

Come si può intuire, non appena si presuppone per W_r una espressione del tipo (4), per la completa determinazione di W_r in $\mathcal{A}$ vengono a bastare esperienze di trazione semplice. Anzi questo fatto può dare lo spunto a qualche netto controllo dell'ipotesi (5) quando si abbiano a disposizione anche i risultati di esperienze di pressione semplice, o scorrimento semplice, ecc.

Fin dal 1940 M. MOONEY⁽⁴⁶⁾ propose per W_r l'espressione cui dà luogo la (5) per $\psi_r'' \equiv 0$, cioè un'espressione del tipo

$$(6) \quad 2W_r = h_2^{(r)}(\mathcal{I}_1 - 3) + h_1^{(r)}(\mathcal{I}_2 - 3).$$

Tale proposta principalmente si basò sul fatto che essa veniva a trovarsi in ottimo accordo coi risultati di precedenti, accurate esperienze di scorrimento semplice. Però non sarebbe difficile riconoscere che questo accordo si sarebbe verificato anche se al secondo membro della (6) fosse stata aggiunta una qualunque funzione di $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2$.

In varie Memorie, comparse nelle *Philosophical Transactions* della Royal Society dal 1949 in poi, RIVLIN ha adoperato anche l'espressione di W_r cui si riduce la (6) per $h_1^{(r)} = 0$,

$$(7) \quad 2W_r = h_2^{(r)}(\mathcal{I}_1 - 3),$$

proposta da L. R. G. TRELOAR⁽⁴⁷⁾ ed altri a conclusione di una teoria cinetica dell'elasticità di corpi simili alla gomma.

IX. ELASTICITÀ DI SECONDO GRADO.

Esistono tipi di potenziale termodinamico in corrispondenza ai quali le ordinarie caratteristiche di tensione depurate *esattamente* risultano espresse da funzioni di secondo grado — o magari di primo grado — delle caratteristiche di deformazione dello spostamento inverso. È quello che ora mi appresto a precisare, per poi rivolgermi a espressivi sviluppi della teoria che deriva da una tale ipotesi circa la struttura del potenziale termodinamico: la « Elasticità di secondo grado ».

⁽⁴⁶⁾ M. MOONEY, *A theory of Large Elastic Deformation* « J. Appl. Phys. », XI (1940) pp. 582-592.

⁽⁴⁷⁾ L. R. G. TRELOAR, *The Elasticity of a network of long chain molecules* « Trans. Faraday Soc. » 39 (1943) pp. 36-41 e 241-246.

1. Ipotesi caratteristica.

Si tratta di un'ipotesi di carattere semplicista, suggerita dalle conclusioni della terza conferenza, circa ogni G_e isotropo in C_* : le singole $X_{rs}^{(a)}$ si presentano sempre come funzioni di secondo grado delle $\bar{\varepsilon}_j$, i cui coefficienti possono però dipendere da $\bar{\mathcal{I}}_1$ e $\bar{\mathcal{I}}_2$ con legge comunque complessa, finchè non si specializzi il potenziale termodinamico.

Dimostrerò che tale ipotesi equivale, proprio equivale a presupporre per il potenziale isoterma, in corrispondenza a ciascun τ , una espressione del tipo

$$(1) \quad 2W_\tau(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2) = h_2^{(\tau)}(\mathcal{I}_1 - 3) + h_1^{(\tau)}(\mathcal{I}_2 - 3) + h_3^{(\tau)}(\mathcal{I}_2 - 3)^2,$$

che poi rientra in quello della (VIII, 5),

$$2W_\tau = h_2^{(\tau)}(\mathcal{I}_1 - 3) + \psi_\tau(\mathcal{I}_2 - 3),$$

con

$$\psi_\tau = h_1^{(\tau)}(\mathcal{I}_2 - 3) + h_3^{(\tau)}(\mathcal{I}_2 - 3)^2.$$

Converrà subito osservare che per trasformazioni isoterme le (VI, 19),

$$\mathcal{I}_1 = \lambda^6 \bar{\mathcal{I}}_2, \quad \mathcal{I}_2 = \lambda^6 \bar{\mathcal{I}}_1,$$

si riducono a

$$\mathcal{I}_1 = \bar{\mathcal{I}}_2, \quad \mathcal{I}_2 = \bar{\mathcal{I}}_1,$$

onde la (1) non differisce dal supporre per W_τ un'espressione del tipo

$$(1)' \quad 2\bar{W}_\tau(\bar{\mathcal{I}}_1, \bar{\mathcal{I}}_2) = h_1^{(\tau)}(\bar{\mathcal{I}}_1 - 3) + h_2^{(\tau)}(\bar{\mathcal{I}}_2 - 3) + h_3^{(\tau)}(\bar{\mathcal{I}}_1 - 3)^2.$$

