tradizionale restrizione al potenziale elastico, prima di ogni particolare dato sperimentale circa la struttura del corpo naturale schematizzato nel nostro sistema continuo incomprimibile a trasformazioni reversibili. Si tratta, come meglio dirò nella prossima conferenza, del fatto che il potenziale viene in definitiva a dipendere dalle *nove* u' solo per il tramite delle cosidette caratteristiche di deformazione, che sono *sei*: e questo, come è ultranoto, ha sistematici riflessi anche nelle teorie classiche.

II. Solidi elastici

Ciò che dirò nei n.[i] 1 e 2 vuol riguardare qualunque sistema continuo: solo nel n. 3 riprenderò quanto ho detto nella prima conferenza per i sistemi incomprimibili a trasformazioni reversibili, S_ϱ, per poi dare una definizione dei solidi perfettamente elastici e riassumere le relazioni generali della Elastostatica isoterma.

1. Caratteristiche di deformazione.

Indico con

$$\sum_{rs} b_{rs}\, d\, y_r\, d\, y_s$$

la forma differenziale che esprime il quadrato dell'elemento lineare di c [ds^2 euclideo] mediante le y, cioè intendo

$$b_{rs} = b_{sr} = \sum_{1}^{3}{}_i\, x_{ir}\, x_{is}\,,$$

e pongo, con la notazione di Kronecker,

$$b_{rs} = \delta_{rs} + 2\,\varepsilon_{rs}\,.$$

Questa convenzione equivale ad assumere

$$\varepsilon_{rs} = \varepsilon_{sr} = \frac{1}{2}(u_{rs} + u_{sr}) + \frac{1}{2}\sum_i u_{ir}\, u_{is}: \tag{1}$$

saranno utili anche le notazioni

$$\eta_{rs} = \eta_{sr} = \frac{1}{2}(u_{rs} + u_{sr})\,. \tag{1$'$}$$

L'annullarsi delle sei ε_{rs} in tutto c_* è condizione necessaria e sufficiente perchè il ds^2 di c si presenti proprio in forma pitagorica, cioè perchè c possa differire da c_* solo per uno spostamento rigido. Comunque la *conoscenza* (8) delle ε_{rs} [o dei b_{rs}] in tutto c_* individua lo spostamento $c_* \to c$ a meno del *prodotto* per uno spostamento rigido, mentre la conoscenza, in tutto c_*, delle η_{rs}, individua lo stesso spostamento a meno dell'*aggiunta* di uno spostamento *del tipo* degli spostamenti rigidi infinitesimi:

$$s(P_*) = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{k} \wedge O\,P_* \tag{2}$$

con $\boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{k}$ di qualunque entità, ma indipendenti, come O, da P_*. Basta poi che tutte le ε_{rs} — o anche solo le η_{rs} — siano costanti in c_*, perchè le x si riducano a funzioni lineari delle y: *spostamento omogeneo.*

Ormai abituale è la denominazione di caratteristiche di deformazione *complete*, non proprio per le ε_{rs}, ma per le sei quantità

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{rr}\,, \quad \varepsilon_{3+r} = 2\,\varepsilon_{r+1,r+2} \tag{3}$$

e quella di caratteristiche di deformazione *linearizzate* per le sole parti di primo ordine nelle u',

$$\eta_r = \eta_{rr} = u_{rr}\,,\ \eta_{3+r} = 2\,\eta_{r+1,r+2} = u_{r+1,r+2} + u_{r+2,r+1}\,. \tag{3$'$}$$

La $\mathcal{D}(u')$ — dato che $\mathcal{D} - 1$ è il coefficiente di dilatazione cubica [locale] inerente al passaggio da c_* a c — deve dipendere dalle nove u' solo per il tramite delle $\varepsilon_j\,(j = 1, 2, \ldots 6)$ e neppure può dipendere dall'orientamento della $\mathcal{T}$. In realtà si trova subito

$$\mathcal{D}[\varepsilon] = \sqrt{1 + 2\,\mathrm{I}_1\,\varepsilon + 4\,\mathrm{I}_2\,\varepsilon + 8\,\mathrm{I}_3\,\varepsilon} \tag{4}$$

dove $\mathrm{I}_1\,\varepsilon, \mathrm{I}_2\,\varepsilon, \mathrm{I}_3\,\varepsilon$ sono *i tre invarianti principali di deformazione*:

$$\mathrm{I}_1\,\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\,,\ \mathrm{I}_2\,\varepsilon = \varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \varepsilon_2\,\varepsilon_3 + \varepsilon_3\,\varepsilon_1 - \frac{1}{4}\sum_r \varepsilon_{3+r}^2\,, \tag{5}$$

$$\mathrm{I}_3\,\varepsilon = \|\,\varepsilon_{rs}\,\|\,.$$

(8) Non voglio qui dilungarmi a parlare delle condizioni di congruenza di DE SAINT-VENANT, ecc.

