

Essendo gli attuali assi coordinati assi centrali d'inerzia del solido omogeneo, da (26) risulta

$$\mathcal{N} = 0$$

e da (27)

$$\mathcal{M} = b l_2 \int_{c_*} y_2^2 dc_* = \frac{ab}{2E} \int_{c_*} y_2^2 c_*.$$

La (C) non ammette dunque alcuna soluzione, a meno che non si voglia intendere ⁽²³⁾ $a = 0$ o $b = 0$; nel qual caso si ha invece che la (C) è soddisfatta da un qualunque valore di ρ .

IV. SPECIFICAZIONE DELLE EQUAZIONI DI KIRCHHOFF PER SOLIDI ELASTICI INCOMPRIMIBILI.

1. Introduzione.

Le precedenti conferenze ⁽²⁴⁾ si sono specialmente rivolte ai problemi d'integrazione con ambigue condizioni al contorno imposti dalla teoria delle piccole trasformazioni quando si abbia a che fare con vincoli unilaterali. Cominciai, è vero, col richiamare l'attenzione sul *problema centrale* della teoria delle trasformazioni termoelastiche finite: *scelta dell'espressione completa del potenziale termodinamico*. Ma poi, non parlai più di questo difficilissimo problema di vera Fisica matematica, proprio perchè quando ci si rivolge a piccole trasformazioni il potenziale termodinamico va inteso come una funzione di secondo grado, e per raggiungerne l'espressione definitiva si hanno solo da chiedere all'esperienza i valori di alcuni parametri, non più l'intera struttura di una funzione di più variabili.

Questa e quasi tutte le seguenti conferenze vorranno invece riguardare il *problema centrale per solidi incomprimibili*, omogenei e isotropi, dopo una conveniente sintesi di risultati indispensabili a un'esauriente sua trattazione.

⁽²³⁾ Uniforme compressione accompagnata da sollecitazione a flessione sopra una coppia di facce laterali della piastra; ovvero sola pressoflessione.

⁽²⁴⁾ Forse è opportuno citare anche la mia conferenza *Sulla statica dei solidi elastici vincolati* [Atti del 6° Congresso della U.M.I., pp. 79-93], le tre conferenze su *Questioni di elasticità* [Conf. 48-49-50 del Sem. mat. di Bari] e la mia quarta Memoria sulle *Trasformazioni termoelastiche finite*, in corso di stampa nel volume degli « Annali » dedicato all'amico SANSONE.

Esistono tipi di potenziale termodinamico in corrispondenza ai quali le ordinarie caratteristiche dello stress — private dei contributi della pressione vincolare interna se si tratta di sistemi incomprimibili — esattamente risultano espresse da funzioni di secondo grado delle caratteristiche di deformazione dello spostamento inverso [quello che riporta il sistema dal suo stato attuale allo stato di riferimento]. Già da più di venti anni ho preso l'abitudine di chiamare « Elasticità di secondo grado » la teoria non linearizzata [nè in alcun altro modo semplificata] che si abbina a una tale ipotesi circa la struttura del potenziale termodinamico.

Fin dalla mia seconda Memoria degli « Annali » (1949) per sistemi comprimibili l'Elasticità di secondo grado, nonostante la sua complessità, aveva superato così felicemente tutti i più severi controlli qualitativi che mi era stato possibile escogitare, da farmi ritenere che per qualche solido naturale potesse andar bene anche quantitativamente.

Ebbene, questa presunzione nella mia terza Memoria (1955) venne avvalorata da un fatto almeno per me inaspettato: nel caso di solidi incomprimibili l'ipotesi caratteristica della Elasticità di secondo grado impone al potenziale elastico una forma che — ove si annulli uno dei tre parametri in essa disponibili — è proprio la forma proposta da M. MOONEY nel 1940 e che con successo ha poi superato anche svariati controlli sperimentali.

Anzi l'annullarsi di quel terzo parametro risulta pure *necessario* se incondizionatamente si accettano i risultati di esperienze recenti: come potrò meglio dire in una delle ultime conferenze.