Cominciamo dal mettere in chiaro che la (1) incondizionatamente dà luogo al risultato voluto. Invero la (1) specializza la (VII, 16) in

$$\begin{aligned} F^{(\tau)}(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, T) = & \frac{1}{k_T} \left\{ h_2^{(\tau)} \left(\frac{l_\tau^2}{l_T^2} \mathcal{I}_1 - 3 \right) + h_1^{(\tau)} \left(\frac{l_\tau^4}{l_T^4} \mathcal{I}_2 - 3 \right) + \right. \\ & \left. + h_3^{(\tau)} \left(\frac{l_\tau^4}{l_T^4} \mathcal{I}_2 - 3 \right)^2 \right\} - \int_{T_0}^T d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} \frac{c^{(\tau'')}}{\tau''}. \end{aligned}$$

In parallelo [cfr. ancora (VI, 19)] il potenziale termodinamico resta pure individuato da una combinazione lineare di $\bar{\mathcal{J}}_1$, $\bar{\mathcal{J}}_1^2$ e $\bar{\mathcal{J}}_2$,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{k_T} \left\{ h_1^{(\tau)} \left(\frac{l_T^2}{l_\tau^2} \bar{\mathcal{J}}_1 - 3 \right) + h_2^{(\tau)} \left(\frac{l_T^4}{l_\tau^4} \bar{\mathcal{J}}_2 - 3 \right) + h_3^{(\tau)} \left(\frac{l_T^2}{l_\tau^2} \bar{\mathcal{J}}_1 - 3 \right)^2 \right\} - \\ - \int_{\bar{T}_0}^T d\tau' \int_{\tau_0}^{\tau'} \frac{c(\tau'')}{\tau''} d\tau'',$$

e dopo questo basta il richiamo della (VI, 21) per rendere palese che la (1) integralmente si uniforma all'ipotesi caratteristica.

Viceversa, se si accetta tale ipotesi, resta in particolare imposto di essere funzioni di secondo grado degli $\bar{A}_r$ ai secondi membri delle (VI, 20) per trasformazioni isoterme,

$$(2) \quad B_r^{(a)} = -2 \frac{\partial \bar{W}_\tau}{\partial \bar{\mathcal{J}}_1} \bar{\mathcal{J}}_1 + 2 \frac{\partial \bar{W}_\tau}{\partial \bar{\mathcal{J}}_1} \bar{A}_r - 2 \frac{\partial \bar{W}_\tau}{\partial \bar{\mathcal{J}}_2} \bar{A}_{r+1} \bar{A}_{r+2}.$$

Non occorre altro perchè resti imposta anche la necessità della (1), o (1)'. Infatti basta pensare a sottrarre la r^{ma} dalla $(r+1)^{ma}$ delle (2), per riconoscere che, sempre quale immediata conseguenza dell'ipotesi caratteristica, dovranno essere funzioni di secondo grado degli $\bar{A}_r$ anche i prodotti

$$(\bar{A}_{r+1} - \bar{A}_r) \left\{ \frac{\partial \bar{W}_\tau}{\partial \bar{\mathcal{J}}_1} + \bar{A}_{r+2} \frac{\partial \bar{W}_\tau}{\partial \bar{\mathcal{J}}_2} \right\}:$$

restrizione equivalente a quella che siano funzioni di *primo* grado tutti tre i binomi

$$D_r = \frac{\partial \bar{W}_\tau}{\partial \bar{\mathcal{J}}_1} + \bar{A}_r \frac{\partial \bar{W}_\tau}{\partial \bar{\mathcal{J}}_2}.$$

Saranno dunque funzioni di primo grado pure i prodotti

$$(\bar{A}_{r+1} - \bar{A}_r) \frac{\partial \bar{W}_\tau}{\partial \bar{\mathcal{J}}_2}.$$

Ma questo vuol dire che la $\partial \bar{W}_\tau / \partial \bar{\mathcal{J}}_2$ non può essere altro che una

costante, rispetto a $\bar{\mathcal{I}}_1$ e $\bar{\mathcal{I}}_2$:

$$(3) \quad 2 \frac{\partial \bar{W}_r}{\partial \bar{\mathcal{I}}_2} = h_2^{(r)},$$

proprio la restrizione che indicai per prima nel dar notizia dei risultati sperimentali di RIVLIN e SAUNDERS.

