L i q u i d i p e r f e t t i. — Dicendo *liquido perfetto* intendo riferirmi a un G_ϱ pel quale il potenziale termodinamico venga a non dipendere effettivamente dalle ε:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}[T].$$

In questo caso — che, è inutile dirlo, resterà nettamente escluso dalla definizione dei solidi elastici incomprimibili — si annulla identicamente la φ e la (21) dà $\varkappa = p\mathrm{R}\alpha$. Quindi, stante l'identità $\varkappa = \beta\mathrm{R}\alpha$, semplicemente risulta [come era ben prevedibile]

$$\beta = p, \qquad \boldsymbol{\Phi}_n = p\boldsymbol{n}.$$

Al tempo stesso dalle (22) si hanno, come *equazioni lagrangiane dell'Idrostatica*, le

$$\mathrm{R}\alpha\,(\mathrm{grad}_{P^*} p) = k^* \boldsymbol{F} \ldots C_*, \qquad p\mathrm{R}\alpha \boldsymbol{N}^* = \boldsymbol{f}^* \ldots \Sigma_*. \tag{23}$$

V. Intervento delle terne principali di deformazione.

Per piccole trasformazioni notoriamente conviene la sistematica decomposizione dell'omografia

$$\alpha \equiv \| x_{ik} \|$$

nella somma di una dilatazione [omografia a matrice simmetrica] con una omografia assiale [omografia a matrice antisimmetrica]. Per trasformazioni finite conviene invece decomporre la α nel *prodotto* di due omografie, con le modalità che mi appresto a precisare per poi metter subito in rilievo, in vario modo, la loro efficacia.

1. Deformazione pura e rotazione locale.

Ogni dilatazione ammette una *terna unita trirettangola.* In altri termini, quando l'omografia $\gamma \equiv \| g_{ik} \|$ è a matrice simmetrica, esistono tre versori $\boldsymbol{i}_r$ $(r = 1, 2, 3)$ mutuamente ortogonali tali che ognuno dei $\gamma\boldsymbol{i}_r$ conserva la direzione, se non il verso, del relativo $\boldsymbol{i}_r$. Esistono cioè tre scalari Γ_r — i coefficienti principali della dilatazione — tali che

$$\gamma \boldsymbol{i}_r = \Gamma_r \boldsymbol{i}_r :$$

essi coincidono con le tre radici dell'equazione secolare in Γ

$$\| g_{ik} - \delta_{ik} \Gamma \| = 0.$$

Unica è la terna trirettangola unita di γ se i tre coefficienti principali sono tutti diversi, mentre è unita ogni terna trirettangola di cui faccia parte i_r ogniqualvolta sia $\Gamma_{r+1} = \Gamma_{r+2}$.

Ho ormai l'abitudine di chiamare *dilatazione pura* una dilatazione [propria] per la quale tutti tre i coefficienti principali siano positivi, in modo che nella corrispondente [27] affinità [non degenere] si abbiano tre *semirette* unite mutuamente ortogonali. Risulta sempre una dilatazione pura la

$$\tilde{\omega} = \mathrm{K}\alpha \cdot \alpha$$

per il solo fatto che la α non è mai degenere $[\mathcal{D} \neq 0]$.

È poi superfluo ricordare che un'omografia vettoriale prende il nome speciale di « rotore » se la corrispondente affinità equivale a uno spostamento rigido con un punto fisso.

Sia α_δ la dilatazione pura univocamente caratterizzata dall'uguaglianza

$$\alpha_\delta^2 = \tilde{\omega} = 1 + 2\varepsilon, \tag{1}$$

cioè la dilatazione pura che si ricava dalla $\tilde{\omega}$ quando, senza toccare le sue direzioni unite, si sostituisce ciascuno dei suoi coefficienti principali col valore assoluto della rispettiva radice quadrata.