2. Le equazioni di Kirchhoff.

Prendo naturalmente le mosse da quanto riassunti anche nei nn. 2 e 3 di I, chiamando S un qualunque sistema continuo tridimensionale in quiete rispetto a una prefissata terna di riferimento $\mathcal{T}$, cartesiana ortogonale, di origine O e versori c_1, c_2, c_3 .

Indico con O lo stato attuale del sistema, con Σ il suo contorno completo, con Q un punto qualunque di Σ , con P il punto generico di O , con x_i ($i = 1, 2, 3$) le coordinate di P rispetto a $\mathcal{T}$, con N il versore della normale interna a Σ , con k la densità in P , con $F \cdot kdC$ le forze di massa attuali e con $f d\Sigma$ quelle in superficie, con X_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) i valori delle ordinarie caratteristiche dello stress in P , delle quali sia precisato il segno computando positivamente

le pressioni. Così le equazioni generali della Statica dei sistemi continui — le classiche equazioni di CAUCHY — si presentano nella forma

$$(1) \quad \sum_k \frac{\partial X_{ik}}{\partial x_k} = k F_i \dots C, \quad \sum_k N_k X_{ik} = f_i \dots \Sigma$$

e

$$(2) \quad X_{ik} = X_{ki} \dots C.$$

Si tratta di equazioni di tipo euleriano, mentre in generale, in una questione di trasformazioni finite, non può essere evitata la riduzione delle equazioni di CAUCHY a forma lagrangiana.

Per questo sia C_* uno stato di riferimento, scelto nel modo che più possa fare comodo tra tutti i possibili stati di S . Indicherò con Σ_* il contorno completo di C_* , con N^* il versore della normale interna a Σ_* .

Tra i punti di C e quelli di C_* va sottintesa un'incondizionata corrispondenza biunivoca. Chiamerò sempre P^* e Q^* i punti di provenienza di P e Q ; y_i le coordinate di P^* rispetto alla prefissata $\mathcal{C}$; $u_i = x_i - y_i$ le omologhe componenti dello spostamento locale effettivo

$$s(P^*) = P^*P;$$

$\mathcal{D}$ il determinante jacobiano delle x rispetto alle y , necessariamente positivo; k^* la densità nello stato di riferimento, legata a k dalla equazione lagrangiana di continuità, $k^* = k\mathcal{D}$.

Riguardo a una generica funzione vettoriale ξ^* di P^* anche qui intenderò

$$\xi_{ik}^* = \frac{\partial \xi_i^*}{\partial y_k}.$$

In particolare scriverò x_{ik} e u_{ik} al posto di $\partial x_i / \partial y_k$ e $\partial u_i / \partial y_k$, ciò che ad es. traduce $\mathcal{D}$ nel determinante di 3° ordine che ha come generico elemento

$$x_{ik} = \delta_{ik} + u_{ik},$$

con la notazione di KRONECKER. Continuerò pure ad accennare con u' l'insieme delle nove variabili u_{ik} , pensate come indipendenti, e riguardo a una generica funzione scalare $\chi(u')$ delle u' intenderò

$$\chi_{ik}(u') = \frac{\partial \chi(u')}{\partial u_{ik}}:$$

ad es. potrò indicare con $\mathcal{D}_{ik}(u')$ i complementi algebrici C_{ik} dei singoli elementi di $\mathcal{D}$.

Nel dare forma lagrangiana alle (1) conviene pure: 1^o) porre, per ogni elemento $d\Sigma$ del contorno di S ,

$$f d\Sigma = f^* d\Sigma_*,$$

cioè prendere in considerazione l'intensità della forza superficiale riferita, non più all'unità d'area del contorno attuale, ma invece all'unità d'area di Σ_* ; 2^o) introdurre, accanto alle X , altre caratteristiche dello stress, K , mediante le posizioni

$$(3) \quad K_{ik} = \sum_1^3 X_u C_{ik},$$

equivalenti, come è ben facile controllare, alle

$$(3)' \quad X_{ik} = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_i K_{il} x_{li},$$

nonchè alle

$$(3)'' \quad X_{ik} = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_l K_{kl} x_{li}$$

quando si facciano intervenire le (2).