Essa riduce la condizione relativa ai D_r a quella che pure la $\partial \bar{W}_r / \partial \bar{\mathcal{I}}_1$ sia funzione di primo grado degli $\bar{A}_r$, e neanche dipenda da $\bar{\mathcal{I}}_2$, in quanto la stessa (3) implica

$$\frac{\partial^2 \bar{W}_r}{\partial \bar{\mathcal{I}}_1 \partial \bar{\mathcal{I}}_2} = 0.$$

Si hanno così le uguaglianze

$$\frac{\partial}{\partial \bar{A}_r} \frac{\partial \bar{W}_r}{\partial \bar{\mathcal{I}}_1} = \frac{\partial^2 \bar{W}_r}{\partial \bar{\mathcal{I}}_1^2}$$

e in definitiva ci si trova in presenza alla sola restrizione

$$\frac{\partial^2 \bar{W}_r}{\partial \bar{\mathcal{I}}_1^2} = \text{cost.} = h_3^{(r)},$$

quella che ancora mancava per accertare l'equivalenza dell'ipotesi caratteristica alla (1)'.

2. Potenziale elastico isoterma.

Ricordiamo le (V, 3),

$$\mathcal{I}_1 = s^2 + \lambda^2 + 2\lambda^{-1}, \quad \mathcal{I}_2 = \lambda^2 s^2 + \lambda^{-2} + 2\lambda.$$

In base ad esse, per $\lambda = 1$ la (1) viene a imporre al potenziale isoterma l'uguaglianza

$$2W_r = s^2 (h_1^{(r)} + h_2^{(r)} + s^2 h_3^{(r)}),$$

onde non può risultare $W_r > 0$ per ogni $s > 0$ senza che sussistano

le limitazioni

$$(4) \quad h_1^{(\tau)} + h_2^{(\tau)} \geq 0, \quad h_3^{(\tau)} \geq 0$$

e $h_1^{(\tau)} + h_2^{(\tau)}, h_3^{(\tau)}$ non siano ambedue nulli.

Ma al tempo stesso, se ci si attiene ai risultati sperimentali di RIVLIN, va ritenuto, anche per l'attuale ψ_r ,

$$\psi_r'' \leq 0,$$

cioè

$$h_3^{(\tau)} \leq 0.$$

Resta così dimostrato, stante la (4)₂, quanto preannunziato fin dallo inizio della prima conferenza: dei tre parametri che figurano nella espressione di W_r imposta dall'ipotesi caratteristica della Elasticità di secondo grado, il terzo deve intendersi nullo,

$$h_3^{(\tau)} = 0,$$

se ⁽⁴⁸⁾ incondizionatamente si accettano i risultati delle esperienze di RIVLIN. In altri termini, tale doveroso rispetto ai risultati di esperienze accurate, porta proprio a una esatta equivalenza tra l'ipotesi caratteristica dell'Elasticità di secondo grado e la proposta di MOONEY:

$$(5) \quad 2W_r = h_2^{(\tau)}(\mathcal{J}_1 - 3) + h_1^{(\tau)}(\mathcal{J}_2 - 3) = h_1^{(\tau)}(\bar{\mathcal{J}}_1 - 3) + h_2^{(\tau)}(\bar{\mathcal{J}}_2 - 3).$$

Ne risulta in primo luogo che nell'Elasticità di secondo grado le (2) vengono a dare, quali espressioni delle tensioni principali depurate in una trasformazione isoterma, le seguenti:

$$(6) \quad B_r^{(a)} = -h_1^{(\tau)}\bar{\mathcal{J}}_1 + h_1^{(\tau)}\bar{A}_r - h_2^{(\tau)}\bar{A}_{r+1}\bar{A}_{r+2}.$$

