarrow C$ non può vantare alcun diritto di precedenza, e il porsi, in certo modo, da un punto di vista euleriano [invece che lagrangiano, come ho fatto finora] risulta ora decisivo, per il motivo che, come già volli rilevare nella seconda conferenza, per lo spostamento inverso è la $\mathcal{P}_\varrho$ terna principale di deformazione: e qui, nell'attuale ipotesi di isotropia, la β viene certo ad avere in comune con la nuova omografia di deformazione una terna trirettangola unita, la $\mathcal{P}_\varrho$.

Distinguo con un soprassegno tutto ciò che riguarda lo spostamento inverso. Così ne introduco gli allungamenti principali e le caratteristiche principali di deformazione mediante le uguaglianze

$$1 + \bar{\Delta}_r = (1 + \Delta_r)^{-1}, \quad 1 + 2\,\bar{E}_r = (1 + \bar{\Delta}_r)^2 = (1 + 2E_r)^{-1},$$

e insieme pongo

$$\bar{A}_r = 1 + 2\,\bar{E}_r = A_r^{-1},$$

nonchè

$$\bar{\mathcal{I}}_1 = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3\,, \quad \bar{\mathcal{I}}_2 = \bar{A}_2\,\bar{A}_3 + \bar{A}_3\,\bar{A}_1 + \bar{A}_1\,\bar{A}_2\,,$$

$$\bar{\mathcal{I}}_3 = \bar{A}_1\,\bar{A}_2\,\bar{A}_3 = \lambda^{-6}\,(T,\,T_*).$$

Naturalmente appresso è anche indicata con $\bar{\varepsilon}$ l'omografia di deformazione dello spostamento inverso e con $\bar{\tilde{\omega}} = 1 + 2\,\bar{\varepsilon}$ la nuova $\tilde{\omega}$, la dilatazione che ha come terna trirettangola unita la $\mathcal{P}_\varrho$ e come coefficienti principali gli $\bar{A}_r$. I coefficienti principali della dilatazione complementare, $\mathrm{R}\,\bar{\tilde{\omega}}$, vengono a essere dati dai prodotti $\bar{A}_{r+1}\,\bar{A}_{r+2}$. Gli $\bar{\mathcal{I}}_r$ sono gli invarianti principali di $\bar{\tilde{\omega}}$, gli *invarianti principali per lo spostamento inverso.*

Si riconosce subito che risulta

$$\mathcal{I}_1 = \lambda^6\,\bar{\mathcal{I}}_2\,, \quad \mathcal{I}_2 = \lambda^6\,\bar{\mathcal{I}}_1\,, \tag{19}$$

onde alla (17) si può sostituire

$$\mathcal{F} = \overline{F}(\overline{\mathcal{I}}_1, \overline{\mathcal{I}}_2, T)$$

con

$$\overline{F}(\overline{\mathcal{I}}_1, \overline{\mathcal{I}}_2, T) \equiv F(\lambda^6 \overline{\mathcal{I}}_2, \lambda^6 \overline{\mathcal{I}}_1, T).$$

Conviene anche porre

$$\overline{F}_1 = \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{\mathcal{I}}_1} = \lambda^6 F_2, \quad \overline{F}_2 = \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{\mathcal{I}}_2} = \lambda^6 F_1 :$$

è subito visto che ne risultano le identità

$$F_2 \mathcal{I}_2 = \overline{F}_1 \overline{\mathcal{I}}_1, \quad F_1 A_r = \overline{F}_2 \overline{A}_{r+1} \overline{A}_{r+2}, \quad F_2 A_{r+1} A_{r+2} = \overline{F}_1 \overline{A}_r,$$

insieme alla possibilità di tradurre le (18)″ in

$$B_{r.}^{(a)} = 2k_T \{-\overline{F}_1 \overline{\mathcal{I}}_1 + \overline{F}_1 \overline{A}_r - \overline{F}_2 \overline{A}_{r+1} \overline{A}_{r+2}\}. \tag{20}$$

Qui i secondi membri si presentano come i coefficienti principali della dilatazione

$$2k_T \{-\overline{F}_1 \overline{\mathcal{I}}_1 + \overline{F}_1 \overline{\overline{\omega}} - \overline{F}_2 \mathrm{R}\overline{\overline{\omega}}\}$$

e questa ha in comune con la $\beta - p$ anche una terna trirettangola unita, la $\mathcal{P}_\varrho$. Si può dunque legittimamente concludere che è

$$\beta - p = 2k_T \{-\overline{F}_1 \overline{\mathcal{I}}_1 + \overline{F}_1 \overline{\overline{\omega}} - \overline{F}_2 \mathrm{R}\overline{\overline{\omega}}\}. \tag{21}$$

Rispetto a una qualunque $\mathcal{C}$, i coefficienti della $\overline{\overline{\omega}} = 1 + 2\overline{\varepsilon}$ sono funzioni lineari delle $\overline{\varepsilon}_j$ e quelli della $\mathrm{R}\overline{\overline{\omega}}$ funzioni di secondo grado. In definitiva rimane stabilito che, una volta assegnata la espressione F del potenziale termodinamico, insieme alla $\lambda(T, T_*)$:

1⁰) la $\beta - p$ resta individuata, oltre che da T, dalla sola $\overline{\varepsilon}$;

2⁰) le espressioni fornite dalla (21) per le singole $X_{rs}^{(a)}$ *si presentano come funzioni di secondo grado delle* $\overline{\varepsilon}_j$, i cui coefficienti possono però dipendere da $\overline{\mathcal{I}}_1$ e $\overline{\mathcal{I}}_2$ con legge comunque complessa, finchè non si specializzi la F.