Ma il sistema ora scritto, per i d_r e la p, è ancora il sistema (10), che ammette una ed una sola soluzione, costituita dai d_r^* e da p^*.

È quanto dire che la (21) si esaurisce nell'imporre

$$p = p^*, \quad \alpha_\delta = \mathcal{R}_{c_3, -\varphi/2}\, \mathcal{G}^*\, \mathcal{R}_{c_3, \varphi/2},$$

c. d. d.

Il risultato è in perfetto accordo col teorema di esclusione di cui parlai fin dalla seconda conferenza. Nel caso $t_1 = t_2 = 0$ tutte le f^* hanno la stessa direzione, mentre la $(20)_3$ si riduce a *individuare* α_δ in $\mathcal{G}^*$; perchè necessariamente è $d_1^* = d_2^*$, cioè proprio la $\mathcal{G}^*$ ammette come terna unita qualunque terna trirettangola di cui faccia parte l'asse y_3.

Invece nel caso $t_1 = -t_2 \neq 0$ le f^* non hanno tutte la stessa direzione e l'indeterminazione della rotazione d'insieme si riflette in un'indeterminazione della deformazione pura: precisamente, *a una rotazione d'insieme di ampiezza* φ [attorno a y_3] *inevitabilmente si accompagna una rotazione in senso opposto, di ampiezza* $-\varphi/2$, *della terna principale di deformazione.*

X. Flessione di una piastra rettangolare di spessore qualunque.

Quest'ultima conferenza vuol riguardare una *completa* trattazione del problema della flessione di una piastra rettangolare di spessore qualunque nella Elasticità di secondo grado.

Per brevità, ma anche per far meglio risaltare la sorprendente coerenza che anche qui si rivela in tutti gli sviluppi di una trattazione accurata, quasi fin da principio non parlerò altro [51] che del caso limite [cfr. (VIII, 7)]

$$h_1 = 0.$$

Questa restrizione porta h_2 a coincidere col secondo coefficiente di Lamé [52], onde mi verrà naturalmente fatto di scrivere

$$\mu$$

al posto di h_2.

[51] È invece del tutto esente da questa restrizione la trattazione del problema esposta nel § 2 del cap. III della mia 3ª Memoria degli « Annali ».

[52] Cfr. ad es. Mem. 3ª, p. 172: al tempo stesso si viene ad avere la coincidenza di $3h_2$ col modulo di Young, E.

1. Posizione del problema.

Intendo che in C_* il solido si presenti come una *piastra rettangolare* [parallelepipedo retto rettangolo] di spessore $2q_*$, di *larghezza* $2L_*$, di *altezza* $2H_*$, e assumo come origine della solita $\mathcal{T} \equiv O\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2\mathbf{c}_3$ il baricentro di C_*, attribuendo a $\mathbf{c}_1$ la direzione normale alle due *facce* [direzione parallela agli spigoli di lunghezza $2q_*$], a $\mathbf{c}_2$ la direzione normale ai *bordi laterali* [direzione parallela agli spigoli di lunghezza $2L_*$] e quindi a $\mathbf{c}_3$ la direzione normale alle *basi* della piastra [direzione parallela agli spigoli di lunghezza $2H_*$].

Insieme intendo che, adoperando le usuali notazioni

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{x_1}{r} = \cos\theta, \quad \frac{x_2}{r} = \sin\theta \quad (-\pi \leq \theta < \pi),$$

lo spostamento inverso $C \rightarrow C_*$ resti definito — a meno di uno spostamento rigido — da uguaglianze del tipo

$$(1) \qquad y_1 = y(r), \quad y_2 = \Theta(\theta), \quad y_3 = z(x_3)$$

con

$$(1)' \qquad y'(r) > 0, \quad \Theta'(\theta) > 0, \quad z'(x_3) > 0$$

in tutto C e

$$(1)'' \qquad \Theta(0) = 0, \quad z(0) = 0:$$

in sostanza, suppongo che il sistema triplo ortogonale costituito dalle tre famiglie di piani paralleli agli attuali piani coordinati, sia trasformato da $C_* \rightarrow C$ nel sistema triplo ortogonale che serve a definire le coordinate cilindriche r, θ, x_3.