D'altra parte le (V, 3) riducono le (5) a

$$(7) \quad 2W_r = h_1^{(\tau)}\{\lambda^2 s^2 + \lambda^{-2} + 2\lambda - 3\} + h_2^{(\tau)}\{s^2 + \lambda^2 + 2\lambda^{-1} - 3\},$$

in modo che per rendere completamente soddisfatta la condizione di intrinseca stabilità

$$(8) \quad W_r \geq 0$$

⁽⁴⁸⁾ V. però T. MANACORDA, *Sul potenziale isoterma nella più generale elasticità di secondo grado per solidi incomprimibili* « Annali di Matematica », s. IV, T. XLI (1955) pp. 1-10.

certo *bastano* le due limitazioni [cfr. (VIII, 5)']

$$h_1^{(\tau)} \geq 0, \quad h_2^{(\tau)} \geq 0,$$

con $h_1^{(\tau)}$ e $h_2^{(\tau)}$ non simultaneamente nulli. Ebbene, queste limitazioni danno pure *ciò che occorre* perchè si verifichi la (8) per tutti i possibili valori di λ e s . È quanto risulta da (7) non appena si pensi di far convergere λ a 0 o a ∞ , per $s = 0$.

3. Problemi semplici.

Passo a trattare problemi particolari di Statica isoterma [$T \equiv \tau$] nella Elasticità di secondo grado, cominciando da quelli che si presentano quando: a) esista una *dilatazione costante* [propria o degenera] che dia luogo a

$$f^* = \gamma N^*$$

su tutto il contorno Σ_* di $C_* \equiv C_r$; b) le forze di massa siano trascurabili in confronto alle forze in superficie.

È il caso della trazione o pressione semplice, della trazione o pressione uniforme; come quello di un parallelepipedo retto rettangolo che su due facce opposte sia soggetto a una pressione uniforme, e insieme, sopra un'altra coppia di facce opposte, a una trazione uniforme della stessa intensità.

Indico con $-t_1, -t_2, -t_3$ i costanti coefficienti principali della γ e insieme convergo di specializzare l'orientamento della terna fissa $\mathcal{C} \equiv O c_1 c_2 c_3$ in quello di una terna unita della γ :

$$\gamma c_r = -t_r c_r \quad (r = 1, 2, 3).$$

Si avrà il caso particolare della trazione o pressione semplice, nella direzione di c_3 , per $t_1 = t_2 = 0$; della trazione o pressione uniforme per $t_1 = t_2 = t_3$; del parallelepipedo sollecitato nel modo detto per $t_1 = -t_2, t_3 = 0$.

Sempre subordinatamente ad a) e b), chiamerò *problema semplice* la ricerca di tutti gli spostamenti *omogenei* che possono dare una soluzione dell'attuale problema isoterma: presupponendo

$$s(0) = 0,$$

cioè prescindendo da una inessenziale traslazione d'insieme, necessariamente indeterminata.

Ricordiamo subito una certa osservazione della sesta conferenza [cfr. VI, n. 3, in fine]. La isotropia in C_* basta ad assicurare che la β_* ammette come terna trirettangola unita la $\mathcal{P}$, terna principale di deformazione. È quindi una dilatazione pure la $\alpha_\delta \beta_*$, con la $\mathcal{P}$ come terna unita. Anzi qui, potendosi fare intervenire l'espressione $W_r^{(d)}$ del potenziale isoterma mediante i tre allungamenti principali [al posto di $h_r \mathcal{F}^{(d)}$] si vengono ad avere come coefficienti principali della $\alpha_\delta \beta_*$ le tre differenze

$$p d_{r+1} d_{r+2} - \frac{\partial W_r^{(d)}}{\partial A_r};$$

s'intende, con $d_r = 1 + A_r$ e

$$2 W_r^{(d)} = h_1^{(r)} \left\{ \sum_r d_{r+1}^2 d_{r+2}^2 - 3 \right\} + h_2^{(r)} \left\{ \sum_r d_r^2 - 3 \right\},$$

essendo $A_r = d_r^2$, ecc.