Appresso indicherò con

$$\mathcal{D}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots 6)$$

le $\partial \mathcal{D}[\varepsilon]/\partial \varepsilon_j$ effettuate prescindendo da ogni eventuale legame tra le caratteristiche di deformazione e distinguerò sempre con un * i valori di una qualunque delle quantità in esame per $c \equiv c_*$ $[u_r \equiv 0, \varepsilon_j \equiv 0$, ecc.$]$. Ad es. risulta

$$\mathcal{D}_j^* = \delta_j, \tag{6}$$

pur d'intendere — ciò che farò anche in seguito — $\delta_j = 1$ ovvero $\delta_j = 0$ secondo che sia $j \leq 3$ oppure $j > 3$. Si noti che, in parallelo alle (6), si ha

$$\mathcal{D}_{rs}^* = \delta_{rs}. \tag{6$'$}$$

2. Espressione del $\partial l^{(i)}$ esplicitamente subordinata alla proprietà di simmetria delle ordinarie caratteristiche dello stress.

In corrispondenza a un qualunque $\partial s = \xi^*(P_*)$, le variazioni ∂x_{il} e $\partial \varepsilon_{lm}$ delle x_{il} e ε_{lm} $(l = 1, 2, 3)$ sono espresse da

$$\partial x_{im} = \xi_{im}^*, \quad \partial \varepsilon_{lm} = \frac{1}{2} \sum_i \{x_{il}\, \xi_{im}^* + \xi_{il}^*\, x_{im}\},$$

mentre l'*identità*

$$\xi_{rm}^* = \sum_i \xi_{im}^* \frac{\partial x_i}{\partial x_r} = \sum_{li} \xi_{im}^*\, x_{il} \frac{\partial y_l}{\partial x_r},$$

quando si ponga

$$Y_{lm} = \sum_r \frac{\partial y_l}{\partial x_r} K_{rm} = \mathcal{D} \sum_{rs} \frac{\partial y_l}{\partial x_r} \frac{\partial y_m}{\partial x_s} X_{rs}, \tag{7}$$

dà luogo [cfr.[9] (I, 5)] a

$$\partial l^{(i)} = dc_* \cdot \sum_{lm} Y_{lm} \sum_i x_{il}\, \xi_{im}^*: \tag{8}$$

tutto questo senza un esplicito intervento delle proprietà di simmetria delle caratteristiche *euleriane* dello stress, le X.

Ma in base a tali proprietà — che da questo punto intendo adoperare — si ha il fatto saliente [cfr. (7)] di analoghe proprietà di

[9] Cioè, la (5) della prima conferenza.

simmetria per le Y, caratteristiche *lagrangiane* dello stress,

$$Y_{lm} = Y_{ml}\,; \tag{9}$$

con l'immediata conclusione che $\partial\, l^{(i)}$ può pure esprimersi mediante una forma lineare nelle $\partial \varepsilon_j$; e precisamente si ha

$$\partial\, l^{(i)} = dc_* \cdot \sum_j Y_j\, \partial\, \varepsilon_j \tag{10}$$

se si pone $Y_{rr} = Y_r$ e

$$Y_{rs} = Y_{3+t}$$

per $s \neq r$, indicando con $t = 6 - r - s$, come farò in tutti i casi consimili, l'intero fra 1 e 3 diverso sia da r che da s. Ciò equivale a porre

$$Y_{rs} = Y_j$$

con $j = r$ per $s = r$ e $j = 3 + t = 9 - r - s$ per $s \neq r$: convenzione pure questa di carattere permanente.

Qualche volta converrà adoperare una notazione a un solo indice anche per le X, con posizioni del tutto analoghe.

Come le K, le Y non differiscono dalle X per $c \equiv c_*$, e sono sempre in corrispondenza biunivoca con le X, a parità di c_* e c.