Le (1)-(1)'-(1)'' precisano che in C il solido si presenta come un settore di crosta cilindrica di asse $O\mathbf{c}_3$, avente come piani di simmetria $O\mathbf{c}_3\mathbf{c}_1$ e $O\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2$. Indicherò con a il raggio della faccia interna Σ_i, con $b > a$ il raggio della faccia esterna Σ_e, con r_1 la media geometrica dei due raggi, con $\alpha < \pi$ il semiangolo di apertura, con $2H$ l'altezza. In altri termini pongo

$$(2) \qquad -q_* = y(a), \quad q_* = y(b), \quad \pm L_* = \Theta(\pm\alpha), \quad \pm H_* = z(\pm H)$$

e insieme

$$r_1 = \sqrt{ab}.$$

Rispetto a un punto qualunque $P \equiv (r, \theta, x_3)$ di C sia $\tilde{\omega}_\theta$ il semipiano per P uscente da Oc_3.

Riuscirà pure comodo convenire fin d'ora di indicare con $\Sigma^{(l_0)}$ il bordo laterale di C contenuto in $\tilde{\omega}_{-\alpha}$, con $\Sigma^{(l_1)}$ quello in $\tilde{\omega}_\alpha$; con $\Sigma^{(b_0)}$ la base appartenente al piano $x_3 = -H$, con $\Sigma^{(b_1)}$ l'altra base; con $\sigma^{(l_i)}$ una qualunque delle strisce infinitesime di $\Sigma^{(l_i)}$ $(i = 0, 1)$ normali a c_3, voglio dire, una striscia di $\Sigma^{(l_i)}$ compresa tra due piani infinitamente prossimi normali all'asse x_3, π_{x_3} e $\pi_{x_3+dx_3}$; con $\mathrm{I}^{(l_i)}$ l'insieme delle forze esterne agenti su $\sigma^{(l_i)}$, con $|\,dx_3\,| \cdot \boldsymbol{R}^{(l_i)}$ il suo risultante, con $|\,dx_3\,| \cdot \boldsymbol{M}^{(l_i)}$ il suo momento risultante rispetto a O; con $\sigma^{(b_i)}$ un settore infinitesimo di $\Sigma^{(b_i)}$ $(i = 0, 1)$ compreso fra $\tilde{\omega}_\theta$ e $\tilde{\omega}_{\theta+d\theta}$; con $\mathrm{I}^{(b_i)}$ l'insieme delle forze esterne agenti su $\sigma^{(b_i)}$, con $|\,r_1\, d\theta\,| \cdot \boldsymbol{R}^{(b_i)}$ il suo risultante, con $|\,r_1\, d\theta\,| \cdot \boldsymbol{M}^{(b_i)}$ il suo momento risultante rispetto a O.

Appresso, quando dirò « piastra *sottile* » vorrò unicamente porre la restrizione che il puro numero

$$\zeta = \frac{2q_* \alpha}{L_*}$$

sia tanto piccolo da poter conservare in ogni equazione solo i termini di ordine minimo in ζ.

In primo luogo — *problema preliminare* — mi propongo di specializzare $C \to C_*$ [e in particolare di scegliere a e b] in modo che C dia una configurazione di equilibrio forzato rispetto a forze agenti *solo sui bordi laterali e sulle due basi della piastra:*

$$\boldsymbol{F} = 0 \ldots C, \quad \boldsymbol{f} = 0 \ldots \Sigma_i + \Sigma_e .$$

Potrò dimostrare, senza alcuna incertezza, che [qualunque siano H_*, L_* e q_*] *prefissati a piacere* $\alpha < \pi$ e $H > 0$ *il problema preliminare ammette una ed una sola soluzione,* per la quale ciascun $\mathrm{I}^{(l_i)}$ equivale a una coppia.

Successivamente — *problema effettivo* — cercherò se è possibile che l'equilibrio in C sia mantenuto *solo da coppie*: precisamente, intendendo ancora prefissato a piacere $\alpha < \pi$, se è possibile disporre di H in modo che *anche ogni* $\mathrm{I}^{(b_i)}$ *equivalga a una coppia.* Come vedremo, pure il problema effettivo ammette una ed una sola soluzione; anzi per una piastra sottile [qualunque possa essere l'entità di α] in definitiva gli $\boldsymbol{M}^{(l_i)}$ e $\boldsymbol{M}^{(b_i)}$ conservano proprio le stesse espressioni che fornirebbe la teoria linearizzata e si hanno proprietà semplici anche per la sollecitazione riportata allo stato di riferimento.

