ANTONIO SIGNORINI

QUESTIONI
DI
ELASTICITÀ NON LINEARIZZATA

CONFERENZE TENUTE PRESSO
L'ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA
NEGLI ANNI 1959 E 1960

EDIZIONI CREMONESE
ROMA

ANTONIO SIGNORINI

QUESTIONI
DI
ELASTICITÀ NON LINEARIZZATA

CONFERENZE TENUTE PRESSO
L'ISTITUTO NAZIONALE DI ALTA MATEMATICA
NEGLI ANNI 1959 E 1960

EDIZIONI CREMONESE
ROMA

Gubbio - Soc. Tipografica «Oderisi» - 1960

Le conferenze raccolte in questo volume sono state pubblicate sui « Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni », Serie V, Vol. XVIII, fasc. 1-2 e Vol. XIX, fasc. 1-2.

I. Premesse di carattere assai generale.

1. Introduzione.

Vorrei cominciare i miei discorsi su questioni di elasticità non linearizzata e *semilinearizzata*, leggendo in parte le prime due pagine di una conferenza (¹) che io tenni qui nel 1942. Mi sembra che in esse siano ben dichiarati i criteri di sincerità a cui si sono sempre uniformate le ricerche mie e dei miei collaboratori. Non si è mai cercato, in punti essenziali, di « evadere la pratica » con qualche comodo *escamotage* presentato come suggerimento di una speciale intuizione fisica, speciale intuizione che certo non potrebbe derivare da una conoscenza comunque approfondita della teoria linearizzata, dove tacitamente impera un principio di sovrapposizione degli effetti che va irrimediabilmente perduto nel passaggio a trasformazioni finite.

« Nella teoria ordinaria dell'Elasticità, duplice è il guadagno che « più o meno giustificatamente si ricava dal trattare gli spostamenti « come infinitesimi: si linearizzano i singoli problemi » (almeno finchè non si va a pensare a vincoli unilaterali); « si riduce il potenziale elastico a una forma quadratica, in modo che per raggiungere la sua espressione definitiva si hanno solo da chiedere all'esperienza i valori di un certo numero di parametri, invece che « l'intera struttura di una funzione di più variabili.

(¹) *Recenti progressi della teoria delle trasformazioni termoelastiche finite* « Atti del Convegno matematico del 1942 » (Roma, Bardi, 1945) pp. 153-168.

« È quindi duplice anche la difficoltà di estendere la Elasto-
« meccanica oltre i suoi confini abituali. Rinunziando a trattare gli
« spostamenti elastici come spostamenti infinitesimi, si va incontro
« a problemi al contorno di tipo non lineare, e, quasi ciò non ba-
« stasse, prima di ogni calcolo numerico si ha da affrontare un pro-
« blema estremamente difficile di vera Fisica matematica: *scelta del-*
« *l'espressione completa del potenziale elastico.*

« È pur vero che in svariati e anche fruttuosi tentativi di esten-
« sione della teoria ordinaria una *parziale* rinunzia alla infinitesima-
« lità degli spostamenti è stata abbinata all'espressione tradizionale
« del potenziale elastico. Ma un tale abbinamento è giustificabile solo
« nel caso dei sistemi elastici *sottili* (sbarre, piastre, ecc.), caso spe-
« ciale che oggi intendo trascurare.

« Ho detto « deformazioni elastiche » e « potenziale elastico ».
« Pròpriamente avrei dovuto dire « trasformazioni termoelastiche »
« e « potenziale termodinamico » perchè quando si rinunzia a trattare
« le deformazioni elastiche come infinitesime la legge di Hooke deve
« cedere il passo ai due principi classici della Termodinamica, secondo
« le indicazioni date da Thomson fin dal 1855.

« In definitiva si è ricondotti a uno schema di carattere pura-
« mente meccanico tanto nel caso di trasformazioni isoterme, quanto
« in quello di trasformazioni adiabatiche. Ciononostante mi pare che
« il necessario riattacco della teoria generale dell'Elasticità alla Ter-
« modinamica non possa mai venire dimenticato. Invero tale riattacco
« subordina il potenziale elastico, isotermo o adiabatico, al poten-
« ziale termodinamico. Quindi, se anche ad es. ci si vuole occupare
« solo di trasformazioni isoterme, al momento decisivo [voglio dire,
« al momento della scelta del potenziale elastico] si deve tener ben
« presente che un'espressione del potenziale elastico può avere un
« effettivo valore fisico solo se si può associarla a un'espressione
« del potenziale termodinamico che non dia luogo a incongruenze.

