

fico. Invero le (15) permettono di ridurre la (6) a

$$(16) \quad F^{(\tau)}(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, T) = \frac{1}{k_T} W_T \left( \frac{l_\tau^2}{l_T^2} \mathcal{J}_1, \frac{l_\tau^4}{l_T^4} \mathcal{J}_2 \right) - \int_{T_0}^T d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} \frac{e^{(\tau'')}}{\tau''} d\tau''.$$

Anzi le stesse (15) dicono che i prodotti  $l_\tau^{2r} \mathcal{J}_r$  hanno struttura invariante rispetto alla scelta di  $\tau$ : donde la necessità che lo stesso si verifichi per l'intera  $F^{(\tau)}$ . Resta quindi messa fuori di ogni dubbio la bontà del postulato che adoperai<sup>(42)</sup> fin dal 1942 per caratterizzare completamente la struttura del potenziale termodinamico nella Elasticità di secondo grado.

### VIII. POTENZIALE ELASTICO ISOTERMO.

Al termine dell'ultima conferenza si è visto che, almeno per i  $G_e$ , il *problema centrale* [cfr. IV, n. 1] della teoria delle trasformazioni termoelastiche finite sostanzialmente si riduce alla determinazione del potenziale elastico isoterma. Sarà data oggi una conveniente sintesi di risultati sperimentali all'uopo già nettamente acquisiti.

Assai utile sembra l'introduzione di certe due variabili indipendenti al posto dei tre allungamenti principali. Fra l'altro, essa porta a delimitare in modo assai espressivo l'area di definizione del potenziale elastico isoterma.

#### 1. Estensioni, scorrimenti semplici.

Pensando a una qualunque trasformazione *omogenea* isoterma di un qualsiasi  $G_e$  — e anche qui indicando con  $\Delta_r$  gli allungamenti principali, con  $d_r = 1 + \Delta_r$  i coefficienti principali della deformazione pura — serviamoci del vincolo di conservazione dei volumi,

$$(1) \quad d_1 d_2 d_3 = 1,$$

(42) V. anche C. TOLOTI, *Sul potenziale termodinamico dei solidi elastici omogenei e isotropi per trasformazioni finite* « Atti dell'Accademia d'Italia » Vol. XIV (1943) pp. 529-541.

per esprimere i tre  $\Delta_r$  mediante due variabili indipendenti, che precisamente saranno

$$\lambda = d_3 = 1 + \Delta_3, \quad s = d_1 - d_2 = \Delta_1 - \Delta_2.$$

La (1), oltre che a

$$d_1 d_2 = d_3^{-1},$$

equivale a

$$(d_1 + d_2)^2 = s^2 + 4\lambda^{-1},$$

nonchè a

$$d_1 + d_2 = D$$

se si pone

$$D = \sqrt{s^2 + 4\lambda^{-1}}.$$

I tre  $\Delta_r$  restano dunque espressi mediante  $\lambda$  e  $s$  dalle uguaglianze

$$(2) \quad \Delta_i = \frac{D + (-1)^{i-1}s}{2} - 1, \quad \Delta_3 = \lambda - 1 \quad (i = 1, 2).$$

In quanto mi appresto a dire, ripetutamente dovrò rivolgere l'attenzione ai due casi particolari  $s = 0$  e  $\lambda = 1$ .

Per  $s = 0$  le (2) si riducono a

$$d_1 = d_2 = \lambda^{-1/2}.$$

Si tratta dunque di una *estensione semplice*, nella direzione dell'asse principale di deformazione di indice 3, accompagnata dalla *contrazione laterale* occorrente per la conservazione dei volumi: quale ad es. è lo spostamento omogeneo definito dalle uguaglianze

$$x_1 = \lambda^{-1/2}y_1, \quad x_2 = \lambda^{-1/2}y_2, \quad x_3 = \lambda y_3.$$

Per  $\lambda = 1$  si viene invece ad avere

$$d_1 = \frac{\sqrt{s^2 + 4} + s}{2}, \quad d_2 = d_1^{-1}, \quad \Delta_3 = 0.$$