2. Prime conseguenze della condizione di incomprimibilità.

Alle (1) si accompagna l'espressione

$$ds_*^2 = y'^2(r)\,dr^2 + \Theta'^2(\theta)\,d\theta^2 + z'^2(x_3)\,dx_3^2$$

del quadrato dell'elemento lineare di C_*. Questo vuol dire che: 1°) in corrispondenza a ogni P sono direzioni principali di deformazione per $C \to C_*$ la direzione della normale $n^{(r)}$ all'asse Oc_3, la direzione della normale $t^{(\theta)}$ a $\tilde{\omega}_\theta$, e la direzione della parallela $p^{(x_3)}$ a c_3; 2°) si può intendere

$$(3)\qquad 1 + \bar{\varDelta}_1 = y'(r), \quad 1 + \bar{\varDelta}_2 = \frac{\Theta'(\theta)}{r}, \quad 1 + \bar{\varDelta}_3 = z'(x_3).$$

La condizione di incomprimibilità resta dunque tradotta da

$$\frac{y'(r)}{r}\,\Theta'(\theta)\,z'(x_3) = 1\,;$$

si può dire, da

$$(4)\qquad \Theta'(\theta) \equiv \text{cost.} = K, \quad z'(x_3) \equiv \text{cost.} = u$$

e

$$(5)\qquad y'(r) = \frac{r}{uK}.$$

Le (1)' impongono alle costanti K e u di essere positive. Le (1)'' specializzano le (4) in

$$(6)\qquad \Theta(\theta) \equiv K\theta, \quad z(x_3) \equiv ux_3 .$$

L'insieme delle (5), $(2)_1$ e $(2)_2$ equivale a

$$(7)\qquad y(r) = \frac{2r^2 - a^2 - b^2}{4uK}, \quad 2q_* = \frac{b^2 - a^2}{2uK},$$

mentre le $(2)_3$, $(2)_4$ possono ormai sostituirsi con

$$(8)\qquad K = \frac{L_*}{\alpha}, \quad u = \frac{H_*}{H}:$$

si noti che la $(8)_1$ dà luogo a

$$(8)' \qquad \zeta = \frac{2q_*}{K}$$

e la $(8)_2$ a $u < 1$ per $H_* < H$, ecc.

Naturalmente la $y(r)$ deve annullarsi per un valore di r compreso tra a e b, il valore

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

che risulta $< b$ ma $> r_1$.

3. Caratteristiche di tensione, equazioni di Cauchy.

Trattandosi di un sistema isotropo in C_*, per ciascun P la terna trirettangola $Pn^{(r)}\, t^{(\theta)}\, p^{(x_3)}$ è anche terna principale di tensione, con l'immediata conseguenza che deve essere

$$(9) \qquad f = B_1 N$$

in ogni punto di Σ_i e Σ_e,

$$(10) \qquad f = B_2 N$$

in ogni punto dei bordi laterali di C,

$$(11) \qquad f = B_3 N$$

in ogni punto delle basi.

Comincio ora ad adoperare la restrizione

$$h_1 = 0, \qquad h_2 = \mu.$$

Col suo intervento, le (3), (4) e (5) già a questo punto permettono di specificare le (VI, 6) in

$$(12) \quad B_1 - p = -\mu u^2 K^2 r^{-2}, \; B_2 - p = -\mu K^{-2} r^2, \; B_3 - p = -\mu u^{-2}.$$

Per quanto poi riguarda le equazioni indefinite di CAUCHY [o con un semplice ragionamento diretto, o specializzando la loro espressione generale in coordinate cilindriche] si trova che attualmente esse equivalgono a

$$(13)\qquad r\frac{\partial B_1}{\partial r} = B_2 - B_1\,,\quad \frac{\partial B_2}{\partial \theta} = 0\,,\quad \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0\,.$$

Nei secondi membri delle (12) non figurano nè θ, nè x_3, onde le $(13)_2$ e $(13)_3$ possono sostituirsi con