Queste saranno le direttive anche delle mie conferenze attuali, ma per procedere per gradi, ciò che ora comincio a dire vorrà riguardare, fino a contrario avviso, la sola Statica isoterma.

Pure con questa limitazione la teoria resta assai complessa se, come intendo fare, si pensa a un solido elastico soggetto, non solo a vincoli in superficie [appoggi, punti fissi], ma anche al vincolo interno di incomprimibilità [conservazione dei volumi], vincolo di uso ormai tradizionale in tutte le questioni riguardanti la gomma e i corpi consimili.

Comincerò col richiamare, nella sua essenza, qualche proprietà comune a tutti i sistemi continui, per poi ordinatamente introdurre il vincolo di incomprimibilità, la condizione di reversibilità delle trasformazioni, i vincoli in superficie, senza mai fare esplicito ricorso alle proprietà di simmetria delle ordinarie caratteristiche dello stress: è solo nella seconda conferenza che passerò a parlare di questioni riguardanti unicamente i solidi elastici.

2. Le equazioni di Cauchy.

Sia dunque S un qualunque sistema continuo tridimensionale, in quiete rispetto a una prefissata terna di riferimento $\mathcal{T}$, cartesiana ortogonale, di origine O.

Indicherò con c il suo stato attuale, con σ il suo contorno completo, con P un punto qualunque di c, con x_r $(r = 1, 2, 3)$ le coordinate di P rispetto alla $\mathcal{T}$, con $\boldsymbol{\nu}$ il versore della normale interna a σ, con $\boldsymbol{F}\,dc$ le forze di massa, con $\boldsymbol{\Xi}\,d\sigma$ le forze in superficie, con X_{rs} $(r, s = 1, 2, 3)$ i valori delle ordinarie caratteristiche dello stress in P, dei quali sia precisato il segno computando positivamente le pressioni.

Con questo le equazioni generali della Statica dei sistemi continui — le classiche equazioni di CAUCHY — si presentano nella forma [euleriana]

$$(1) \qquad \sum_s \frac{\partial X_{rs}}{\partial x_s} = F_r \ldots c\,, \qquad \sum_s X_{rs}\,\nu_s = \Xi_r \ldots \sigma\,.$$

In seguito al posto di Ξ_r, scriverò f_r quando si tratti di forza attiva, e invece Φ_r quando si tratti di reazione vincolare.

Sia ora $\boldsymbol{\xi}(P)$ una funzione vettoriale di P *del tutto arbitraria*. Come ben si sa, le (1) possono sintetizzarsi nella condizione

$$(2) \qquad 0 = \int_c \boldsymbol{F}\,dc \times \boldsymbol{\xi} + \int_\sigma \boldsymbol{\Xi}\,d\sigma \times \boldsymbol{\xi} + \int_c dc \cdot \sum_{rs} X_{rs} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s}\,,$$

purchè quest'unica uguaglianza [scalare] s'intenda valida per ogni scelta della $\boldsymbol{\xi}(P)$.

Si tratta di semplice equivalenza analitica, per nulla subordinata al significato fisico delle $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\Xi}, X$. Anzi perchè essa sussista, non occorre neppure la proprietà di simmetria delle ordinarie caratteristiche dello stress:

$$X_{rs} = X_{sr}.$$

Di solito si legge la (2) dicendo che le equazioni di CAUCHY possono sintetizzarsi nella condizione che per ogni spostamento infinitesimo,

$$\partial \boldsymbol{s} = \boldsymbol{\xi}(P),$$

a partire da uno stato di quiete sia nullo il lavoro nominale [2] complessivo delle forze di massa, delle forze in superficie e delle forze intime: per un elemento qualunque χ del sistema il lavoro nominale $\partial l^{(i)}$ delle forze intime s'intende proprio espresso da

$$\partial l^{(i)} = dc \cdot \sum_{rs} X_{rs} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_s}. \tag{3}$$

3. Le equazioni di Kirchhoff.

In ogni questione di deformazioni finite occorre la riduzione delle equazioni di CAUCHY a forma lagrangiana.