Se, per caso, la configurazione attuale coincide con la configurazione di riferimento [$x_{ik} \equiv \delta_{ik}$] non c'è differenza tra le K e le X [dello stato attuale] mentre che in generale, a parità di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^*$, le K sono soltanto in corrispondenza biunivoca con le X , e neppure [cfr. (3)' e (3)'] godono di proprietà di simmetria del semplice tipo (2). Però con l'introduzione delle K si ha sempre quanto basta per dare forma lagrangiana alle (1), in quanto queste vengono esattamente a equivalere alle equazioni di KIRCHHOFF:

$$(4) \quad \sum_k \frac{\partial K_{ik}}{\partial y_k} = k^* F_i \dots C_{*}, \quad \sum_k N_k^* K_{ik} = f_i^* \dots \Sigma_*.$$

Al tempo stesso, per un qualunque elemento dC_* di S il lavoro nominale $\partial l^{(i)}$ delle forze intime viene a essere espresso da

$$(5) \quad \partial l^{(i)} = dC_* \cdot \sum_{ik} K_{ik} \partial u_{ik},$$

se si indicano con

$$\partial u_{ik} = \xi_{ik}^*$$

le variazioni delle u' inerenti a un qualunque spostamento infinitesimo

$$\partial s = \xi^*(P^*)$$

a partire dallo stato attuale.

Ma per giustificare anche meglio l'introduzione delle K , basta fare intervenire qualche omografia vettoriale, che dovrò adoprare sistematicamente in quasi tutte queste conferenze, non volendo scostarmi troppo dal modo di esposizione delle mie Memorie degli « Annali ». Salvo contrario avviso, i coefficienti di un'omografia vettoriale s'intenderanno riferiti alla prefissata $\mathcal{C}$.

Sia $dP^* \equiv (dy_1, dy_2, dy_3)$ un qualunque elemento lineare orientato uscente da P^* e $dP \equiv (dx_1, dx_2, dx_3)$ il corrispondente elemento di C . Le identità

$$dx_i = \sum_k x_{ik} dy_k$$

possono riassumersi nell'uguaglianza vettoriale

$$(6) \quad dP = \alpha dP^*,$$

non appena si accenni con α l'omografia vettoriale che ha per coefficienti le x_{ik} , calcolate in P^* ,

$$\alpha \equiv \| x_{ik} \| :$$

essendo $\mathcal{D} > 0$, non può trattarsi che di un'omografia propria, onde si potrà parlare senza alcuna ambiguità della sua inversa, α^{-1} .

In termini equivalenti si può dire che la α_{P^*} caratterizza lo spostamento *omogeneo* ⁽²⁵⁾ con cui si confonde lo spostamento effettivo nell'intorno di P^* : lo *spostamento omogeneo tangente allo spostamento effettivo in P^** . Spesso mi verrà fatto di chiamare *immagine su C* di un vettore v^* applicato in P^* , (P^*, v^*) , il vettore applicato $(P, \alpha v)$: e viceversa, di chiamare *immagine su C_** di (P, v) il vettore $(P^*, \alpha^{-1}v)$,

⁽²⁵⁾ Dicendo « spostamento omogeneo » voglio naturalmente alludere ai casi assai particolari in cui corrisponde a una semplice affinità lo spostamento dell'intero sistema.

nonchè di adoperare analoghe locuzioni riguardo alle singole semirette uscenti da P^* e ai triedri col vertice in P^* , ecc.

Sia poi $d\sigma_*$ il generico elemento di superficie per P^* e $d\sigma$ il corrispondente elemento di C ; n^* il versore della normale n^* a $d\sigma_*$, orientata in verso arbitrario; n il versore della normale n a $d\sigma$, orientata in verso concorde all'immagine di n^* su C_* [che non può essere complanare a $d\sigma$ perchè n^* non è complanare a $d\sigma_*$]. La legge di corrispondenza tra gli elementi di superficie orientati $n^*d\sigma_*$, ndo semplicemente è data dall'omografia

$$R\alpha \equiv \| C_{ik} \| ,$$

la omografia complementare di α , nella forma

$$(7) \quad ndo = R\alpha (n^*d\sigma_*) :$$

non c'è differenza tra la $R\alpha$ e la α nel solo caso di uno spostamento rigido.