Presupponendosi che la α sia indipendente da P^* — e così, lo stesso si verifichi per α_e , α_δ e tutte le caratteristiche di deformazione — in ogni problema semplice l'equazione vettoriale indefinita (IV, 22) si riduce a

$$\text{grad}_{P^*} p = 0 \dots C_*,$$

cioè si limita a imporre che sia costante pure p , nonchè la $\kappa = \alpha \beta_*$. In conclusione le attuali condizioni al contorno,

$$\gamma N^* = f^* = \alpha \beta_* N^* \dots \Sigma_*,$$

potendosi certo dare a N^* tre direzioni non complanari, riducono la effettiva risoluzione del problema a ricavare i valori di dieci costanti — i nove coefficienti di α e la p — dalle uguaglianze

$$(9) \quad \mathcal{D} = 1, \quad \alpha_e \cdot \alpha_\delta \beta_* = \gamma.$$

4. Soluzione principale, trazione o pressione semplice.

Converrà ormai indicare il potenziale isoterma semplicemente con W e abbreviare anche le notazioni $h_r^{(r)}$, in h_r ($r = 1, 2$).

Volendo procedere a un esauriente esame delle (9), comincio col domandarmi se esse permettono che lo spostamento $C_* \rightarrow C$ [già presupposto omogeneo] addirittura sia una deformazione pura, di centro $O[\alpha_e = 1]$.

Dopo quanto or ora ho ricordato circa le direzioni e i coefficienti principali della $\alpha_\beta \beta_*$, per $\alpha_e = 1$ le (9) possono sostituirsi con la duplice condizione che

- 1°) l'attuale $\mathcal{C}$ sia terna unita della deformazione pura;
- 2°) i valori di $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ e p diano una soluzione del sistema

$$(10) \quad d_1 d_2 d_3 = 1, \quad h_2 d_r + h_1 d_r (d_{r+1}^2 + d_{r+2}^2) - p d_{r+1} d_{r+2} = t_r.$$

Per $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ questo sistema è soddisfatto⁽⁴⁹⁾ da

$$d_1 = d_2 = d_3 = 1, \quad p = 2h_1 + h_2 = p^{(z)}$$

e simultaneamente si ha, come valore dello jacobiano dei primi membri rispetto alle quattro incognite,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ p^{(z)} & -h_2 & -h_2 & 1 \\ -h_2 & p^{(z)} & -h_2 & 1 \\ -h_2 & -h_2 & p^{(z)} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p^{(z)} - (p^{(z)} + h_2) & 0 & 1 \\ -h_2 & p^{(z)} + h_2 & -(p^{(z)} + h_2) & 1 \\ -h_2 & 0 & p^{(z)} + h_2 & 1 \end{vmatrix},$$

cioè

$$(p^{(z)} + h_2)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 (h_1 + h_2)^2 > 0.$$

È quindi da presumere che le (10) bastano ad assicurare l'univoca risoluzione del sistema, almeno quando gli assegnati t_r non siano troppo grandi. Accennerò con

$$d_r^* = 1 + \Delta_r^*, \quad p^*$$

tale determinazione dei d_r e di p . Insieme chiamerò *soluzione prin-*

⁽⁴⁹⁾ Come è naturale [cfr. (VII, 1)].

principale delle (9) quella che viene a essere costituita da p^* e dalla deformazione pura $\mathcal{G}^*$ avente come terna unita l'attuale $\mathcal{T}$, con gli allungamenti principali Δ_r^* .

Per brevità mi limito a controllare l'esistenza e unicità della soluzione principale nel caso della trazione o pressione semplice,

$$(11) \quad t_1 = t_2 = 0,$$

e nel caso

$$(12) \quad t_1 = -t_2, \quad t_3 = 0,$$

che pure ha, come tra poco vedremo, uno speciale interesse: soltanto nel caso limite

$$h_2 = 0$$

troveremo delle limitazioni per i t_r ,

$$(13) \quad t_3 < h_1, \quad |t_1| = |t_2| < h_1.$$

Torno a porre $d_3 = \lambda$, $d_1 - d_2 = s$ e abbrevio in t la notazione t_1 o $-t_2$. In ambedue i casi (11) e (12) è $t_1 + t_2 = 0$, in modo che, sommando e sottraendo membro a membro le due equazioni

$$\begin{cases} h_2 d_1 + h_1 d_1 (d_2^2 + \lambda^2) - p d_2 \lambda = t_1, \\ h_2 d_2 + h_1 d_2 (d_1^2 + \lambda^2) - p d_1 \lambda = t_2, \end{cases}$$

le (10)₂ possono sostituirsi con

$$\begin{cases} (d_1 + d_2) \{h_2 + h_1 (\lambda^2 + d_1 d_2) - p \lambda\} = 0, \\ (d_1 - d_2) \{h_2 + h_1 (\lambda^2 - d_1 d_2) + p \lambda\} = 2t, \\ h_2 \lambda + h_1 \lambda (d_1^2 + d_2^2) - p d_1 d_2 = t_3. \end{cases}$$