La α_δ si riduce alla α solo quando anche questa sia una dilatazione pura, ma neppure è difficile riconoscere che la condizione $\mathcal{D} > 0$ basta sempre a garantire la possibilità di decomporre la α nel prodotto della α_δ per un conveniente rotore α_ϱ,

$$\alpha = \alpha_\varrho \alpha_\delta : \tag{2}$$

anzi è questo l'unico modo di decomporre la α nel prodotto di una dilatazione pura per un rotore.

Ebbene, proprio la (2) è la formula di decomposizione che meglio conviene per i successivi sviluppi, insieme alla denominazione di *deformazione pura in P^** per la α_δ e a quella di *rotazione in P^** o *rotazione locale* per α_ϱ.

2. Una notevole decomposizione dell'omografia euleriana di tensione.

Per mettere subito in rilievo l'utilità di questa decomposizione, riprendo le uguaglianze che, per un qualunque sistema continuo S,

[27] Quella che ad es. intercorre tra i punti V e W se si pone $OW = \gamma(OV)$.

legano l'omografia $\varkappa$ di KIRCHHOFF all'omografia euleriana e all'omografia lagrangiana di tensione, β e β_*:

$$\varkappa = \beta \mathrm{R}\alpha = \alpha\beta_* .$$

La (2) — sarebbe facile controllarlo — equivale a

$$\mathrm{R}\alpha = \alpha_\varrho \cdot \mathcal{D}\alpha_\delta^{-1},$$

in modo che β e β_* vengono a essere legate dall'uguaglianza

$$\beta \cdot \mathcal{D}\alpha_\varrho \alpha_\delta^{-1} = \alpha_\varrho \alpha_\delta \beta_* :$$

e questa neppure differisce da

$$\beta = \alpha_\varrho \beta'_* \alpha_\varrho^{-1} \tag{3}$$

se si pone

$$\beta'_* = \frac{1}{\mathcal{D}}\, \alpha_\delta \beta_* \alpha_\delta .$$

Così la β'_* certo risulta una dilatazione [perchè evidentemente non differisce dalla sua coniugata] e la (3) viene a presentare la β come *la trasformata della* β'_* *mediante il rotore* α_ϱ. Resta quindi messo in luce che le due dilatazioni β e β'_* differiscono solo per l'orientamento dei loro assi principali. Più precisamente si ha che:

a) il rotore α_ϱ stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le direzioni unite di β'_* e quelle di β, *direzioni principali di tensione;*

b) le *tensioni principali* B_1, B_2, B_3 in P [coefficienti principali di β] ordinatamente coincidono con i coefficienti principali di β'_*, cioè con le radici dell'equazione secolare in B

$$\| Z_{ik} - \delta_{ik} B \| = 0 , \tag{4}$$

se si accennano con Z_{ik} i coefficienti della β'_* rispetto alla $\mathcal{T}$ [comunque prefissata].

Ad es. basta che S sia un G_ϱ, perchè [quando sia assegnata la forma effettiva del potenziale termodinamico] la β_* resti localmente individuata dalle ε_j, p e T; onde lo stesso può ripetersi [28] per la β'_*, con l'immediata conseguenza che le tre tensioni principali restano

[28] La α_δ è sempre localmente individuata dalle sole ε_j.

sempre localmente individuate *solo* dalle caratteristiche di deformazione, dalla pressione e dalla temperatura [in base all'equazione secolare (4)] mentre le direzioni principali di tensione direttamente dipendono *anche* dalla rotazione locale [in quanto possono ottenersi solo trasformando mediante α_ϱ le direzioni unite di β'_*].

Nel caso tanto più particolare dei liquidi perfetti si riconosce subito che è

$$\beta'_* = p = \beta :$$

le tre tensioni principali coincidono in p, qualunque terna trirettangola è unita per β'_*, come per β.