Sia c_* una configurazione di riferimento di S, scelta nel modo che più possa far comodo per un determinato scopo, fra tutte le possibili configurazioni di S. Indicherò con σ^* il contorno completo di c_*, con ν^* il versore della normale interna a σ^*.

Tra i punti di c e quelli di c_* va sottintesa una incondizionata corrispondenza biunivoca. Chiamerò sempre P_* il punto di provenienza di P; y_r le coordinate di P_*, anche queste rispetto alla prefissata $\mathcal{C}$; $\boldsymbol{s}(P_*) = P_*P$ lo spostamento locale;

$$u_r = x_r - y_r$$

le componenti di $\boldsymbol{s}$ e

$$\mathcal{D} > 0$$

il determinante jacobiano delle x rispetto alle y.

Conviene anche porre

$$\boldsymbol{F} dc = \boldsymbol{F}^* dc_*, \quad \boldsymbol{\Xi}\, d\sigma = \boldsymbol{\Xi}^* d\sigma^*,$$

(2) V. *Meccanica razionale con elementi di Statica grafica*, vol. II, 2ª ediz. (Roma, Cremonese, 1954) pp. 53-55 e 113-114.

cioè rappresentare con F^* l'intensità della forza di massa [attuale] riferita all'unità di volume di c_*, e con Ξ^* l'intensità della forza superficiale riferita all'unità di area di σ^*.

L'incondizionata corrispondenza biunivoca tra P e P_* permette di pensare ξ, funzione vettoriale arbitraria di P, come un'arbitraria funzione vettoriale di P_*, ξ^*. Resta dunque senz'altro acquisita un'espressione lagrangiana del lavoro nominale delle forze di massa e delle forze in superficie,

$$\int_{c_*} F^* \, dc_* \times \xi^*, \qquad \int_{\sigma^*} \Xi^* \, do^* \times \xi^*.$$

Per quanto poi riguarda il lavoro nominale delle forze intime, quando si pensi ξ come funzione di P per il tramite di P_* appare subito che, posto

$$K_{rm} = \mathcal{D} \sum_s X_{rs} \frac{\partial y_m}{\partial x_s}, \qquad (r, m = 1, 2, 3), \tag{4}$$

risulta [cfr. (3)]

$$\partial l^{(i)} = dc_* \cdot \sum_{rm} K_{rm} \frac{\partial \xi_r^*}{\partial y_m}. \tag{5}$$

Se c, per caso, coincide con c_* [$u_r \equiv 0$, $x_r \equiv y_r$] le K non differiscono dalle X. In generale [a parità di c_* e c] le K vengono a essere in corrispondenza biunivoca con le X, le ordinarie caratteristiche dello stress: equivalendo le (4) a

$$X_{rs} = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_m K_{rm} \frac{\partial x_s}{\partial y_m}. \tag{4'}$$

Abbiamo ormai tradotto la (2) nella condizione che sia

$$0 = \int_{c_*} F^* \, dc_* \times \xi^* + \int_{\sigma^*} \Xi^* \, do^* \times \xi^* + \int_{c_*} dc_* \cdot \sum_{rm} K_{rm} \frac{\partial \xi_r^*}{\partial y_m}, \tag{6}$$

per ogni scelta di ξ^*. Ma questa condizione è proprio dello stesso tipo della (2), salvo le aggiunte di asterischi e la sostituzione delle y alle x. Null'altro dunque occorre per concludere che le equazioni di CAUCHY equivalgono alle *equazioni di Kirchhoff*:

$$\sum_m \frac{\partial K_{rm}}{\partial y_m} = F_r^* \ldots c_*, \quad \sum_m K_{rm} \nu_m^* = \Xi_r^* \ldots \sigma^*, \tag{7}$$

4. Notazioni.

Per abbreviare le notazioni, sarà utile convenire di indicare semplicemente con

$$\xi^*_{rs}$$

la $\partial \xi^*_r / \partial y_s$, qualunque sia la funzione vettoriale $\boldsymbol{\xi}^*$ di P_*. In particolare scriverò u_{rs} al posto di $\partial u_r / \partial y_s$, ciò che ad es. traduce il determinante jacobiano $\mathcal{D}$ nel determinante di 3^0 ordine che ha quale elemento generico $\delta_{rs} + u_{rs}$, con la notazione di Kronecker: $\mathcal{D}$ viene dunque a corrispondere a una ben determinata funzione di 3^0 grado,

$$\mathcal{D}(u'),$$

delle u', se così si accenna l'insieme delle nove variabili u_{rs}.