3. Solidi incomprimibili a trasformazioni reversibili.

Per un sistema incomprimibile a trasformazioni reversibili, S_ϱ, e per ogni trasformazione elementare [isoterma] di una qualunque sua particella χ, l'intervento della (10) riduce la (I, 10) a

$$\sum_j Y_j\, \partial'\, \varepsilon_j = -\, dW\,,$$

se naturalmente si accennano con $\partial' \varepsilon_j$ le variazioni delle caratteristiche di deformazione corrispondenti a un $\partial' s$, soggette alla restrizione

$$0 = \partial' \mathcal{D} \equiv \sum_j \mathcal{D}_j\, \partial' \varepsilon_j\,.$$

Null'altro occorre per riconoscere che ormai il potenziale elastico [per ciascuna χ] potrà pensarsi anche come una funzione

$$W[\varepsilon]$$

delle sei ε_j, tra loro legate dalla condizione di incomprimibilità,

$$\mathcal{D}[\varepsilon] = 1\,; \tag{11}$$

funzione ben determinata se ben determinata s'intende la $W(u')$, conformemente a una convenzione della prima conferenza.

Indicherò con W_j, S_j le derivate [cfr. (I, 11) e (4)] della $W[\varepsilon]$ e della

$$S[\varepsilon] = W[\varepsilon] - \frac{p_*}{2}\{\mathcal{D}^2 - 1\} \equiv W[\varepsilon] - p_*\,\mathrm{I}_1\,\varepsilon - 2\,p_*\,\mathrm{I}_2\,\varepsilon - 4\,p_*\,\mathrm{I}_3\,\varepsilon$$

rispetto alle ε_j, effettuate [come le $\mathcal{D}_j$] prescindendo da (11).

Con queste notazioni [sarebbe facile controllarlo] le (I, 12) equivalgono a

$$Y_j = -S_j + \tilde{\omega}\,\mathcal{D}_j\,, \tag{12}$$

proprio con la stessa $\tilde{\omega}$.

Dato che per ogni χ rimane ovviamente disponibile in W una costante additiva, si può sempre intendere, e ormai intenderò,

$$W^* \equiv 0\,, \tag{13}$$

e quindi anche $S^* \equiv 0$.

Per $c \equiv c_*$, $p \equiv p_*$ le K e le Y vengono a coincidere nelle X, e dalle (I, 12) - (12), insieme a

$$X^*_{rs} = -S^*_{rs}\,, \tag{14}$$

risulta [10] $S^*_{rr} = S^*_r$ nonchè

$$S^*_{rs} = S^*_{sr} = S^*_{3+t} \qquad (s \neq r).$$

Dirò che c_* è *configurazione naturale* di S_ϱ quando, subordinatamente a una conveniente specificazione della $p_*(P_*)$, possa in c_*

[10] Queste ultime uguaglianze [cfr. (6)-(6)'] indipendentemente dal particolare significato della $S[\varepsilon]$, sono semplice conseguenza del fatto che, nel derivare rispetto alle u' per il tramite delle ε_j, in corrispondenza a c_* viene a essere nullo il contributo della parte di secondo grado di ciascuna delle ε_j, onde i singoli risultati non possono differire da quelli che si avrebbero assumendo fin da principio $\varepsilon_r = u_{rr}$, $\varepsilon_{3+t} = u_{rs} + u_{sr}$.

risultare identicamente nullo lo stress:

(15) $$X^*_{rs} = 0 \ldots c_* .$$

Stante la (14), una tale condizione equivale a quella che per $c \equiv c_*$ possano annullarsi tutte le derivate parziali prime di $S(u')$ e $S[\varepsilon]$, in ogni punto di c_*. Si tratta in sostanza di notevoli restrizioni per le W^*_{rs} [o W^*_j], in quanto le (15) equivalgono a

$$W^*_{rs} = p_* \, \delta_{rs} ,$$

ovvero a $W^*_j = p_* \, \delta_j$. La c_* è configurazione naturale solo se, in ogni suo punto, si annullano tutte le W^*_{rs} con indici diversi e le W^*_{rr} hanno uno stesso valore, proprio quello che va attribuito alla $p_*(P_*)$ perchè risulti identicamente nullo lo stress: *stato* naturale.

OSSERVAZIONE.