3. Un teorema di esclusione nella Statica isoterma.

Riprendo le equazioni raggiunte per ogni sistema incomprimibile a trasformazioni reversibili, G_ϱ, al termine della prima conferenza:

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{R}\alpha\,(\mathrm{grad}_{P^*}p) - \sum_k \frac{\partial \alpha\varphi c_k}{\partial y_k} = k^* \boldsymbol{F} \ldots C_*, \\ &(p\mathrm{R}\alpha - \alpha\varphi)\,\boldsymbol{N}^* = \boldsymbol{f}^* \ldots \Sigma_*, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

dove φ sta a indicare il prodotto per k^* della dilatazione associata al potenziale termodinamico.

Pensiamo per un momento alla sola Statica isoterma,

$$T = T_*, \quad \mathcal{D}[\varepsilon] = 1 \ldots C_*, \tag{6}$$

per un G_ϱ non soggetto a vincoli in superficie, intendendo proprio assegnate tutte le forze di massa e le forze al contorno, nonchè l'espressione effettiva del potenziale termodinamico.

Le (5)-(6) non possono non lasciare indeterminata una traslazione d'insieme, pel semplice motivo che, in corrispondenza a ciascun P^*, quando a $\boldsymbol{s}$ si aggiunga un qualsiasi vettore costante, insieme ad α, α_δ e ε resta esattamente invariata la φ, qualunque possa essere la struttura del potenziale termodinamico. È inutile aggiungere che, anche trascurando tale inessenziale indeterminazione, non è affatto detto che il sistema in esame univocamente determini la $\alpha(P^*)$, mentre, se ciò si verifica, resta pure univocamente determinata la pressione [29].

[29] Dato che allora le (5) si riducono a dare $\mathrm{grad}_{P^*} p$ in tutto C_* e p in tutto Σ_*.

Però si può nettamente mettere in luce una circostanza di cui non resta traccia nelle teorie linearizzate e cioè che sussiste il seguente *teorema di esclusione*: *gli spostamenti*

$$C_* \to C\,, \quad C_* \to C'$$

inerenti a due diverse soluzioni delle (5) *e* (6) *non possono differire per una semplice rotazione rigida*, a meno che tutte le forze

$$\boldsymbol{F}\cdot k^*\, dC_*\,, \qquad \boldsymbol{f}^*\cdot d\Sigma_*$$

ammettano una stessa direzione, destinata a essere quella dell'asse di tale rotazione. *In ogni altro caso una indeterminazione di* $\boldsymbol{s}$ *effettiva* [cioè non limitata all'aggiunta di un vettore costante] *deve riflettersi anche in una qualche indeterminazione della deformazione pura.* Confermerò questa circostanza inaspettata con un esempio tangibile nella penultima conferenza.

Frattanto, per tracciare la dimostrazione dell'asserto, convengo di distinguere con un apice tutto ciò che può riguardare C' e rivolgo la attenzione al fatto che la nostra ipotesi implica

$$\alpha' = \mathcal{R}\alpha\,, \quad \mathrm{R}\alpha' = \mathcal{R}\mathrm{R}\alpha$$

con $\mathcal{R}$ rotore costante.

In base a questo dalle (5) risulta

$$\begin{cases} k^*\boldsymbol{F} = \mathcal{R}(k^*\boldsymbol{F}) + \mathcal{R}\mathrm{R}\alpha\, \mathrm{grad}_{P^*}(p'-p) \ldots C_* \\ \boldsymbol{f}^* = \mathcal{R}(\boldsymbol{f}^*) + (p'-p)\,\mathcal{R}\mathrm{R}\alpha\, \boldsymbol{N}^* \ldots \Sigma_*\,. \end{cases}$$