Fra un momento comincerò a scrivere

$$\mathcal{D}_{rs}$$

per indicare la $\partial \mathcal{D}(u') / \partial u_{rs}$, effettuata prescindendo da ogni eventuale legame fra le u': insomma $\mathcal{D}_{rs}$ resterà a indicare il complemento algebrico di x_{rs} nel primitivo determinante jacobiano e, ad es., le (4) potranno anche scriversi

$$K_{rm} = \sum_s X_{rs} \mathcal{D}_{sm}.$$

Converrà inoltre rilevare subito che per un qualunque spostamento infinitesimo $\partial \mathbf{s} = \boldsymbol{\xi}(P)$ a partire da c, le variazioni delle u_{rs} ordinatamente coincidono con le ξ^*_{rs}:

$$\partial u_{rs} = \xi^*_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, 3),$$

per il semplice motivo che l'operatore ∂ è permutabile con la derivazione rispetto alle variabili lagrangiane y [non con la derivazione rispetto alle x].

Se il $\partial \mathbf{s}$ è completamente arbitrario, per un determinato, ma qualunque, elemento del sistema viene anche a essere completamente arbitraria ciascuna delle ∂u_{rs}: se invece si assoggetta il $\partial \mathbf{s}$ a qualche restrizione, questa ha come necessario riflesso qualche restrizione per le ∂u_{rs}. Il caso di maggiore interesse, per ciò che poi dovrò dire, è quello che al $\partial \mathbf{s}$ venga imposto di conservare tutti i volumi,

$$\partial \mathcal{D} = 0;$$

caso che distinguerò scrivendo ∂' al posto del semplice ∂ e $z(P)$ o $z^*(P_*)$ al posto di ξ o ξ^*:

$$\partial' s \equiv z(P) = z^*(P_*)\,, \qquad \partial' u_{rs} = z^*_{rs}\,.$$

Allora le $\partial' u_{rs}$ vengono evidentemente a essere legate dall'uguaglianza

$$\sum_{rs} \mathcal{D}_{rs}\, \partial' u_{rs} = 0 \tag{8}$$

e *solo da essa.* Se per caso si ha la coincidenza di c con c_*, di $z(P_*)$ con $z^*(P_*)$, la (8) esattamente si riduce a

$$\operatorname{div}_{P_*} z^* = 0\,,$$

mentre in generale si ha solo l'identità della (8) con

$$\operatorname{div}_P z = 0\,. \tag{8$'$}$$

5. Sistemi incomprimibili.

Pensiamo ora che S sia un sistema continuo incomprimibile. Dicendo « sistema incomprimibile », lo ho già avvertito, voglio precisamente dire che per ogni elemento χ del sistema, in ogni suo stato, le u' s'intendono legate dalla condizione

$$\mathcal{D}(u') = 1\,; \tag{9}$$

la condizione che per ciascun elemento non varî il volum nel passaggio dalla configurazione di riferimento allo stato attuale. Quindi in ogni *trasformazione elementare*, effettiva, di χ lo spostamento locale non può essere altro che del tipo $\partial' s$ e le corrispondenti variazioni $\partial' u_{rs}$ delle u_{rs} devono intendersi legate dalla (8).

Al tempo stesso, sempre per ciascun χ e per ogni sua trasformazione elementare, il lavoro $\partial' l_i / dc_*$ delle forze intime riferito all'unità di volume di c_*, in base a (5) viene a essere espresso da

$$\frac{\partial' l^{(i)}}{dc_*} = \sum_{rm} K_{rm}\, \partial' u_{rm}\,.$$

6. Sistemi a trasformazioni reversibili.

Passo ad aggiungere la restrizione che S sia un sistema a trasformazioni reversibili, S_ϱ, prendendo ancora di mira una determinata, ma qualunque, particella χ del sistema.