Indico con ϱ_t le tre componenti di $\mathrm{rot}_{P_*} \boldsymbol{s}$, cioè pongo, per $s \neq r$,

$$u_{rs} - u_{sr} = \pm \varrho_t$$

col segno $\pm$ secondo che $r\,s\,t$ sia o non sia una permutazione circolare di $3\,2\,1$. Parallelamente, sempre per $s \neq r$ e con la stessa convenzione riguardo al segno, pongo

$$2H_t = \pm (K_{rs} - K_{sr}) ,$$

cioè indico con H_t le componenti del vettore dell'omografia $\| K_{rs} \|$; mentre indicherò con

$$\bar{K}_{rs} = \frac{1}{2} (K_{rs} + K_{sr})$$

i coefficienti della corrispondente dilatazione.

Le $S(u')$ e $\mathcal{D}(u')$ possono evidentemente tradursi in funzioni ben determinate,

$$S\{\eta, \varrho\} , \qquad \mathcal{D}\{\eta, \varrho\} ,$$

delle sei caratteristiche di deformazione linearizzate,

$$\eta_r = u_{rr} , \qquad \eta_{3+t} = u_{rs} + u_{sr}$$

e delle tre ϱ_t. Basta allora pensare la S e la $\mathcal{D}$ come funzioni delle u' pel tramite delle η_j e ϱ_t, per riconoscere, senza alcuna difficoltà, che le (I, 12) equivalgono all'insieme delle tre uguaglianze

$$H_t = -\frac{\partial S\{\eta, \varrho\}}{\partial \varrho_t} + \tilde{\omega}\frac{\partial \mathcal{D}\{\eta, \varrho\}}{\partial \varrho_t}$$

e delle sei altre

$$\overline{K}_{rs} = -\frac{\partial S\{\eta, \varrho\}}{\partial \eta_j} + \tilde{\omega}\frac{\partial \mathcal{D}\{\eta, \varrho\}}{\partial \eta_j},$$

se anche qui s'intende $j = r$ per $s = r$ e $j = 3 + t$ per $s \neq r$.

Una tale trasformazione delle (I, 12) [al pari della (12)] risulta veramente opportuna sotto vario aspetto, ma in queste conferenze, per impellente motivo di brevità, dovrò accontentarmi di averla indicata.

4. Solidi elastici.

La forma effettiva della $W[\varepsilon]$ deve intendersi caratterizzata dalla natura del corpo schematizzato nel nostro sistema incomprimibile a trasformazioni reversibili, S_ϱ.

Per i solidi elastici — l'ho fatto presente fin dall'inizio della prima conferenza — la completa specificazione *locale* della W mette di fronte a gravissime difficoltà, non appena si rinunzi a trattare gli spostamenti elastici come spostamenti infinitesimi. Riparleremo in seguito di questo problema centrale, di vera Fisica matematica, ma per avviare, dico solo per avviare, sviluppi paralleli a quelli delle teorie classiche, può essere sufficiente qualche restrizione di carattere *globale*, imposta da esperienze banali.

Però in queste conferenze, sempre per brevità, devo fin d'ora trascurare tutto ciò che può avere rapporto con l'eventuale intervento di autotensioni, ovvero con fenomeni di stabilità *artificiale*, subordinatamente a opportuni vincoli in superficie [corde elastiche]: e così prendo le mosse da restrizioni che in parte hanno anche carattere locale, assumendo quale *proprietà principale* dei solidi elastici incomprimibili, S_e, quella di ammettere qualche *stato naturale intrinsecamente stabile, C*.

A partire da C prendiamo in esame una qualunque trasformazione isoterma,

$$\overline{\mathcal{T}} \doteq C \rightarrow \overline{c},$$

che magari [a differenza della $c_* \to c$] non si uniformi ai vincoli in superficie, ma [come la $c_* \to c$] rispetti il vincolo intrinseco di incomprimibilità: e sia $\bar{\mathcal{L}}$ il lavoro complessivo delle forze intime in $\bar{\mathcal{T}}$. Dicendo stato naturale « intrinsecamente stabile » voglio, s'intende, aggiungere la restrizione

$$\bar{\mathcal{L}} < 0$$

per ogni $\bar{\mathcal{T}}$, finita o *infinitesima*, che non corrisponda a un semplice spostamento rigido [11].