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial p}{\partial x_3}\,,$$

cioè con la condizione che p sia una funzione $p(r)$ della sola r. Così le (12) impongono anche a ciascuna delle B_s ($s = 1, 2, 3$) di essere una funzione $B_s(r)$ della sola r, e la condizione che f si annulli in ogni punto di Σ_i e Σ_e resta semplicemente tradotta [cfr. (9)] da

$$(14)\qquad B_1(a) = 0,\quad B_1(b) = 0.$$

Detto n un qualunque numero reale, la $(13)_1$ risulta equivalente a

$$(15)\qquad \frac{d}{dr}(r^{n+1}B_1) = (B_2 + nB_1)\,r^n\,,$$

in modo che le (14) dànno subito luogo a

$$(16)\qquad \int_a^b B_2\, r^n\, dr = -\,n\int_a^b B_1\, r^n\, dr:$$

per $n = 0$ si ottiene

$$(17)\qquad \int_a^b B_2\, dr = 0,$$

per $n = 1$

$$(18)\qquad \int_a^b B_2 r\, dr = -\int_a^b B_1 r\, dr.$$

D'altra parte la (10) evidentemente implica

$$R^{(l_i)} = \left| \int_a^b B_2 dr \right| \qquad (i = 0, 1),$$

in modo che la (17) basta a imporre *l'equivalenza di ciascun* $\mathrm{I}^{(l_i)}$ *a una coppia*: una coppia di momento corrispondente a

$$M^{(l_i)} = (-1)^i c_3 \cdot \int_a^b B_2 r dr \qquad (i = 0, 1). \tag{19}$$

Rilevo fin d'ora che la (11) dà luogo, per ogni $\mathrm{I}^{(b_i)}$, a

$$R^{(b_i)} = (-1)^i c_3 \cdot \frac{1}{r_1} \int_a^b B_3 r dr, \quad M^{(b_i)} = (-1)^{i+1} t_\theta \cdot \frac{1}{r_1} \int_a^b B_3 r^2 dr, \tag{20}$$

se si indica con t_θ il vettore unitario che ha la direzione della normale a $\tilde{\omega}_\theta$ col verso in cui cresce θ.

4. Risoluzione del problema preliminare.

Dalle $(12)_1$ e $(12)_2$ ben facilmente si ricava che la $(13)_1$ può ormai sostituirsi con

$$p(r) = \frac{\mu}{2} \{u^2 K^2 r^{-2} - K^{-2} r^2\} + c, \tag{21}$$

purchè s'intenda c indipendente da r.

Corrispondentemente la $(12)_1$ resta ridotta a

$$B_1 = -\frac{\mu}{2} \{u^2 K^2 r^{-2} + K^{-2} r^2\} + c$$

e le (14) posson tradursi nella condizione che l'equazione di secondo grado

$$x^2 - \frac{2K^2 c}{\mu} x + u^2 K^4 = 0$$

abbia per radici a^2 e b^2, cioè nelle due uguaglianze

$$a^2 + b^2 = \frac{2K^2 c}{\mu}, \quad a^2 b^2 = u^2 K^4 . \tag{22}$$

La seconda evidentemente fornisce

$$r_1 = u^{\frac{1}{2}} K = \frac{u^{\frac{1}{2}} L^*}{\alpha}, \tag{22$'$}$$

ma col concorso di $(7)_2$ dà pure quanto basta per individuare separatamente a e b in funzione di u, K e q_*. Invero, posto

$$\varrho = \frac{b}{a} > 1,$$

la $(22)_2$ dà subito luogo a

$$a = u^{\frac{1}{2}} K \varrho^{-\frac{1}{2}}, \; b = u^{\frac{1}{2}} K \varrho^{\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

mentre la $(7)_2$ univocamente fornisce [3]

$$\varrho = \zeta + \sqrt{1 + \zeta^2} : \tag{24}$$

anzi ϱ *risulta indipendente da* u *e* $\varrho - 1$ *si confonde con* ζ *nel caso di una piastra sottile.*