Per quanto può riguardare la Statica isoterma, i due principi classici della Termodinamica direttamente vengono a dire che, in ogni trasformazione elementare, effettiva, di χ, $\partial' l_i/dc_*$ deve risultare un differenziale esatto, il differenziale esatto di una funzione $-W$ delle u', tra loro legate dalla (9):

$$\frac{\partial' l^{(i)}}{dc_*} = -\,d W(u') . \tag{10}$$

La W è proprio il potenziale elastico, funzione caratteristica della struttura del corpo naturale schematizzato nel continuo: la si deve intendere dipendente anche esplicitamente dalle y se il corpo non è *omogeneo* nel prescelto stato di riferimento.

Il vincolo di incomprimibilità, per quanto direttamente riguarda il potenziale, dà luogo soltanto a una certa indeterminazione nella sua *espressione* effettiva. Invece a due espressioni diverse della $W(u')$ generalmente corrispondono anche *valori* diversi per le derivate parziali rispetto alle singole u_{rs} pensate come indipendenti, derivate che brevemente indicherò con W_{rs}:

$$\frac{\partial\, W(u')}{\partial\, u_{rs}} = W_{rs} .$$

Si tratta però di indeterminazioni che naturalmente finiscono per riuscire inessenziali sotto ogni aspetto, e potrò fare a meno di prenderle in considerazione. Per eliminarle basta intendere, come intenderò, di far sempre capo a una stessa, ben determinata, espressione della $W(u')$, tra tutte quelle che siano consentite dalla (9).

Comunque deve verificarsi l'uguaglianza

$$\sum_{rm} K_{rm}\, \partial' u_{rm} = -\sum_{rm} W_{rm}\, \partial' u_{rm}$$

per tutte le nonuple di valori delle $\partial' u_{rm}$ soddisfacenti alla (8), onde si può concludere che, per solo effetto dei due principi classici della Termodinamica, deve esistere uno scalare,

$$p\,(P_*) ,$$

a priori del tutto indeterminato, che renda simultaneamente verificate, per ciascuna particella del sistema, le nove uguaglianze [3]

$$K_{rm} = - W_{rm} + p\, \mathcal{D}_{rm}.$$

Per $W = \text{cost.}$ esse danno $K_{rm} = p\, \mathcal{D}_{rm}$ e quindi [cfr. (4)′]

$$X_{rs} = p\, \delta_{rs}:$$

è il caso dei *liquidi perfetti.*

Comunque lo scalare p riesce atto a caratterizzare da solo le reazioni vincolari interne: potremo chiamarlo la *pressione vincolare interna* o brevemente la *pressione* [positiva o negativa] in P.

Accenniamo con $p_*(P_*)$ i suoi valori in c_*, che fin d'ora penso quali dati: diremo nella seconda conferenza come ad es. essi restino univocamente individuati dalla restrizione [per il momento del tutto superflua] che c_* sia una *configurazione naturale* di S_ϱ.

Insieme indichiamo con

$$\tilde{\omega} = p - p_*$$

l'incognito *incremento di pressione* nel passaggio dallo stato di riferimento allo stato attuale, e poniamo

$$S(u') = W(u') - \frac{p_*}{2} \{ \mathcal{D}^2 (u') - 1 \}. \tag{11}$$

Le derivate parziali, S_{rm}, della S rispetto alle singole u_{rm} pensate come indipendenti, direttamente sono espresse da

$$S_{rm} = W_{rm} - p_* \mathcal{D}_{rm} \mathcal{D},$$

ma è inutile conservare il $\mathcal{D}$, perchè a derivazioni eseguite si può subito fare intervenire la (9), in modo che per le singole K_{rm} si ha anche l'espressione

$$K_{rm} = - S_{rm} + \tilde{\omega}\, \mathcal{D}_{rm}. \tag{12}$$

Così le equazioni indefinite di KIRCHHOFF restano ridotte a

$$- \sum_m \frac{\partial S_{rm}}{\partial y_m} + \sum_m \mathcal{D}_{rm} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y_m} = F_r^* \qquad (r = 1, 2, 3), \tag{13$_1$}$$

perchè $\sum_m \partial \mathcal{D}_{rm} / \partial y_m$ è sempre zero [nota identità].

[3] In assenza del vincolo di incomprimibilità si sarebbe semplicemente trovato $K_{rm} = - W_{rm}$.