In questa « proprietà principale degli S_e» è implicito che a partire da un C se ne può ottenere un altro, C', solo mediante uno spostamento rigido: altrimenti $\bar{\mathcal{L}}$ certo verrebbe a essere negativo per ogni trasformazione isoterma *di* C *in se stesso* che portasse S_e a transitare per C'.

D'ora innanzi, insieme alla specializzazione di S_ϱ in un S_e, rimarrà sottintesa quella dello stato di riferimento in un C: ciò che [12] individua c_* a meno di uno spostamento rigido che rispetti i vincoli in superficie, quando pure questi ne consentano qualcuno.

Per una qualunque $\bar{\mathcal{T}}$ indicherò con $\zeta(P_*) \equiv (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ lo spostamento locale, con ζ' l'insieme delle ζ_{rs}, con $\bar{\varepsilon}_j$ i valori finali delle caratteristiche di deformazione complete, espressi da $\bar{\varepsilon}_r = \bar{\varepsilon}_{rr}$, $\bar{\varepsilon}_{3+r} = 2\bar{\varepsilon}_{r+1,\, r+2}$ se si pone

$$\bar{\varepsilon}_{rs} = \frac{1}{2}(\zeta_{rs} + \zeta_{sr}) + \frac{1}{2}\sum_i \zeta_{ir}\,\zeta_{is}. \tag{16}$$

Sarà dunque

$$\mathcal{D}(\zeta') \equiv \mathcal{D}[\bar{\varepsilon}] = 1 \ldots c_* \tag{17}$$

l'*unica* restrizione da intendersi verificata dalla funzione vettoriale $\zeta(P_*)$.

Per un'intera $\bar{\mathcal{T}}$ il lavoro delle forze intime relativo alla generica particella del sistema dipende dalle sole $\bar{\varepsilon}_j$ e precisamente [stante la convenzione (13)] è uguale a $-dc_* \cdot W[\bar{\varepsilon}]$. Quindi $\bar{\mathcal{L}}$ viene a esser

(11) Altrimenti $\bar{\mathcal{L}}$ è necessariamente nullo; come non può essere che nullo *per ogni* $\bar{\mathcal{T}}$ nel caso dei liquidi perfetti.

(12) Si è già convenuto che c_* si uniformi ai vincoli in superficie.

dato da $-\overline{V}$ se si pone, tenendo conto della (17),

$$\overline{V} = \int_{c_*} S[\bar{\varepsilon}]\, dc_* .$$

In definitiva la proprietà principale degli S_e resta tradotta dalle condizioni locali

$$(S)_1 \qquad S^* = 0\,, \qquad S_j^* = 0 \;\ldots\; c_*\,,$$

che [oltre a $W^* = 0$] implicano la specificazione della $p_*(P_*)$ in $W_1^* = W_2^* = W_3^*$, e dalla assai più restrittiva condizione globale

$$(S)_2 \qquad \int_{c_*} S[\bar{\varepsilon}]\, dc_* > 0$$

per ogni $\overline{\mathcal{T}}$, finita o *infinitesima*, che non corrisponda a uno spostamento rigido.

Però anche la $(S)_2$ si riduce a una restrizione di carattere locale non appena S_e sia omogeneo in c_* [e quindi neppure la S dipenda esplicitamente dalle y_r]. Precisamente allora la $(S)_2$ viene a equivalere alla condizione che, almeno per ogni scelta dei sei argomenti subordinata al loro significato di caratteristiche di deformazione e al vincolo (17), sia

$$(S)_0 \qquad S[\bar{\varepsilon}] \geq 0\,,$$

col segno $=$ solo quando tutte le $\bar{\varepsilon}_j$ siano nulle: per convincersene, basta pensare omogeneo anche lo spostamento $c_* \to \bar{c}$.

5. Una basilare conseguenza delle (S).

Pensiamo ora a una qualunque $\overline{\mathcal{T}}$, $\overline{\mathcal{T}}_\lambda$, che dipenda, regolarmente, da un parametro λ, con $\bar{c} \equiv c_*$ per $\lambda = 0$. Vengono così a figurare come funzioni [regolari] di λ sia ζ e le $\bar{\varepsilon}_{rs}$, sia $\overline{V}$:

$$\zeta(P_*, \lambda)\,, \quad \bar{\varepsilon}_{rs}(P_*, \lambda)\,, \quad \overline{V}(\lambda)$$