La $(22)_2$ permette pure di tradurre la $(22)_1$ in

$$c = \frac{\mu u}{2} (\varrho + \varrho^{-1}).$$

Quindi, introducendo la notazione abbreviativa

$$\xi = \frac{r^2}{ab} = \frac{r^2}{r_1^2},$$

[3] Perchè la $(22)_2$ rende la $(7)_2$ equivalente [cfr. (8)$'$] a

$$2\zeta = \frac{b^2 - a^2}{ab} = \varrho - \varrho^{-1}.$$

si può precisare la (21) in

$$p(r) = \frac{\mu u}{2}\{\xi^{-1} - \xi\} + \frac{\mu u}{2}\{\varrho + \varrho^{-1}\} = \tag{25}$$

$$= -\mu u \left\{\xi - \frac{\varrho + \varrho^{-1}}{2}\right\} + \frac{\mu u}{2}\{\xi + \xi^{-1}\}.$$

Al variare di r da a a b, la ξ passa monotonamente dal valore $a^2/ab = \varrho^{-1}$ al valore ϱ e la $p(r)$ dal valore $\mu u\varrho$ al valore $\mu u\varrho^{-1}$. Appresso trarremo pure profitto dal fatto che [essendo $rdr = r_1^2 d\xi/2$] da (25) risulta

$$\int_a^b prdr \doteq \frac{\mu u r_1^2}{4}\int_{\varrho^{-1}}^{\varrho}(\xi + \xi^{-1})\,d\xi. \tag{26}$$

5. Risoluzione del problema effettivo.

Continuiamo a pensare α come un dato [insieme a q_*, L_*, H_* e K, ζ, ϱ] e passiamo a cercare se è possibile disporre di H, o meglio di $u = H_*/H$, in modo che anche ogni $\mathrm{I}^{(b_i)}$ equivalga a una coppia:

$$\int_a^b B_3 rdr = 0. \tag{27}$$

Questa restrizione equivale a un'equazione in u atta a individuare u da sola, in quanto ammette un'unica radice positiva. Invero, stante la (26), essa non differisce da

$$\frac{\mu u r_1^2}{4}\int_{\varrho^{-1}}^{\varrho}(\xi + \xi^{-1})\,d\xi - \mu u^{-2}\int_a^b rdr = 0,$$

ovvero da

$$u^3\int_{\varrho^{-1}}^{\varrho}(\xi + \xi^{-1})\,d\xi - 2(\varrho - \varrho^{-1}) = 0.$$

Si tratta dunque, fortunatamente, di un'equazione algebrica che ammette una sola radice reale e positiva,

$$u_* = \sqrt[3]{\frac{2(\varrho - \varrho^{-1})}{\int_{\varrho^{-1}}^{\varrho} (\xi + \xi^{-1})\, d\xi}}. \tag{28}$$

Evidentemente u_* dipende solo da ϱ, cioè, solo da ζ, e certo sussiste la doppia limitazione

$$\varrho^{-1} < u_*^3 < 1, \tag{29}$$

perchè per ogni $\xi > 0$ si ha $\xi + \xi^{-1} \geq 2$, mentre l'appartenenza di ξ alll'intervallo (ϱ^{-1}, ϱ) implica che non può essere $\xi^{-1} > \varrho$. In particolare resta così accertato un *allungamento* della piastra, che svanisce nel caso della piastra sottile.

Le (23) permettono poi subito di ricavare da (29) la doppia limitazione

$$a < K < b,$$

equivalente a

$$\alpha a < L_* < \alpha b.$$

6. Proprietà dello stress.

Le (12) possono ormai sostituirsi con

$$B_1 = p - \mu u \xi^{-1}, \quad B_2 = p - \mu u \xi, \quad B_3 = p - \mu u^{-2}, \tag{30}$$

e la (25) permette anche di precisarle in

$$\left\{\begin{aligned} B_1 &= \frac{\mu u}{2}\{\varrho + \varrho^{-1} - \xi - \xi^{-1}\} = \frac{\mu u}{2}\frac{(\varrho - \xi)(\xi - \varrho^{-1})}{\xi} \\ B_2 &= \frac{\mu u}{2}\{\varrho + \varrho^{-1} - 3\xi + \xi^{-1}\} \\ B_3 &= \frac{\mu u}{2}\{\xi^{-1} - \xi + \varrho + \varrho^{-1} - 2u^{-3}\}. \end{aligned}\right. \tag{30'}$$

La $B_1(r)$ risulta positiva per ogni r fra a e b, in modo che per $n > 0$ la (16) ha come necessaria conseguenza

$$\int_a^b B_2 r^n dr < 0 \tag{31}$$

e in particolare impone a $M^{(l_0)}$ [cfr. (19)] il verso di $-c_3$, ecc.