Al tempo stesso le condizioni al contorno si riducono a

$$(13)_2 \qquad \sum_m \left(-S_{rm} + \tilde{\omega}\, \mathcal{D}_{rm}\right) \nu_m^* = \Xi_r^* .$$

Nei primi membri delle prime e delle seconde, a calcoli fatti, figurano come incognite solo le tre componenti di spostamento u_r e l'incremento di pressione $\tilde{\omega}$, insieme a loro derivate parziali prime e seconde, rispetto alle y. Anzi nei primi membri delle equazioni indefinite $\tilde{\omega}$ interviene solo attraverso le $\partial \tilde{\omega} / \partial y_m$.

Per quanto riguarda la relazione sintetica (6), sotto varî punti di vista riesce veramente essenziale il fatto che, dopo la specificazione delle K_{rm} nel modo ora detto, la (6) resta *depurata* dell'incognita $\tilde{\omega}$ non appena si specializzi il vettore completamente arbitrario $\boldsymbol{\xi}^*$ in uno $\boldsymbol{z}^*(P_*)$. Insomma, come necessaria conseguenza delle (13), si ha

$$(14) \qquad -\int_{C_*} dc_* \cdot \sum_{rm} S_{rm}\, z_{rm}^* + \int_{C_*} \boldsymbol{F}^*\, dc_* \times \boldsymbol{z}^* + \int_{\sigma^*} \boldsymbol{\Xi}^*\, d\sigma^* \times \boldsymbol{z}^* = 0$$

per ogni scelta di $\boldsymbol{z}^*(P_*)$ tra le funzioni vettoriali che in corrispondenza al considerato [ma incognito] stato di quiete rendono soddisfatta la (8),

$$\sum_{rm} \mathcal{D}_{rm}\, z_{rm}^* = 0 .$$

E sussiste anche la proprietà inversa: il verificarsi della (14) per ogni $\boldsymbol{z}^*$ è anche sufficiente per l'esistenza di uno scalare $\tilde{\omega}(P_*)$ atto a rendere soddisfatte tutte le (13) [dove si pensino le F_r e Ξ_r^* come dati]. La cosa non sorprende e si può dimostrarla in varî modi. Se ne parla, in forma euleriana, anche all'inizio della mia 3ª Memoria [4] degli « Annali » sulle trasformazioni termoelastiche finite.

Quando si sia riusciti a determinare l'incognito stato di quiete in modo da rendere interamente soddisfatta la (14), insieme alla (9), si può ulteriormente ricorrere alle (13) per la determinazione della $\tilde{\omega}$, problema aggiuntivo molto più facile del primo, e che non ci sarebbe neppure in assenza del vincolo di incomprimibilità.

[4] *Trasformazioni termoelastiche finite*, « Annali di Matematica », serie IV; Mem. 1ª Tomo XXII (1943) pp. 33-143, Mem. 2ª T. XXX (1949) pp. 1-72, Mem 3ª T. XXXIX (1955) pp. 147-201.

7. Vincoli in superficie.

Passando a parlare di vincoli in superficie, ammetto naturalmente che anch'essi non dipendano dal tempo e siano privi di attrito, ma non escludo che possa trattarsi di vincoli unilaterali, quale è un semplice appoggio.

La scelta della configurazione di riferimento è finora restata completamente arbitraria, tra tutte le possibili configurazioni del nostro sistema incomprimibile, ma ormai è ovvio imporre a c_* una prima restrizione, intendendola conforme anche ai vincoli in superficie.

Per il contorno σ^* di c_* chiamerò σ_v^* la regione o l'insieme delle regioni soggette a vincoli esterni, e *superficie libera*, σ_l^*, tutto il resto. E insieme chiamerò σ_v e σ_l le immagini di σ_v^* e σ_l^* sul contorno σ di c.

In corrispondenza a ogni elemento della superficie libera converrà ormai indicare la forza attuale con

$$f\, d\sigma_l = f^*\, d\sigma_l^*.$$

Nei singoli problemi concreti la f^* figurerà come un dato. Anzi in queste conferenze, anche per agevolare taluni enunciati, penserò solo alla ricerca di stati di equilibrio forzato corrispondenti a *prefissati valori attuali* di tutte le forze attive; voglio dire corrispondenti a un prefissato valore di F^*, $F^*(P_*)$, per ciascun punto di c_*, e insieme a un prefissato valore di f^*, $f^*(Q_*)$, per ciascun punto Q_* di σ_l^*: come se neppure (5) le $f^*\, d\sigma^* = f\, d\sigma$ potessero mai dipendere dallo stato attuale del nostro sistema incomprimibile.