con

$$\zeta(P_*, 0) \equiv 0\,, \qquad \bar{\varepsilon}_{rs}(P_*, 0) \equiv 0\,.$$

Converrà porre

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = \boldsymbol{w}(P_*) \equiv (w_1\,, w_2\,, w_3)$$

e

$$\eta_{rs}^{(w)} = \frac{1}{2}(w_{rs} + w_{sr})\,, \quad \eta_r^{(w)} = \eta_{rr}^{(w)}\,, \quad \eta_{3+r}^{(w)} = 2\eta_{r+1,\,r+2}^{(w)}\,;$$

ciò che corrisponde a indicare con $\boldsymbol{w}\, d\lambda$ lo spostamento locale e con $\eta_j^{(w)}\, d\lambda$ i valori finali delle caratteristiche di deformazione per una $\overline{\mathcal{T}}_\lambda$ infinitesima.

Parallelamente da (16) risulta

$$\left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_{rs}}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = \eta_{rs}^{(w)}\,, \quad \left(\frac{\partial \bar{\varepsilon}_j}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = \eta_j^{(w)}\,, \tag{18}$$

e la (17) [che è l'unica restrizione convenuta per $\overline{\mathcal{T}}_\lambda$] dà, come unica restrizione per la $\boldsymbol{w}(P_*)$,

$$0 = \sum_1^3{}_j\, \eta_j^{(w)} \equiv \operatorname{div}_{P_*} \boldsymbol{w}\,: \tag{19}$$

è ben naturale che il solo vincolo di incomprimibilità lasci alla $\boldsymbol{w}(P_*)$ la possibilità di rappresentare *un qualsiasi* vettore solenoidale in c_*.

Riprendiamo ora le (S), cominciando col rilevare che, qualunque possa essere la $\overline{\mathcal{T}}_\lambda$, le $(S)_1$, da sole, implicano

$$V(0) = 0\,, \quad \left(\frac{dV}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = 0\,, \tag{20}$$

nonchè, col concorso delle (18),

$$\left(\frac{d^2 V}{\partial \lambda^2}\right)_{\lambda=0} = \int_{c_*} dc_* \cdot \sum_{iq} \left(\frac{\partial^2 S[\bar{\varepsilon}]}{\partial \bar{\varepsilon}_j\, \partial \bar{\varepsilon}_q}\right)^* \eta_j^{(w)}\, \eta_q^{(w)}\,,$$

senza che resti traccia delle $(\partial^2 \zeta_r / \partial \lambda^2)_{\lambda=0}$.

Poniamo

$$M_{jq}(P_*) = \left(\frac{\partial^2 W[\bar{\varepsilon}]}{\partial \bar{\varepsilon}_j\, \partial \bar{\varepsilon}_q}\right)^* \equiv \left(\frac{\partial^2 W[\varepsilon]}{\partial \varepsilon_j\, \partial \varepsilon_q}\right)^* \quad (j, q = 1, 2, \ldots 6),$$

convenendo poi di indicare con $Q[\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_6] \equiv Q[\xi]$ la forma quadratica

$$\frac{1}{2} \sum_{jq} M_{jq}\, \xi_j\, \xi_q + p_* \left\{ \sum_r \xi_r^2 + \frac{1}{2} \sum_r \xi_{3+r}^2 \right\}.$$

Insieme rileviamo [cfr. (4) e (5)] che la diretta espressione della $S[\bar{\varepsilon}]$ può sostituirsi con

$$S[\bar{\varepsilon}] = W[\bar{\varepsilon}] - p_*\, \mathrm{I}_1 \bar{\varepsilon} + p_* \left\{ \sum_r \bar{\varepsilon}_r^2 + \frac{1}{2} \sum_r \bar{\varepsilon}_{3+r}^2 - (\mathrm{I}_1 \bar{\varepsilon})^2 \right\} - 4 p_*\, \mathrm{I}_3 \bar{\varepsilon},$$

che a sua volta si riduce a

$$S[\bar{\varepsilon}] = Q[\bar{\varepsilon}] - p_* (\sum_r \bar{\varepsilon}_r)^2 + \ldots \tag{21}$$