Sono gli stessi valori dei  $d_r$  che spettano allo spostamento omogeneo

$$x_1 = y_1 + sy_2, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3:$$

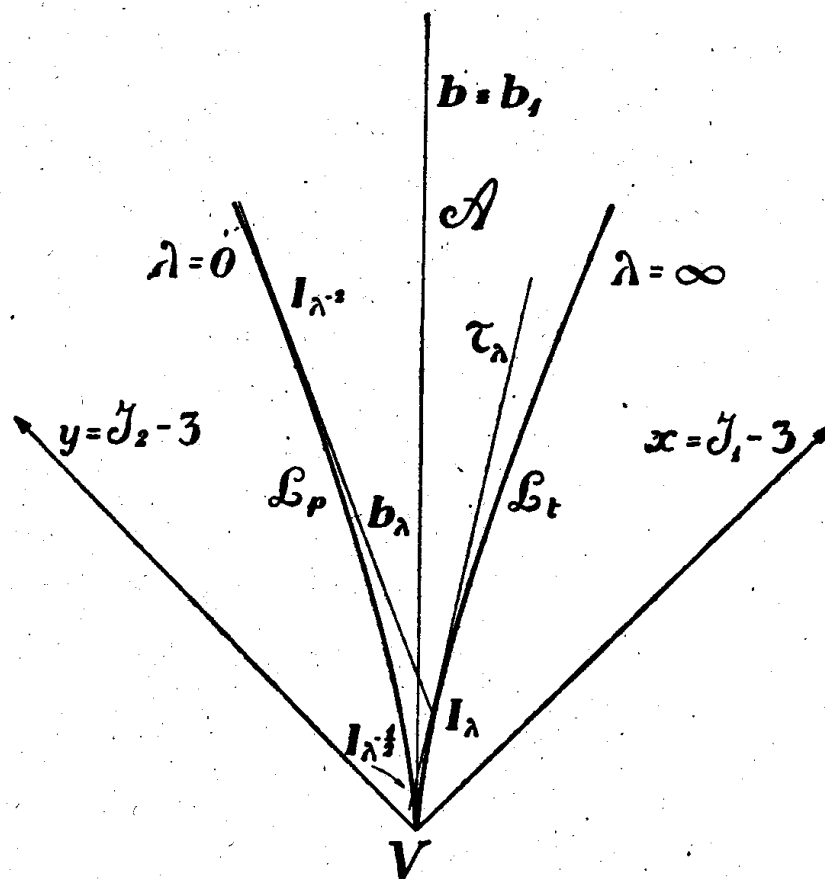
e questo palesemente è uno *scorrimento semplice*, nella direzione dell'asse  $y_2$ , nullo in tutti i punti del piano  $y_1 y_2$ .

Comunque alle (2) corrispondono per  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$  le espressioni

$$(3) \quad \begin{cases} \mathcal{I}_1 = s^2 + \lambda^2 + 2\lambda^{-1} \\ \mathcal{I}_2 = \lambda^2 s^2 + \lambda^{-2} + 2\lambda. \end{cases}$$

**2. Area di definizione del potenziale isoterma.**

Determiniamo il campo bidimensionale in cui, subordinatamente a (1), basta intendere definito  $W$ , in funzione di  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$ : precisa-



mente [cfr. (3)] determiniamo l'area piana  $\mathcal{A}$  ricoperta dal punto  $I$  di coordinate cartesiane ortogonali

$$x = \mathcal{I}_1 - 3, \quad y = \mathcal{I}_2 - 3$$

quando si dia a  $\lambda$  e ad  $s$  ogni valore da 0 a  $\infty$ .