La (10)₁ aggiunge

$$d_1 d_2 = \lambda^{-1}, \quad d_1^2 + d_2^2 = s^2 + 2\lambda^{-1}.$$

Il sistema (10) può dunque tradursi nell'insieme di

$$(14) \quad p = h_2 \lambda^{-1} + h_1 (\lambda + \lambda^{-2})$$

e

$$(15) \quad \begin{cases} s \{h_2 + h_1 (\lambda^2 - \lambda^{-1}) + p\lambda\} = 2t, \\ h_2\lambda + h_1\lambda (s^2 + 2\lambda^{-1}) - p\lambda^{-1} = t_3. \end{cases}$$

Anzi la (14) notevolmente semplifica le (15), permettendo di sostituirle con

$$(16) \quad \begin{cases} s (h_2 + \lambda^2 h_1) = t \\ (1 - \lambda^{-3}) (h_1 + \lambda h_2) + h_1 \lambda s^2 = t_3. \end{cases}$$

In particolare, nel caso limite $h_2 = 0$, si ha il sistema

$$s\lambda^2 = \frac{t}{h_1}, \quad 1 - \lambda^{-3} + \lambda s^2 = \frac{t_3}{h_1},$$

che nettamente dà

$$s = 0, \quad 1 - \lambda^{-3} = \frac{t_3}{h_1}$$

per $t = 0$ [trazione o pressione semplice] e invece

$$s\lambda^2 = \frac{t}{h_1}, \quad \frac{t^2}{h_1^2} = 1 - \lambda^3$$

per $t_3 = 0$.

È quanto basta per concludere che, in tali casi limiti, per l'esistenza e unicità di una ed una sola soluzione principale occorre e basta che sussistano le (13). Ormai, intenderò

$$h_2 > 0.$$

Per $t = 0$ la (16)₁ [come è naturale] da sola impone l'annullarsi di s , riducendo così la (16)₂ a un'equazione nella sola λ ,

$$t_3 = f(\lambda)$$

con

$$f(\lambda) = (1 - \lambda^{-3}) (h_1 + \lambda h_2) = \lambda h_2 + h_1 - \lambda^{-2} h_2 - \lambda^{-3} h_1.$$

Evidentemente [quale conseguenza delle limitazioni $h_1 \geq 0$ e $h_2 > 0$] per ogni λ risulta

$$f'(\lambda) > 0, \quad f''(\lambda) < 0$$

accanto a

$$f(0) = -\infty, \quad f(\infty) = +\infty.$$

Resta quindi accertata l'esistenza e unicità della soluzione principale, per ogni t_3 . Anzi il valore di Δ_3^* risulta proprio positivo o negativo secondo sia positivo o negativo t_3 , e in più, in corrispondenza a un qualunque Δ_3^* , si viene ad avere

$$\frac{dt_3}{d\Delta_3^*} > 0, \quad \frac{d^2 t_3}{d\Delta_3^{*2}} < 0.$$

È proprio tutto ciò che poteva augurarsi per il migliore accordo con risultati qualitativi delle esperienze di trazione o pressione semplice.

5. Possibili indeterminazioni effettive in problemi semplici.

Facilmente si può ormai esaurire anche il caso (12). Per esso l'eliminazione di s tra la (16)₁ e la (16)₂ fornisce l'equazione risolvente

$$(17) \quad h_1 t^2 = g(\lambda)$$

con

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= (h_2 + \lambda^2 h_1)^2 (h_2 + \lambda^{-1} h_1) (\lambda^{-3} - 1) = \\ &= h_1 h_2^2 \lambda^{-4} + h_2^3 \lambda^{-3} + 2h_1^2 h_2 \lambda^{-2} + h_1 h_2^2 \lambda^{-1} + \\ &+ h_1^3 - h_2^3 - h_1^2 h_2 \lambda - 2h_1 h_2^2 \lambda^2 - h_1^3 \lambda^3 - h_1^2 h_2 \lambda^4. \end{aligned}$$

Evidentemente, accanto a $g(1) = 0$, sempre quale conseguenza delle limitazioni $h_1 \geq 0$ e $h_2 > 0$, risulta $g'(\lambda) < 0$ per ogni λ e $g(0) = \infty$. La $g(\lambda)$ passa dunque monotonamente da ∞ a zero al variare di λ da 0 a 1, per poi divenire e definitivamente restare negativa. In conclusione, assegnato t , la (17) resta soddisfatta da un unico valore di Δ_3^* , *negativo*.