non appena la si pensi sviluppata secondo la formula di TAYLOR, rivolgendo l'attenzione ai soli termini di ordine minimo nelle $\bar{\varepsilon}_j$, che è il *secondo* [donde la notazione S]. Insomma, per $\bar{c} \equiv c_*$, accanto all'annullarsi di S e di tutte le S_j, si ha l'esatta coincidenza delle singole $\partial^2 S[\bar{\varepsilon}] / \partial \bar{\varepsilon}_j\, \partial \bar{\varepsilon}_q$ con gli omologhi coefficienti della forma quadratica $2\{Q[\bar{\varepsilon}] - p_* (\Sigma \bar{\varepsilon}_r)^2\}$, in modo che, qualunque possa essere la $\bar{\mathcal{G}}_\lambda$, risulta [cfr. (19)]

$$\left(\frac{d^2 V}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=0} = 2 \int_{c_*} \{ Q[\eta^{(w)}] - (\sum_r \eta_r^{(w)})^2 \}\, dc_* = 2 \int_{c_*} Q[\eta^{(w)}]\, dc_*.$$

Facciamo ora intervenire la $(S)_2$. Come già ripetutamente ho voluto far rimarcare, essa s'intende valida anche per una $\bar{\mathcal{G}}_\lambda$ infinitesima ([13]). Quindi, stante le (20), la $(S)_2$ viene a imporre proprio

$$\left(\frac{d^2 V}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=0} > 0,$$

tutte le volte che non si abbia a che fare con semplici spostamenti rigidi.

([13]) È una restrizione del tutto analoga a quella che normalmente si adopera nella teoria delle piccole oscillazioni di un sistema olonomo attorno a una configurazione di equilibrio stabile [minimo dell'energia potenziale riconoscibile sulle derivate parziali seconde].

Come conclusione, resta messo in luce che le (S) [dettate da esperienze banali] si riflettono in una netta — e, sotto vari aspetti, essenziale — restrizione globale per i soli coefficienti della Q; quella che risulti

$$(Q) \qquad \int_{c_*} Q\,[\eta^{(w)}]\, dc_* > 0$$

in corrispondenza a ogni scelta del vettore solenoidale $w(P_*)$ che non dia luogo all'annullarsi di ciascuna $\eta_j^{(w)}$ in tutto c_*.

Basta che in c_*, per ogni j, sia $\eta_j^{(w)} \equiv \text{cost.} = \xi_j$ [spostamento omogeneo] perchè, detti $\overline{M}_{jq}$ e $\overline{p}_*$ i valori medi degli M_{jq} e p_*, la (Q) dia luogo a

$$\frac{1}{2}\sum_{jq} \overline{M}_{jq}\, \xi_j\, \xi_q + \overline{p}_* \left\{ \sum_r \xi_r^2 + \frac{1}{2}\sum_r \xi_{3+r}^2 \right\} > 0,$$

almeno per ogni sestupla di valori non tutti nulli delle ξ che verifichi l'uguaglianza $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$: anzi questa necessaria restrizione per gli $\overline{M}_{jq}$ e $\overline{p}_*$, proprio equivale alla (Q) se S_e è omogeneo in c_*.

6. Riassunto.

Per ogni S_ϱ in quiete sono state fissate [cfr. pp. 7-9-13] le uguaglianze locali

$$(22) \qquad \mathcal{D}(u') = 1 \ldots\; c_*$$

e

$$(23) \qquad \begin{cases} \sum_s \mathcal{D}_{rs} \dfrac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y_s} - \sum_s \dfrac{\partial S_{rs}}{\partial y_s} = F_r^*(P_*) \;\ldots\ldots\; c_* \\[2ex] \tilde{\omega} \sum_s \mathcal{D}_{rs}\, \nu_s^* - \sum_s S_{rs}\, \nu_s^* = \begin{cases} f_r^*(Q_*) \;\ldots\; \sigma_l^*\,, \\ 0 \;\ldots\ldots\; \Delta\sigma_*\,, \\ \Phi_r^* \;\ldots\ldots\; a\,, \end{cases} \end{cases}$$

dove

$$S = W[\varepsilon] - \frac{p_*}{2}\{\mathcal{D}^2[\varepsilon] - 1\},$$

$a \equiv \sigma_v^* - \Delta\sigma_*$ e

$$(24) \qquad \Phi^* \times v^* \geq 0 \;\ldots\; a,$$

se naturalmente si continua ad accennare con $\boldsymbol{v}(P) = \boldsymbol{v}^*(P_*)$ un qualunque spostamento virtuale *a partire dalla configurazione attuale.*