La $B_2(r)$ sempre decresce, dal valore

$$B_2(a) = \mu u(\varrho - \varrho^{-1}) > 0$$

al valore $B_2(b) = -B_1(a)$, annullandosi quindi per un solo valore, r_2, di r.

La differenza [cfr. (30)′]

$$B_2 - B_1 = \mu u(\xi^{-1} - \xi)$$

si annulla solo per $\xi = \xi^{-1}$, cioè per $r = r_1$. Quindi [cfr. $(13)_1$] B_1 ha come massimo

$$B_1(r_1) = \frac{\mu u}{2} \frac{(\varrho - 1)^2}{\varrho}.$$

Al variare di r da a a b anche la $B_3(r)$ sempre decresce: nel problema effettivo dal valore $\mu u_*(\varrho - u_*^{-3}) > 0$ al valore $\mu u_*(\varrho^{-1} - u_*^{-3}) < 0$.

7. Proprietà degli $M^{(l_i)}$ e $M^{(b_i)}$.

Indipendentemente dalla (27), le (19), (18) e $(30)'_1$ forniscono

$$M^{(l_i)} = (-1)^{i+1} c_3 \cdot \frac{\mu u}{2} \cdot \frac{r_1^2}{2} \int_{\varrho^{-1}}^{\varrho} \frac{(\varrho - \xi)(\xi - \varrho^{-1})}{\xi} d\xi.$$

Essendo

$$\int_{\varrho^{-1}}^{\varrho} (\varrho - \xi)(\xi - \varrho^{-1})\, d\xi = \frac{1}{6}(\varrho - \varrho^{-1})^3,$$

si può porre

$$M^{(l_i)} = \frac{\mu u}{24} \frac{r_1^2}{\bar{\xi}} (\varrho - \varrho^{-1})^3,$$

pur d'intendere $\bar{\xi}$ convenientemente scelto fra ϱ^{-1} e ϱ.

Questa espressione di $M^{(l_i)}$ [è facile controllarlo] equivale a

$$M^{(l_i)} = \frac{8}{3}\,\mu u^2 \frac{\alpha q_*^3}{L_*}\{1 + \theta(\varrho - 1)\}, \tag{32}$$

con θ compreso tra 1 e $-\varrho^{-1} > -1$. Per una piastra sottile essa si confonde con

$$M^{(l_i)} = \frac{8}{3}\,\mu \frac{\alpha q_*^3}{L_*}, \tag{32)'$$

almeno nel problema effettivo.

Passando a occuparci degli $\boldsymbol{M}^{(b_i)}$, si ha in primo luogo che dalle $(20)_2$ e $(30)_3$ risulta

$$\boldsymbol{M}^{(b_i)} \doteq (-1)^i\, \boldsymbol{t}_\theta \{\Psi_1 + \Psi_2\}$$

se s'intende

$$\left\{\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{\mu u r_1^2}{2}\int_{\varrho^{-1}}^{\varrho}\left\{\xi - \frac{\varrho + \varrho^{-1}}{2}\right\}\sqrt{\xi}\,d\xi > 0 \\ \Psi_2 &= -\frac{\mu u r_1^2}{4}\left\{\int_{\varrho^{-1}}^{\varrho}(\xi + \xi^{-1})\sqrt{\xi}\,d\xi - 2u^{-3}\int_{\varrho^{-1}}^{\varrho}\sqrt{\xi}\,d\xi\right\}. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Confrontando l'espressione di Ψ_1 con la (32) si trova che in ogni caso viene a essere

$$2\Psi_1\{1 + \theta(\varrho - 1)\} = M^{(l_i)}\left\{1 - \vartheta\frac{7}{10}(\varrho - 1)^2\right\} \tag{34}$$

con ϑ compreso tra 0 e 1, nonchè $< 10\,(\varrho - 1)^{-2}/7$.