Rivolgiamo ora l'attenzione allo sforzo attuale $\Phi_n d\sigma$ sull'elemento di superficie $d\sigma$, di normale interna n , indicando con β l'omografia [a matrice simmetrica] che ha per coefficienti le ordinarie caratteristiche dello stress,

$$\beta \equiv \| X_{ik} \| ,$$

e con κ la omografia di KIRCHHOFF

$$\kappa \equiv \| K_{ik} \| .$$

Il teorema del tetraedro di CAUCHY può tradursi nell'uguaglianza vettoriale

$$\Phi_n d\sigma = \beta (ndo) ,$$

mentre le (3) possono riassumersi nell'uguaglianza omografica

$$\kappa = \beta R\alpha .$$

Si ha dunque, col concorso della (7),

$$(8) \quad \Phi_n d\sigma = \beta R\alpha (n^*d\sigma_*) = \kappa (n^*d\sigma_*) .$$

Questo è il significato dell'omografia di KIRCHHOFF: $\Phi_n d\sigma$ è il trasformato di ndo mediante la β , ma è anche il trasformato di $n^*d\sigma_*$ mediante la κ .

È poi evidente che le (4) possono riassumersi nelle uguaglianze vettoriali

$$(9) \quad \sum_k \frac{\partial \kappa C_k}{\partial y_k} = k^* F \dots C_*, \quad \kappa N^* = f^* \dots \Sigma_*.$$

3. Lavoro nominale delle forze intime, omografia lagrangiana di tensione.

Ricordo come ho introdotto in II le caratteristiche di deformazione, per trasformazioni finite.

Indicavo con

$$\sum_{ik} b_{ik} dy_i dy_k$$

la forma differenziale che esprime il quadrato dell'elemento lineare di C [ds^2 euclideo] mediante le y , cioè intendevo

$$b_{ik} = b_{ki} = \sum_l x_{li} x_{lk},$$

e ponevo

$$(10) \quad b_{ik} = \delta_{ik} + 2\varepsilon_{ik},$$

anche qui con la notazione di KRONECKER.

Questa convenzione equivale ad assumere

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki} = \frac{1}{2} (u_{ik} + u_{ki}) + \frac{1}{2} \sum_l u_{li} u_{lk}.$$

Ormai abituale è la denominazione di caratteristiche di deformazione *complete* dello spostamento $C_* \rightarrow C$ non proprio per le ε_{ik} , ma per le sei quantità

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{rr}, \quad \varepsilon_{3+r} = 2\varepsilon_{r+1, r+2} \quad (r = 1, 2, 3).$$

Volendo adoperare anche qualche uguaglianza omografica, conviene fare intervenire la *omografia di deformazione*, l'omografia ε a matrice simmetrica che ha per coefficienti le ε_{ik} ,

$$\varepsilon \equiv \parallel \varepsilon_{ik} \parallel :$$

questo equivale a riassumere le (10) nell'uguaglianza

$$(10)' \quad K\alpha \cdot \alpha = 1 + 2\varepsilon,$$

se ci si attiene all'abitudine di indicare con $K\alpha$ l'omografia coniugata di α .

Superfluo è far presente che l'annullarsi di ciascuna ε_j ($j=1,2,\dots,6$) in tutto C_* è condizione necessaria e sufficiente perchè la configurazione attuale possa differire dalla configurazione di riferimento solo per uno spostamento rigido. Comunque la conoscenza della ε in tutto C_* individua lo spostamento $C_* \rightarrow C$ a meno del prodotto per uno spostamento rigido. Basta poi che tutte le ε_j siano costanti in C_* , perchè le x si riducano a funzioni lineari delle y : spostamento omogeneo.