Per dimostrare che deve essere

$$k^*\boldsymbol{F} = \mathcal{R}(k^*\boldsymbol{F}) \ldots C_*\,, \quad \boldsymbol{f}^* = \mathcal{R}(\boldsymbol{f}^*) \ldots \Sigma_* \tag{7}$$

basterà dunque accertare che le equazioni ora scritte hanno come necessaria conseguenza

$$p'(P^*) = p(P^*) \ldots C_*\,. \tag{8}$$

L'equazione indefinita equivale a [30]

$$(\mathcal{R}^{-1} - 1)\, k^*\boldsymbol{F} = \mathrm{R}\alpha\, \mathrm{grad}_{P^*}(p'-p) = \mathcal{D}\, \mathrm{grad}_P (p'-p)$$

[30] Qualunque sia lo scalare $m^*(P^*) = m(P)$ si ha $\mathrm{R}\alpha(\mathrm{grad}_{P^*} m^*) = \mathcal{D}\mathrm{grad}_P m$.

e l'equazione al contorno a

$$(\mathcal{R}^{-1}-1)\,f^*\,d\Sigma_* = (p'-p)\,\mathrm{R}\alpha\,(N^* d\Sigma_*) = (p'-p)\,N\,d\Sigma\,.$$

D'altra parte il trasformato di un qualunque vettore mediante $\mathcal{R}^{-1}-1$ è normale al comune asse, a, di $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}^{-1}$, onde la nostra ipotesi impone che lo stesso si verifichi per $\mathrm{grad}_P(p'-p)$ nello intero C e per $(p'-p)\,N$ sull'intero Σ. La prima condizione dice solo che $p'-p$ dovrà avere uno stesso valore lungo ogni corda l di C parallela ad a, ma la seconda aggiunge che agli estremi di ciascuna l tale differenza non potrà essere che nulla, onde resta esattamente dimostrata la necessità della (8) e con essa quella delle (7).

4. Terne principali di deformazione.

Come è tradizionale, dirò che la terna *trirettangola*

$$\mathcal{P} \equiv P^*\,\boldsymbol{i}_1\,\boldsymbol{i}_2\,\boldsymbol{i}_3$$

è *terna principale di deformazione per* P^* quando essa è terna unita per la deformazione pura in P^*, $(\alpha_\delta)_{P^*}$. Questa definizione esattamente equivale a chiamare la $\mathcal{P}$ terna principale di deformazione soltanto quando è trirettangola anche la sua immagine

$$\mathcal{P}_\varrho \equiv \alpha_\varrho\,\mathcal{P}$$

sulla configurazione attuale: onde una terna trirettangola di origine P è terna principale di deformazione per lo *spostamento inverso*,

$$C \to C_*\,,$$

soltanto quando la sua immagine su C_* è terna principale di deformazione per $C_* \to C$.

Appresso saranno sempre indicati con d_r i coefficienti principali della α_δ, con Δ_r gli *allungamenti principali*, legati ai d_r dalle eguaglianze

$$d_r = 1 + \Delta_r\,:$$

onde avremo

$$\mathcal{D} = d_1 d_2 d_3 = (1+\Delta_1)(1+\Delta_2)(1+\Delta_3)\,.$$

Indicherò invece con A_r i coefficienti principali della $\bar{\omega}$ e con E_r le *caratteristiche principali di deformazione* [i coefficienti principali della ε] legate agli A_r e ai Δ_r dalle uguaglianze

$$1 + 2E_r = A_r = (1 + \Delta_r)^2 :$$

per piccole trasformazioni le E_r si confondono con i Δ_r.

Per un determinato P^* si ha un'unica terna principale di deformazione solo nel caso generico di allungamenti principali tutti tre diversi, ma per semplicità di linguaggio non terrò sistematicamente presente l'eventualità opposta: onde parlerò *della* terna principale di deformazione, ecc.

Continuando a pensare a un qualunque sistema continuo S, siano Y^*_{rs} $(r, s = 1, 2, 3)$ i coefficienti di β_* [in P^*] *rispetto alla* $\mathcal{P}$ e X^*_{rs} le ordinarie caratteristiche dello stress *rispetto alla* $\mathcal{P}_\varrho$.