Torniamo ora al sistema generale (9), col solo presupposto di esistenza e unicità per la soluzione principale $\mathcal{G}^*, p^*$; e domandiamoci se esistono soluzioni delle (9) per cui l'ampiezza φ di α_e non sia multipla di π . Potrò nettamente stabilire che ce ne sono *soltanto quando sia nulla la somma di due dei t_r* [come lo è in ambedue i casi (11) e (12)]. Naturalmente si tratta della condizione necessaria

e sufficiente affinché l'attuale sollecitazione, riportata allo stato di riferimento, ammetta un asse d'equilibrio⁽⁵⁰⁾ nel senso di MÖBIUS.

Indicando con u una qualunque retta orientata per O [e con u il relativo versore] nel dimostrare l'asserto converrà accennare con $\mathcal{R}_{u,\varphi}$ la rotazione di C_* che ha per asse u e ampiezza φ , oppure il corrispondente rotore; con $\mathcal{G}_{u,\varphi}$ la deformazione pura trasformata di $\mathcal{G}^*$ mediante $\mathcal{R}_{u,\varphi}$,

$$\mathcal{G}_{u,\varphi} = \mathcal{R}_{u,\varphi} \mathcal{G}^* \mathcal{R}_{u,\varphi}^{-1},$$

cioè la deformazione pura che, con gli stessi Δ_r di $\mathcal{G}^*$, ammette quale terna unita la terna trirettangola in cui la $\mathcal{T}$ è trasformata da $\mathcal{R}_{u,\varphi}$.

Proviamoci dunque a supporre l'esistenza di una soluzione delle (9) nella quale sia

$$\alpha_\varrho = \mathcal{R}_{u,\varphi}$$

con φ non multiplo di π . Non potendo $\alpha_\delta \beta_*$ essere altro che una dilatazione, dovrà essere una dilatazione [insieme a γ] pure il prodotto

$$\mathcal{R}_{u,-\varphi} \gamma,$$

con $\varphi \neq m\pi$.

Non sarebbe difficile dimostrare che tale condizione non risente affatto del valore $\neq m\pi$ presupposto per φ . A parità di γ e u , se essa è soddisfatta per un certo valore di $\varphi \neq m\pi$, lo è per qualunque altro φ . Non vengono invece a mancare delle restrizioni per la γ e u , che però, dopo quanto ho detto, possono benissimo individuarsi pensando φ infinitesimo.

Con questo la condizione in esame resta tradotta semplicemente in quella che sia una dilatazione il prodotto

$$u \wedge \gamma;$$

cioè nelle tre uguaglianze

$$c_{s+1} \times (u \wedge \gamma c_{s+2}) = c_{s+2} \times (u \wedge \gamma c_{s+1}),$$

equivalenti a

$$(18) \quad (t_{s+1} + t_{s+2}) u_s = 0 \quad (s = 1, 2, 3).$$

I tre u_s non possono essere simultaneamente nulli, quindi le (18) impongono l'annullarsi di uno almeno dei binomi $t_{s+1} + t_{s+2}$,

⁽⁵⁰⁾ V. *Sollecitazioni iperstatiche* « Rend. Istituto Lombardo » S. II, Vol. LXV, Fasc. XIX-XX (1932) n. 4.

diciamo

$$(19) \quad t_1 + t_2 = 0;$$

dopodichè tutte tre le (18) certo restano soddisfatte da $u = c_3$.

Accertata così la *necessità* della (19), passo a dimostrare che viceversa si ha in essa quanto basta perchè [accennando con $\mathcal{R}_{c_3, \varphi}$ i rotori di asse y_3] le (9) restino soddisfatte da

$$(20) \quad p = p^*, \quad \alpha_2 = \mathcal{R}_{c_3, \varphi}, \quad \alpha_3 = \mathcal{R}_{c_3, -\varphi/2} \mathcal{G}^* \mathcal{R}_{c_3, \varphi/2} = \mathcal{G}_{c_3, -\varphi/2}$$

per ogni valore di φ : anzi resterà insieme stabilito che non ci sono soluzioni di altro tipo, per il problema semplice.