Rispetto al generico S_ϱ, un S_e, dopo la ormai convenuta specificazione di c_* in una configurazione naturale intrinsecamente stabile, per ora s'intende caratterizzato solo dalle restrizioni $(S)_1$ ed $(S)_2$, per la S o la W,

$$(S) \qquad \begin{cases} S^* = 0\,, \qquad S_j^* = 0 \;\ldots\; c_*\,, \\ \displaystyle\int_{c_*} S[\bar{\varepsilon}]\, dc_* \geq 0\,, \end{cases}$$

le quali però implicano

$$(Q) \qquad \int_{c_*} Q\,[\eta^{(w)}]\, dc_* \geq 0\,.$$

Le sole (23) possono sintetizzarsi nell'uguaglianza scalare

$$(25) \qquad -\sum_{rm} \int_{c_*} S_{rm}\, z_{rm}^*\, dc_* + \int_{c_*} \boldsymbol{F}^*\, dc_* \times \boldsymbol{z}^* + \\ + \int_{\sigma_l^*} \boldsymbol{f}^*\, d\sigma_l^* \times \boldsymbol{z}^* + \int_{a} \boldsymbol{\Phi}^*\, d\sigma_v^* \times \boldsymbol{z}^* = 0\,,$$

purchè la si intenda valida per ogni scelta della funzione vettoriale $\boldsymbol{z}^*(P_*) = \boldsymbol{z}(P)$ fra tutte quelle che, in corrispondenza al considerato stato di quiete, c, rendono soddisfatta l'uguaglianza

$$(25)' \qquad \sum_{rm} \mathcal{D}_{rm}\, z_{rm}^* = 0 \;\ldots\; c_*\,,$$

equivalente a

$$\operatorname{div}_P \boldsymbol{z} = 0 \;\ldots\; c\,.$$

Si possono anche sintetizzare le (23) e (24) in una relazione pura, la *relazione simbolica*

$$(26) \quad -\sum_{rm} \int_{c_*} S_{rm}\, v_{rm}^*\, dc_* + \int_{c_*} \boldsymbol{F}^*\, dc_* \times \boldsymbol{v}^* + \int_{\sigma_l^*} \boldsymbol{f}^*\, d\sigma_l^* \times \boldsymbol{v}^* \leq 0\,,$$

da intendersi valida per ogni funzione vettoriale $\boldsymbol{v}^*(P_*) = \boldsymbol{v}(P)$ che, oltre rendere soddisfatta l'uguaglianza

$$(26)' \qquad \sum_{rm} \mathcal{D}_{rm} v^*_{rm} = 0 \ldots c_*,$$

equivalente a

$$\mathrm{div}_P\, \boldsymbol{v}(P) = 0 \ldots c,$$

si uniformi su $\sigma_v - \Delta\sigma$ *ai vincoli attuali*: restando poi localmente arbitraria, anche in verso, tanto su σ_l, *quanto su* $\Delta\sigma$. Assegnata la sollecitazione attiva, quando si sia riusciti a determinare le tre $u_r(P_*)$ — e quindi $\Delta\sigma$ — in modo da rendere completamente soddisfatta la relazione simbolica [insieme alla (22)] si potrà ulteriormente ricorrere alle (23) per ricavarne, con sole quadrature, le reazioni vincolari, dopodichè resteranno univocamente determinate le K_{rm}, da

$$K_{rm} = - S_{rm} + \tilde{\omega}\, \mathcal{D}_{rm}$$

e successivamente le X_{rs}, da

$$(27) \quad X_{rs} = - \sum_m S_{rm}\, x_{sm} + \tilde{\omega}\, \delta_{rs} = - (S_{rs} + \sum_m S_{rm}\, u_{sm}) + \tilde{\omega}\, \delta_{rs}.$$

III. Statica semilinearizzata

1. Piccole trasformazioni.

Questa conferenza riguarderà, sempre nell'ambito della Statica isoterma, solo le piccole trasformazioni degli S_e.

Sia dP_* un qualunque elemento lineare di c_* e dP il corrispondente elemento di c: insieme sia

$$\delta_a = \frac{|dP| - |dP_*|}{|dP_*|}$$

l'allungamento unitario di dP e θ la misura in radianti della sua deviazione $\widehat{dP_*\, dP}$. Dicendo *piccole trasformazioni* voglio proprio asserire la possibilità di trascurare, rispetto all'unità, tanto ogni δ_a, *quanto ogni* θ.