Invece, in corrispondenza a ogni elemento di σ_v^* la forza attuale si presenterà sempre come un'*incognita* reazione vincolare,

$$\Phi\, d\sigma_v = \Phi^*\, d\sigma_v^*.$$

Non escludo — contrariamente a una comoda tradizione — che nel passaggio dallo stato di riferimento allo stato attuale possa aversi un parziale *distacco* da un vincolo unilaterale, in conseguenza del quale la regione di σ effettivamente vincolata sia *minore* di σ_v: voglio

(5) Ad es. esattamente non è questo il caso di un solido immerso in un fluido a pressione prestabilita q [$f = q\nu$, $f^* = q\nu\, d\sigma/d\sigma^*$ con ν e $d\sigma$ dipendenti dalla cercata configurazione attuale].

dire, sia l'immagine $\sigma_v - \Delta\sigma$ di una parte soltanto di σ_v^*,

$$a \equiv \sigma_v^* - \Delta\sigma_* :$$

magari $\Delta\sigma_*$ potrà chiamarsi *area di distacco* e a *l'area di appoggio effettivo*.

La $\Delta\sigma_*$ è una nuova incognita, quando non si vuole escludere a priori la possibilità di distacco da un vincolo unilaterale, ma in cambio, quasi direi, è naturale ammettere che su tutta l'immagine $\Delta\sigma$ dell'area di distacco non agisca alcuna forza, nè vincolare, nè attiva:

$$\boldsymbol{\Phi}\, d\sigma = 0 \ldots \Delta\sigma ,$$

cioè

$$\boldsymbol{\Phi}^* = 0 \ldots \Delta\sigma_* . \tag{15}$$

Ogni spostamento virtuale $\boldsymbol{v}(P)$ del sistema *a partire dalla sua configurazione attuale* ormai non è più condizionato dal solo vincolo di incomprimibilità,

$$\mathrm{div}_P\, \boldsymbol{v} = 0 \ldots c :$$

c'è da aggiungere la restrizione — e solo la restrizione — che $\boldsymbol{v}(P)$ si uniformi anche ai vincoli *attuali* in superficie, ciò che però lo lascia localmente arbitrario, anche in verso, sia *su* σ_l, *sia su* $\Delta\sigma$ [mentre, in uno spostamento virtuale del sistema a partire da c_*, lo spostamento locale non resterebbe arbitrario sull'area di distacco].

Per ogni $\boldsymbol{v}(P)$, causa l'assenza di attrito, dovrà intendersi

$$\boldsymbol{\Phi} \times \boldsymbol{v} \geq 0 \ldots \sigma_v - \Delta\sigma ,$$

ciò che equivale a

$$\boldsymbol{\Phi}^* \times \boldsymbol{v}^* \geq 0 \ldots a , \tag{15)'$$

se si accenna con $\boldsymbol{v}^*(P_*)$ l'espressione di $\boldsymbol{v}(P)$ mediante P_*.

Si possono anche riassumere le (15) e (15)' in

$$\boldsymbol{\Phi}^* \times \boldsymbol{v}^* \geq 0 \ldots \sigma_v^* \tag{16}$$

perchè in $\Delta\sigma_*$, dato che in corrispondenza ad essa $\boldsymbol{v}^*$ è localmente arbitrario, la (16) non può essere soddisfatta altro che da $\boldsymbol{\Phi}^* = 0$.

L'intervento di vincoli in superficie non porta ad alcuna modifica formale delle equazioni indefinite $(13)_1$. Invece, per quanto riguarda le condizioni al contorno, diviene necessario distinguere i punti della superficie libera da quelli dell'area di distacco e da quelli dell'area di appoggio effettiva, naturalmente scrivendo f_r^* al posto di Ξ_r^* nel primo caso, 0 nel secondo e Φ_r^* nel terzo:

$$(17)\qquad \sum_{rm} (-S_{rm} + \tilde{\omega}\, \mathcal{D}_{rm})\, \nu_m^* = \begin{cases} f_r^* & \ldots \sigma_l^*, \\ -0 & \ldots \Delta\sigma_* \\ \Phi_r^* & \ldots a. \end{cases}$$

Le f_r^*, come ho già detto, in ogni singolo problema concreto verranno a corrispondere, al pari delle F_r^*, ad altrettanti dati, mentre su a le Φ_r^* restano solo soggette alla condizione (15)'.