Stante la (3) gli X^*_{rs} devono ordinatamente coincidere con i coefficienti Z^*_{rs} della

$$\beta'_* = \frac{1}{\mathcal{D}} \alpha_\delta \, \beta_* \, \alpha_\delta$$

rispetto alla $\mathcal{P}$. D'altra parte, essendo $\mathcal{P}$ terna unita di α_δ, si ha

$$\alpha_\delta \, \boldsymbol{i}_s = d_s \cdot \boldsymbol{i}_s \qquad (s = 1, 2, 3)$$

e quindi

$$\mathcal{D} Z^*_{rs} = \boldsymbol{i}_r \times \alpha_\delta \beta_* \, \alpha_\delta \boldsymbol{i}_s = \alpha_\delta \boldsymbol{i}_r \times \beta_* \alpha_\delta \boldsymbol{i}_s = d_r d_s Y^*_{rs} .$$

In conclusione rimane stabilito che tra le X^* e Y^* sussistono le semplici uguaglianze

$$X^*_{rs} = \frac{d_r d_s}{d_1 d_2 d_3} Y^*_{rs} . \tag{9}$$

Si noti che in ogni caso le X^*_{rr} danno gli sforzi normali sui tre elementi di superficie $d\sigma$ di C corrispondenti ai tre elementi di superficie $d\sigma_*$ di C_* che in P^* sono ortogonali a $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$; elementi $d\sigma$ che in genere non saranno ortogonali a direzione unite di β.

Per quanto invece riguarda le tensioni principali B_r, finchè si parla di un sistema continuo qualunque si può solo aggiungere che esse dovranno dare le tre radici dell'equazione secolare

$$\left| \frac{d_r d_s}{d_1 d_2 d_3} Y^*_{rs} - \delta_{rs} B \right| = 0. \tag{10}$$

VI. Estensione delle formule di Almansi, sistemi isotropi.

In questa conferenza mi propongo in primo luogo di richiamare l'attenzione su certe formule che in modo espressivo estendono a un qualunque G_ϱ [sistema incomprimibile a trasformazioni reversibili] le espressioni assegnate da Almansi, fin dal 1911, alle tensioni principali di un comune solido elastico isotropo. Da quelle formule, passando a parlare specificamente dei G_ϱ *isotropi nello stato di riferimento,* potrò agevolmente dedurre che per questi le ordinarie caratteristiche dello stress vengono a dipendere — oltre che dalla pressione e dalla temperatura — *solo* dalle caratteristiche di deformazione dello spostamento inverso: senza un esplicito intervento della rotazione locale.

1. Lemmi di Cinematica.

Mantengo le notazioni della conferenza precedente per un determinato stato $\mathcal{H}$ di G_ϱ, rivolgendomi a un determinato punto P^*, comunque scelto in C_*. Insieme, indipendentemente dallo speciale significato della terna trirettangola

$$\mathcal{P} \equiv P^* \boldsymbol{i}_1 \boldsymbol{i}_2 \boldsymbol{i}_3,$$

introduco tre parametri

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$$

con l'unica restrizione che complessivamente essi risultino in corrispondenza biunivoca col generico orientamento della $\mathcal{P}$. Ad es. potrà trattarsi di una terna di angoli di Eulero della $\mathcal{P}$ rispetto a una terna fissa scelta una volta tanto in modo del tutto arbitrario, indipendentemente dalla $\mathcal{C}$.

Relativamente a un qualunque altro stato $\mathcal{H}'$ di G_ϱ, sempre per P^* indicherò con $\mathcal{P}' \equiv P^* \boldsymbol{i}'_1 \boldsymbol{i}'_2 \boldsymbol{i}'_3$ la terna principale di deformazione, con φ'_r i valori dei φ_r spettanti alla $\mathcal{P}'$, con ε' l'omografia di deformazione, con E'_1, E'_2, E'_3 le caratteristiche principali di de-