Per  $\lambda = 1$  [scorrimento semplice] al variare di  $s$  da 0 a  $\infty$  il punto  $I$  [cfr. figura] partendo da  $V \equiv (0, 0)$  [stato naturale] descrive

la semiretta  $b$ , bisettrice del primo quadrante. Per  $s = 0$ , come luogo di  $I$  si ha invece la linea  $\mathcal{L}$  di equazioni parametriche <sup>(43)</sup>

$$x = \lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3, \quad y = \lambda^{-2} + 2\lambda - 3 \quad (\lambda \geq 0):$$

su questa linea converrà indicare con

$$I_\lambda = (x_\lambda, y_\lambda)$$

il punto corrispondente a un determinato valore  $\lambda$  del parametro, con  $\mathcal{L}_i$  l'arco  $I_1 I_\infty \equiv VI_\infty$  [trazione semplice] e con  $\mathcal{L}_p$  l'arco complementare  $VI_0$  [pressione semplice].

Evidentemente  $I_{\lambda^{-1}}$  è simmetrico a  $I_\lambda$  rispetto a  $b$ . Lungo l'intera  $\mathcal{L}$  risulta pure

$$\frac{dy_\lambda}{dx_\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{d^2y_\lambda}{dx_\lambda^2} = -\frac{1}{2(\lambda^3 - 1)},$$

onde è  $\lambda^{-1}$  il coefficiente angolare della tangente  $\tau_\lambda$  a  $\mathcal{L}$  in  $I_\lambda$ ,  $\mathcal{L}$  ha una cuspidè in  $V$ ,  $\mathcal{L}_i$  e  $\mathcal{L}_p$  sono convessi rispetto a  $b$ , ecc.

Sia ora  $b_\lambda$  la semiretta uscente da  $I_\lambda$  col coefficiente angolare  $\lambda^2$  [ $b_\lambda \equiv b$ ]. Proprio  $b_\lambda$  dà il luogo delle posizioni assunte da  $I$  quando, tenendo fermo  $\lambda$ , si fa variare  $s$  da 0 a  $\infty$ . La  $\mathcal{A}$  è dunque l'area limitata da  $\mathcal{L}$ , col concorso di parte della retta all'infinito.

È pur facile riconoscere che la  $\mathcal{L}$  è invilupata dalle  $b_\lambda$ , anzi  $b_\lambda$  si sovrappone sempre a  $\tau_{\lambda^{-2}}$ , la tangente in  $I_{\lambda^{-2}}$ . La corrispondenza fra  $I$  e le coppie di valori di  $\lambda$  e  $s$  non è biunivoca. A ogni punto  $A$  di  $\mathcal{A}$  che non appartenga a  $b$  corrispondono due e due sole <sup>(44)</sup> coppie di valori di  $\lambda$  e  $s$ , in relazione al fatto che per un tale  $A$  passa una sola tangente a  $\mathcal{L}_i$  e una sola tangente a  $\mathcal{L}_p$ . Se poi  $A$  si riduce ad appartenere a  $b$  [ma non a coincidere con  $V$ ] le tangenti per  $A$  ad  $\mathcal{L}$  vengono a essere tre, cioè si vengono ad avere tre coppie di valori di  $\lambda$  e  $s$  [delle quali una corrispondente a uno scorrimento semplice].

<sup>(43)</sup> Si tratta di un ramo di quartica.

<sup>(44)</sup> Ad es. le coppie di valori di  $\lambda$ ,  $s$  corrispondenti a  $I_\lambda$  sono  $\lambda, 0$  e  $\lambda^{-1/2}, |\lambda - \lambda^{-1/2}|$ .

### 3. Sulla deduzione del potenziale isoterma dall'esperienza.

Assegnato  $\tau$ ,  $W_\tau$  si presenta come una funzione che va definita in tutta l'area  $\mathcal{A}$  [o almeno in una regione sufficientemente estesa di  $\mathcal{A}$  a partire da  $V$ ] subordinatamente alla (VII, 5),

$$W_\tau(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2) \geq 0.$$

Esperienze di trazione semplice [o pressione semplice] da sole non possono caratterizzare numericamente  $W_\tau$  altro che lungo  $\mathcal{L}_t$  [o lungo  $\mathcal{L}_p$ ] ed esperienze di scorrimento semplice possono dare  $W_\tau$  solo lungo la  $b$ .