La (5) esprime il $\partial l^{(i)}$ come una forma lineare nelle nove ∂u_{ik} , ma le (2), le proprietà di simmetria delle ordinarie caratteristiche dello stress, permettono di ridurre il $\partial l^{(i)}$ a una forma lineare nelle omologhe variazioni $\partial \varepsilon_j$ delle sei caratteristiche di deformazione:

$$(11) \quad \partial l^{(i)} = dC_* \sum_j Y_j \partial \varepsilon_j.$$

Precisamente, a ciò che al riguardo ho detto l'anno scorso, può darsi un semplice enunciato mediante l'introduzione dell'omografia

$$\beta_* = \alpha^{-1}\kappa \equiv \| Y_{ik} \| :$$

in conseguenza delle (2) necessariamente risulta⁽²⁶⁾

$$Y_{ik} = Y_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

e per gli Y_j si hanno le espressioni

$$(11)' \quad Y_r = Y_{rr}, \quad Y_{3+r} = Y_{r+1, r+2} = Y_{r+2, r+1} \quad (r = 1, 2, 3).$$

Se per caso C coincide con C_* , la β_* non differisce dalla κ , nè dalla β . Comunque dalla (8) risulta

$$\alpha^{-1}(\Phi_n d\sigma) = \beta_*(n^* d\sigma_*),$$

cioè che $\beta_*(n^* d\sigma_*)$ dà l'immagine su C_* dello sforzo attuale $\Phi_n d\sigma$.

Tutto questo, mi pare, abbastanza giustifica la denominazione di omografia lagrangiana di tensione, che ho ormai l'abitudine di

⁽²⁶⁾ La β_* e la β sono dilatazioni, mentre [cfr. (3)' e (3)''] generalmente non lo è la κ .

adoperare per la β_* , in contrapposto a quella di omografia *euleriana* di tensione per la β . Naturalmente per piccole trasformazioni le Y_{ik} , come le K_{ik} , vengono a confondersi con le X_{ik} .

Appresso, tutte le volte che avrò a che fare con una funzione

$$\psi[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6] \equiv \psi[\varepsilon]$$

delle ε_j , pensate come indipendenti, intenderò

$$\psi_j[\varepsilon] = \frac{\partial \psi[\varepsilon]}{\partial \varepsilon_j}$$

e indicherò con $\|\psi_j[\varepsilon]\|$ la *dilatazione associata alla $\psi[\varepsilon]$* :

$$\|\psi_j[\varepsilon]\| \equiv \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_6 & \psi_5 \\ \psi_6 & \psi_2 & \psi_4 \\ \psi_5 & \psi_4 & \psi_3 \end{vmatrix}.$$

Sia allora $\psi(u')$ la funzione della u' che si ottiene da una $\psi[\varepsilon]$ materialmente sostituendo in questa al posto delle singole ε_j le loro espressioni mediante le u' . La *omografia associata alla $\psi(u')$* , voglio dire, l'omografia, a matrice generalmente non simmetrica, che ha per coefficienti le $\psi_{ik}(u')$, sta sempre in una semplice relazione con la dilatazione associata alla $\psi[\varepsilon]$. Precisamente, come è facile controllare, risulta sempre

$$(12) \quad \alpha \|\psi_j[\varepsilon]\| = \|\psi_{ik}(u')\|.$$

La definizione stessa dell'omografia di deformazione implica l'uguaglianza della $\mathcal{D}(u')$ con la radice quadrata $\mathcal{D}[\varepsilon]$ del determinante del 3° ordine che ha per elemento generico $\delta_{ik} + 2\varepsilon_{ik}$,

$$\mathcal{D}[\varepsilon] = \sqrt{\|\delta_{ik} + 2\varepsilon_{ik}\|}:$$

e per questa funzione delle ε la (12) evidentemente fornisce

$$(13) \quad \alpha \|\mathcal{D}_j[\varepsilon]\| = \|\mathcal{D}_{ik}(u')\| = R\alpha.$$