Ma in più nel problema effettivo necessariamente risulta

$$|\Psi_2| < \varrho^3\,\Psi_1(\varrho - 1). \tag{35}$$

Per stabilire questa disuguaglianza occorre anzitutto rilevare che, posto

$$(\varrho - \varrho^{-1})\,D = \int_{\varrho^{-1}}^{\varrho}(\xi + \xi^{-1})\sqrt{\xi}\,d\xi\int_{\varrho^{-1}}^{\varrho}d\xi - \int_{\varrho^{-1}}^{\varrho}(\xi + \xi^{-1})\,d\xi\int_{\varrho^{-1}}^{\varrho}\sqrt{\xi}\,d\xi,$$

l'intervento della (27) [stante la (28)] permette di ridurre la $(33)_2$ a

$$\Psi_2 = -\frac{\mu u_* r_1^2}{4} D. \tag{36}$$

D'altra parte è

$$(\varrho - \varrho^{-1}) D = \int_{\varrho^{-1}}^{\varrho} \left(\xi^{\frac{1}{2}} - \xi^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \sqrt{\xi}\, d\xi \int_{\varrho^{-1}}^{\varrho} d\xi - \int_{\varrho^{-1}}^{\varrho} \left(\xi^{\frac{1}{2}} - \xi^{-\frac{1}{2}}\right)^2 d\xi \int_{\varrho^{-1}}^{\varrho} \sqrt{\xi}\, d\xi,$$

ciò che implica

$$\left(\varrho^{-\frac{1}{2}} - \varrho^{\frac{1}{2}}\right) \int_{\varrho^{-1}}^{\varrho} \left(\xi^{\frac{1}{2}} - \xi^{-\frac{1}{2}}\right)^2 d\xi < D < \left(\varrho^{\frac{1}{2}} - \varrho^{-\frac{1}{2}}\right) \int_{\varrho^{-1}}^{\varrho} \left(\xi^{\frac{1}{2}} - \xi^{-\frac{1}{2}}\right)^2 d\xi.$$

La (36) dà quindi luogo alla disuguaglianza

$$|\Psi_2| < \frac{\mu u_* r_1^2}{4} \left(\varrho^{\frac{1}{2}} - \varrho^{-\frac{1}{2}}\right) \int_{\varrho^{-1}}^{\varrho} \left(\xi^{\frac{1}{2}} - \xi^{-\frac{1}{2}}\right)^2 d\xi,$$

dalla quale agevolmente si arriva alla (35): è l'intervento, a secondo membro, del fattore $\varrho^{\frac{1}{2}} - \varrho^{-\frac{1}{2}}$ che viene a essere decisivo.

Per una piastra sottile, l'espressione di $M^{(b_i)}$ fornita dalle (34) e (36) si confonde con l'uguaglianza

$$M^{(b_i)} = \frac{1}{2} M^{(l_i)} = \frac{4}{3} \alpha \frac{\mu q_*^3}{L_*}.$$

8. Proprietà della sollecitazione riportata allo stato di riferimento.

Accenniamo con $\sigma_*^{(l_i)}$ e $\sigma_*^{(b_i)}$ $(i = 0, 1)$ le striscie di spessore infinitesimo corrispondenti a $\sigma^{(l_i)}$ e $\sigma^{(b_i)}$ [cfr. n. 1]; con $\mathrm{I}_*^{(l_i)}$ e $\mathrm{I}_*^{(b_i)}$ l'insieme delle (Q_*, f^*) per $\sigma_*^{(l_i)}$ e $\sigma_*^{(b_i)}$. Nel problema effettivo ognuno degli $\mathrm{I}_*^{(l_i)}$ e $\mathrm{I}_*^{(b_i)}$ equivale a una coppia.