Esperienze relativamente recenti per una esauriente determinazione di  $W_\tau$  sono state quelle di R. S. RIVLIN<sup>(45)</sup> e D. W. SAUNDERS. Per vari tipi di gomma, con dispositivi di vario genere opportunamente ideati, essi sono giunti in primo luogo alla conclusione che la  $\partial W_\tau / \partial \mathcal{I}_1$  può ritenersi indipendente sia da  $\mathcal{I}_1$ , sia da  $\mathcal{I}_2$ , cioè variabile solo con  $\tau$ :

$$(4) \quad \frac{\partial W_\tau}{\partial \mathcal{I}_1} \equiv \text{cost.} = \frac{h_2^{(\tau)}}{2}.$$

Più precisamente, i risultati di quelle esperienze portano a presupporre per  $W_\tau$  un'espressione del tipo

$$(5) \quad 2W_\tau = h_2^{(\tau)}(\mathcal{I}_1 - 3) + \psi_\tau(\mathcal{I}_2 - 3)$$

con

$$(5)' \quad h_2^{(\tau)} \geq 0,$$

$\psi_\tau$  funzione mai decrescente dell'unico suo argomento [ $\psi_\tau(0) = 0$ ] e

$$(5)'' \quad \psi_\tau'' \leq 0,$$

almeno per deformazioni di una certa entità. Quando vorrò attribuire a  $W_\tau$  tutto questo insieme di proprietà, brevemente dirò di « attenermi ai risultati sperimentali di RIVLIN ».

<sup>(45)</sup> V. R. S. RIVLIN e D. W. SAUNDERS, *Experiments on the deformation of rubber* « Phil. Trans. », vol. 243 A (1951), pp. 251-288.

Come si può intuire, non appena si presuppone per  $W_r$  una espressione del tipo (4), per la completa determinazione di  $W_r$  in  $\mathcal{A}$  vengono a bastare esperienze di trazione semplice. Anzi questo fatto può dare lo spunto a qualche netto controllo dell'ipotesi (5) quando si abbiano a disposizione anche i risultati di esperienze di pressione semplice, o scorrimento semplice, ecc.

Fin dal 1940 M. MOONEY<sup>(46)</sup> propose per  $W_r$  l'espressione cui dà luogo la (5) per  $\psi_r'' \equiv 0$ , cioè un'espressione del tipo

$$(6) \quad 2W_r = h_2^{(r)}(\mathcal{J}_1 - 3) + h_1^{(r)}(\mathcal{J}_2 - 3).$$

Tale proposta principalmente si basò sul fatto che essa veniva a trovarsi in ottimo accordo coi risultati di precedenti, accurate esperienze di scorrimento semplice. Però non sarebbe difficile riconoscere che questo accordo si sarebbe verificato anche se al secondo membro della (6) fosse stata aggiunta una qualunque funzione di  $\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2$ .

In varie Memorie, comparse nelle *Philosophical Transactions* della Royal Society dal 1949 in poi, RIVLIN ha adoperato anche l'espressione di  $W_r$  cui si riduce la (6) per  $h_1^{(r)} = 0$ ,

$$(7) \quad 2W_r = h_2^{(r)}(\mathcal{J}_1 - 3),$$

proposta da L. R. G. TRELOAR<sup>(47)</sup> ed altri a conclusione di una teoria cinetica dell'elasticità di corpi simili alla gomma.

#### IX. ELASTICITÀ DI SECONDO GRADO.

Esistono tipi di potenziale termodinamico in corrispondenza ai quali le ordinarie caratteristiche di tensione depurate *esattamente* risultano espresse da funzioni di secondo grado — o magari di primo grado — delle caratteristiche di deformazione dello spostamento inverso. È quello che ora mi appresto a precisare, per poi rivolgermi a espressivi sviluppi della teoria che deriva da una tale ipotesi circa la struttura del potenziale termodinamico: la « Elasticità di secondo grado ».

<sup>(46)</sup> M. MOONEY, *A theory of Large Elastic Deformation* « J. Appl. Phys. », XI (1940) pp. 582-592.

<sup>(47)</sup> L. R. G. TRELOAR, *The Elasticity of a network of long chain molecules* « Trans. Faraday Soc. » 39 (1943) pp. 36-41 e 241-246.