Passando alla relazione sintetica (14), è evidente, stante la (16), che tale relazione ha ora come necessaria conseguenza

$$(18)\qquad -\int_{c_*} dc_* \cdot \sum_{rm} S_{rm}\, v_{rm}^* + \int_{c_*} \boldsymbol{F}^*(P_*)\, dc_* \times \boldsymbol{v}^* + \int_{\sigma_l^*} \boldsymbol{f}^*(Q_*)\, d\sigma_l^* \times \boldsymbol{v}^* \leq 0$$

per ogni spostamento virtuale a partire dalla configurazione attuale.

E pure qui sussiste la proprietà inversa: il verificarsi della (18) per ogni $\boldsymbol{v}^*$ è anche sufficiente per l'esistenza di uno scalare $\tilde{\omega}(P_*)$ atto a rendere localmente soddisfatte tutte le attuali $(13)_1$ e le (17) insieme alla (16). Una dimostrazione esauriente di ciò che ora ho affermato è contenuta, in forma euleriana, in una Nota del dr. G. Ferrarese (6) comparsa di recente in questi Rendiconti.

La (18) è una relazione *pura*, in essa non interviene alcuna reazione vincolare, nè interna, nè esterna. Assegnata la sollecitazione attiva, quando si sia riusciti a determinare c — cioè $\boldsymbol{s}(P_*)$ e $\Delta\sigma$ — in modo da rendere completamente soddisfatta la (18), insieme alla (9), si potrà ulteriormente ricorrere alle $(13)_1$ e (17) per il calcolo di $\tilde{\omega}$ e delle Φ_r^*, calcolo che anzi richiederà solo delle quadrature.

E con questa conclusione è terminata la mia prima conferenza. Vorrei solo far di nuovo notare che in tutto ciò che ho detto non c'è stato un esplicito intervento delle proprietà di simmetria delle ordinarie caratteristiche dello stress:

$$X_{rs} = X_{sr}.$$

Tali condizioni — dovute alla tradizionale esclusione di *momenti elementari* (7) delle forze intime — sono proprio quelle che, nell'ordine di idee da me oggi seguito, finiscono per imporre una

(6) G. Ferrarese, *Sulla relazione simbolica della meccanica dei sistemi continui vincolati*, « Rend. di Matematica », vol. 17 (1958) pp. 305-312.

(7) V. loc. cit. (2), p. 98 e p. 104.

tradizionale restrizione al potenziale elastico, prima di ogni particolare dato sperimentale circa la struttura del corpo naturale schematizzato nel nostro sistema continuo incomprimibile a trasformazioni reversibili. Si tratta, come meglio dirò nella prossima conferenza, del fatto che il potenziale viene in definitiva a dipendere dalle *nove* u' solo per il tramite delle cosidette caratteristiche di deformazione, che sono *sei*: e questo, come è ultranoto, ha sistematici riflessi anche nelle teorie classiche.

II. Solidi elastici

Ciò che dirò nei n.ⁱ 1 e 2 vuol riguardare qualunque sistema continuo: solo nel n. 3 riprenderò quanto ho detto nella prima conferenza per i sistemi incomprimibili a trasformazioni reversibili, S_ϱ, per poi dare una definizione dei solidi perfettamente elastici e riassumere le relazioni generali della Elastostatica isoterma.

1. Caratteristiche di deformazione.

Indico con

$$\sum_{rs} b_{rs}\, d\, y_r\, d\, y_s$$

la forma differenziale che esprime il quadrato dell'elemento lineare di c [ds^2 euclideo] mediante le y, cioè intendo

$$b_{rs} = b_{sr} = \sum_1^3{}_i\, x_{ir}\, x_{is},$$

e pongo, con la notazione di Kronecker,

$$b_{rs} = \delta_{rs} + 2\,\varepsilon_{rs}.$$

Questa convenzione equivale ad assumere

$$\varepsilon_{rs} = \varepsilon_{sr} = \frac{1}{2}(u_{rs} + u_{sr}) + \frac{1}{2}\sum_i u_{ir}\, u_{is}: \tag{1}$$

saranno utili anche le notazioni

$$\eta_{rs} = \eta_{sr} = \frac{1}{2}(u_{rs} + u_{sr}). \tag{1'}$$