Il verificarsi della (19), come prima ho detto, è necessario e sufficiente perchè $\mathcal{R}_{c_3, -\varphi} \gamma$ sia una dilatazione per ogni scelta di $\varphi \neq m\pi$: ad es. equivale alla condizione che $\mathcal{R}_{c_3, -\varphi/2} \gamma$ non differisca dalla sua coniugata, cioè a

$$\mathcal{R}_{c_3, -\varphi/2} \gamma = \gamma \mathcal{R}_{c_3, \varphi/2}.$$

In altri termini, la (19) può tradursi nell'uguaglianza

$$\gamma = \mathcal{R}_{c_3, \varphi/2} \gamma \mathcal{R}_{c_3, \varphi/2} \equiv \mathcal{R}_{c_3, \varphi} \cdot \mathcal{R}_{c_3, -\varphi/2} \gamma \mathcal{R}_{c_3, \varphi/2}.$$

Si avrà dunque una soluzione del problema semplice con

$$\alpha_2 = \mathcal{R}_{c_3, \varphi}$$

solo quando si possano scegliere α_3 e p in modo che insieme a $\mathcal{D} = 1$ risulti

$$(21) \quad \alpha_3 \beta_* = \mathcal{R}_{c_3, -\varphi/2} \gamma \mathcal{R}_{c_3, \varphi/2},$$

cioè, in base a quanto ho ricordato fin dal n. 3 riguardo al prodotto $\alpha_3 \beta_*$, solo quando:

1°) α_3 ammetta come terna unita quella in cui viene trasformata la $\mathcal{T}$ da $\mathcal{R}_{c_3, -\varphi/2}$;

2°) i d_r e p siano tali che risulti

$$p d_{r+1} d_{r+2} - \frac{\partial W_r^{(4)}}{\partial \Delta_r} = -t_r.$$

Ma il sistema ora scritto, per i d_r e la p , è ancora il sistema (10), che ammette una ed una sola soluzione, costituita dai d_r^* e da p^* .

È quanto dire che la (21) si esaurisce nell'imporre

$$p = p^*, \quad \alpha_\delta = \mathcal{R}_{c_\delta, -\varphi/2} \mathcal{G}^* \mathcal{R}_{c_\delta, \varphi/2},$$

c. d. d.

Il risultato è in perfetto accordo col teorema di esclusione di cui parlai fin dalla seconda conferenza. Nel caso $t_1 = t_2 = 0$ tutte le f^* hanno la stessa direzione, mentre la $(20)_3$ si riduce a individuare α_δ in $\mathcal{G}^*$; perchè necessariamente è $d_1^* = d_2^*$, cioè proprio la $\mathcal{G}^*$ ammette come terna unita qualunque terna trirettangola di cui faccia parte l'asse y_3 .

Invece nel caso $t_1 = -t_2 \neq 0$ le f^* non hanno tutte la stessa direzione e l'indeterminazione della rotazione d'insieme si riflette in un'indeterminazione della deformazione pura: precisamente, a una rotazione d'insieme di ampiezza φ [attorno a y_3] inevitabilmente si accompagna una rotazione in senso opposto, di ampiezza $-\varphi/2$, della terna principale di deformazione.

X. FLESSIONE DI UNA PIASTRA RETTANGOLARE DI SPESSORE QUALUNQUE.

Quest'ultima conferenza vuol riguardare una *completa* trattazione del problema della flessione di una piastra rettangolare di spessore qualunque nella Elasticità di secondo grado.

Per brevità, ma anche per far meglio risaltare la sorprendente coerenza che anche qui si rivela in tutti gli sviluppi di una trattazione accurata, quasi fin da principio non parlerò altro⁽⁵¹⁾ che del caso limite [cfr. (VIII, 7)]

$$h_1 = 0.$$

Questa restrizione porta h_2 a coincidere col secondo coefficiente di LAMÉ⁽⁵²⁾, onde mi verrà naturalmente fatto di scrivere

$$\mu$$

al posto di h_2 .

⁽⁵¹⁾ È invece del tutto esente da questa restrizione la trattazione del problema esposta nel § 2 del cap. III della mia 3^a Memoria degli « Annali ».

⁽⁵²⁾ Cfr. ad es. Mem. 3^a, p. 172: al tempo stesso si viene ad avere la coincidenza di $3h_2$ col modulo di YOUNG, E .