4. Sistemi incomprimibili a trasformazioni reversibili.

Da questo momento sottintendo la restrizione che S sia un sistema *incomprimibile a temperatura costante*, G , cioè la restrizione che, per ogni elemento e del sistema, nel passaggio dallo stato di

riferimento C_* allo stato attuale C il coefficiente di dilatazione cubica

$$\delta_c = \mathcal{D} - 1$$

resti univocamente determinato dalla temperatura attuale T [subordinatamente alla temperatura T_* nello stato di riferimento]. Questo vincolo intrinseco potrà sempre intendersi espresso da un'equazione del tipo

$$(14) \quad \mathcal{D}[\varepsilon] = \lambda^3(T, T_*),$$

con

$$\lambda(T_*, T_*) \equiv 1.$$

Converrà distinguere le variazioni inerenti a una trasformazione elementare *effettiva* del sistema incompressibile, scrivendo δ' al posto del semplice δ , in modo che le $\delta'\varepsilon_j$, invece che completamente arbitrarie per i singoli e , dovranno intendersi localmente legate a $\delta'T$ dall'uguaglianza

$$(15) \quad \sum_j \mathcal{D}_j[\varepsilon] \delta'\varepsilon_j - \frac{\partial \lambda^3}{\partial T} \delta'T = 0.$$

Parallelamente, nell'ambito dei fenomeni di cui intendo occuparmi, potrò assumere come espressione del primo principio della Termodinamica

$$(16) \quad \delta'q \cdot k^* dC_* = dw \cdot k^* dC_* + \delta'l^{(e)},$$

chiamando: $\delta'q \cdot k^* dC_*$ l'equivalente meccanico della quantità di calore assorbita [in senso algebrico] da e ; w l'energia specifica, funzione caratteristica definita dalla natura di G , a meno dell'aggiunta di una funzione del solo P^* .

Con queste notazioni l'aggiunta della condizione che G sia un sistema a trasformazioni reversibili, G_e , si traduce nell'esistenza di un'altra funzione caratteristica — s , entropia specifica — tale che riesca

$$(17) \quad \frac{\delta'q}{T} = ds$$

per ciascun e e per ogni sua trasformazione elementare; s'intende, pur di rappresentare con $T > 0$ il valore della temperatura in una scala opportuna, la scala assoluta. Anche nella s per ciascun e rimane arbitraria una costante additiva.

Per ogni G_e indicherò con $\mathcal{F}$ l'ulteriore funzione caratteristica

$$\mathcal{F} = w - sT,$$

corrispondente al potenziale termodinamico di DUHEM, all'energia libera di HELMHOLTZ. La forma effettiva della $\mathcal{F}$ [come quella di ogni altra funzione caratteristica] deve intendersi definita dalla specie del corpo materiale schematizzato in G_e : ma per ciascun e rimane arbitraria l'aggiunta di una funzione lineare $\mathcal{Q}_T$ della sola T .

Per ogni e e per ogni sua trasformazione elementare da (16) e (17) risulta

$$Tds \cdot k^* dC_* = dw \cdot k^* dC_* + \delta' l^{(e)},$$

uguaglianza esattamente equivalente a

$$(18) \quad d\mathcal{F} \cdot k^* dC_* = -\delta' l^{(e)} - s\delta' T \cdot k^* dC_*.$$

A questo punto, decisivo è l'intervento della (11), in quanto esso permette di sostituire la (18) con

$$(19) \quad k^* d\mathcal{F} = -\sum_j Y_j \delta' \varepsilon_j - k^* s \delta' T,$$

per ogni scelta delle $\delta' \varepsilon_j$ e $\delta' T$ che soddisfi la (15).

In primo luogo la (19) dice che, anche col vincolo di incomprimibilità, il potenziale termodinamico deve rientrare, per ogni e e T_* , fra le funzioni del tipo

$$\mathcal{F}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_6, T] \equiv \mathcal{F}[\varepsilon | T],$$

qualunque sia stata la preventiva scelta di C_* e della $\mathcal{C}$. Però, stante la (14), le sette variabili ε_j e T non hanno più il carattere di argomenti completamente indipendenti, e in definitiva [cfr. (15)] la (19) si esaurisce nell'imporre l'esistenza di uno scalare,

$$p(P^*),$$

che renda simultaneamente verificate le sette uguaglianze

$$(20) \quad \begin{cases} k^* \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_j} = -Y_j + p \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_j}, \\ k^* \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} = -k^* s - p \frac{\partial \lambda^3}{\partial T}. \end{cases}$$

Questo scalare $p(P^*)$ riesce atto a caratterizzare da solo le reazioni vincolari interne. Riattaccandomi a quanto facevo l'anno scorso, potrò chiamarlo la *pressione vincolare interna*, o brevemente la *pressione* [positiva o negativa] in P .