Indicando con $|dy_3| \cdot \boldsymbol{M}_*^{(l_i)}$ e $|dy_2| \cdot \boldsymbol{M}_*^{(b_i)}$ i momenti di tali coppie, dalle (10) e (11) si ha

$$\left\{\begin{aligned} |dy_3| \cdot \boldsymbol{M}_*^{(l_i)} &= \int_{\sigma^{(l_i)}} OQ_* \wedge B_2 \boldsymbol{N}\, d\Sigma = |dx_3| \cdot \int_a^b OQ_* \wedge B_2 \boldsymbol{N}\, dr, \\ |dy_2| \cdot \boldsymbol{M}_*^{(b_i)} &= \int_{\sigma^{(b_i)}} OQ_* \wedge B_3 \boldsymbol{N}\, d\Sigma = |d\theta| \cdot \int_a^b OQ_* \wedge B_3 \boldsymbol{N} r\, dr. \end{aligned}\right.$$

Facilmente queste uguaglianze possono ormai ridursi a

$$(37) \qquad \left\{\begin{aligned} \boldsymbol{M}_*^{(l_i)} &= (-1)^i c_3 \frac{\cos\alpha}{2Ku^2} \int_a^b B_2 r^2\, dr, \\ \boldsymbol{M}_*^{(b_i)} &= (-1)^{i+1} c_2 \frac{1}{2Ku^{1/2} r_1} \int_a^b B_3 r^3\, dr. \end{aligned}\right.$$

Rivolgiamo ora l'attenzione al fatto che al variare di r da a a b la $B_2(r)$, oltre rendere soddisfatta la (17), passa dal positivo al negativo annullandosi una sola volta, per $r = r_2$. E' quanto basta perchè, oltre

$$\int_a^b B_2 r\, dr = \int_a^b B_2 (r - r_2)\, dr < 0,$$

si abbia

$$\int_a^b B_2 r^2\, dr = \int_a^b B_2 (r^2 - r_2^2)\, dr = \int_a^b B_2 (r - r_2)\, dr \cdot (r + r_2) < 0,$$

e insieme

$$(38) \qquad 2b \int_a^b B_2 r dr < \int_a^b B_2 r^2\, dr < 2a \int_a^b B_2 r dr.$$

Anzi nel problema effettivo certo sussiste anche la duplice limitazione

$$(39) \qquad 2b \int_a^b B_3 r \cdot r dr < \int_a^b B_3 r \cdot r^2\, dr < 2a \int_a^b B_3 r \cdot r dr,$$

perchè da a a b pure la funzione $rB_3(r)$, oltre avere nullo il suo integrale definito, passa dal positivo al negativo annullandosi una sola volta.

Le (38) e (39) permettono di ricavare, dal confronto delle (37) con le (19) e $(20)_2$, le semplici limitazioni

$$\varrho^{-\frac{1}{2}} \frac{|\cos\alpha|}{u^{3/2}} M^{(l_i)} \leq M_*^{(l_i)} \leq \varrho^{\frac{1}{2}} \frac{|\cos\alpha|}{u^{3/2}} M^{(l_i)},$$

$$\varrho^{-\frac{1}{2}} M^{(b_i)} < M_*^{(b_i)} < \varrho^{\frac{1}{2}} M^{(b_i)}$$

e

$$\varrho^{-1} \frac{|\cos\alpha|}{u^{3/2}} \cdot \frac{M^{(l_i)}}{M^{(b_i)}} \leq \frac{M_*^{(l_i)}}{M_*^{(b_i)}} \leq \varrho \frac{|\cos\alpha|}{u^{3/2}} \cdot \frac{M^{(l_i)}}{M^{(b_i)}}.$$

Per una piastra sottile esse si confondono con

$$M_*^{(l_i)} = |\cos\alpha|\, M^{(l_i)}, \quad M_*^{(b_i)} = M^{(b_i)}, \quad \frac{M_*^{(l_i)}}{M_*^{(b_i)}} = 2\,|\cos\alpha|.$$

INDICE

I.	Premesse di carattere assai generale	Pag. 1
II.	Solidi elastici	» 14
III.	Statica semilinearizzata	» 27
IV.	Specificazione delle equazioni di Kirchhoff per solidi elastici incomprimibili	» 45
V.	Intervento delle terne principali di deformazione	» 57
VI.	Estensione delle formule di Almansi, sistemi isotropi	» 64
VII.	Solidi elastici incomprimibili omogenei e isotropi	» 75
VIII.	Potenziale elastico isotermo	» 83
IX.	Elasticità di secondo grado	» 88
X.	Flessione di una piastra rettangolare di spessore qualunque	» 101

PREZZO L. 1200