5. Specificazione delle equazioni di Kirchhoff per i sistemi incompressibili a trasformazioni reversibili.

Accennando con S il prodotto per k^* della dilatazione associata al potenziale termodinamico,

$$\varphi \equiv k^* \| \mathcal{F}_j \|,$$

le prime sei delle (20) possono riassumersi nell'uguaglianza

$$\varphi = -\beta_* + p \| \mathcal{D}_j[\varepsilon] \|,$$

che a sua volta, quando la si moltiplichi per α e si faccia intervenire la (12), può sostituirsi con

$$(21) \quad \kappa = pR\alpha - \alpha\varphi.$$

Non ho ancora avuto bisogno di ricorrere all'uguaglianza

$$\sum_k \frac{\partial R\alpha c_k}{\partial y_k} = 0,$$

equivalente alle tre ben note uguaglianze scalari

$$\sum_k \frac{\partial C_{ik}}{\partial y_k} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Profittando di essa si ha

$$\sum_k \frac{\partial (pR\alpha c_k)}{\partial y_k} = \sum_k \frac{\partial p}{\partial y_k} R\alpha c_k = R\alpha (\text{grad}_{P^*} p).$$

In conclusione per ogni G_e — sistema incompressibile a trasformazioni reversibili — le equazioni di KIRCHHOFF si specializzano in

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} R\alpha (\text{grad}_{P^*} p) - \sum_k \frac{\partial \alpha \varphi c_k}{\partial y_k} = k^* F \dots C_*, \\ (pR\alpha - \alpha\varphi) N^* = f^* \dots \Sigma_*. \end{array} \right.$$

Liquidi perfetti. — Dicendo *liquido perfetto* intendo riferirmi a un G_e per il quale il potenziale termodinamico venga a non dipendere effettivamente dalle ε :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}[T].$$

In questo caso — che, è inutile dirlo, resterà nettamente escluso dalla definizione dei solidi elastici incomprimibili — si annulla identicamente la φ e la (21) dà $\kappa = pR\alpha$. Quindi, stante l'identità $\kappa = \beta R\alpha$, semplicemente risulta [come era ben prevedibile]

$$\beta = p, \quad \Phi_n = pn.$$

Al tempo stesso dalle (22) si hanno, come *equazioni lagrangiane dell'Idrostatica*, le

$$(23) \quad R\alpha (\text{grad}_{P^*} p) = k^* F \dots C_*, \quad pR\alpha N^* = f^* \dots \Sigma_*.$$

V. INTERVENTO DELLE TERNE PRINCIPALI DI DEFORMAZIONE.

Per piccole trasformazioni notoriamente conviene la sistematica decomposizione dell'omografia

$$\alpha \equiv \|x_{ik}\|$$

nella somma di una dilatazione [omografia a matrice simmetrica] con una omografia assiale [omografia a matrice antisimmetrica]. Per trasformazioni finite conviene invece decomporre la α nel prodotto di due omografie, con le modalità che mi appresto a precisare per poi metter subito in rilievo, in vario modo, la loro efficacia.

1. Deformazione pura e rotazione locale.

Ogni dilatazione ammette una *terna unita trirettangola*. In altri termini, quando l'omografia $\gamma \equiv \|g_{ik}\|$ è a matrice simmetrica, esistono tre versori i_r ($r = 1, 2, 3$) mutuamente ortogonali tali che ognuno dei γi_r conserva la direzione, se non il verso, del relativo i_r . Esistono cioè tre scalari Γ_r — i coefficienti principali della dilatazione — tali che

$$\gamma i_r = \Gamma_r i_r:$$

essi coincidono con le tre radici dell'equazione secolare in Γ

$$\|g_{ik} - \delta_{ik} \Gamma\| = 0.$$