

VISIONE STORICA DELLA SCIENZA E DELLA TECNICA DELLE COSTRUZIONI

Dott. Ing. CARLO PARVOPASSU

Professore ord. f. r. di Scienza delle Costruzioni nell'Università degli studi di Padova

4^a conferenza tenuta il 15 maggio 1953

CAPITOLO VII

L'evoluzione della Scienza e della Tecnica delle Costruzioni da Navier ad oggi.

A) IL SECOLO XIX

I. La Rivoluzione francese si era conclusa, negli ultimi anni del secolo decimottavo, sfociando nella grande impresa napoleonica e nel romanticismo.

L'ottocento appare alla mente dello studioso come un periodo insigne della civiltà contemporanea, durante il quale, se nelle arti belle, atteggiate ad un neo-classicismo smorto, ebbe inizio una decadenza progressiva, si manifestarono invece una mirabile accentuazione del fervore nella ricerca scientifica che aveva caratterizzato nobilmente il secolo precedente ad un rapido sviluppo delle applicazioni tecniche in ogni campo del sapere; altissima ragione di vita per poderosi ingegni e titaniche volontà, che dominavano il travaglio di una vita sociale rinnovantesi irresistibilmente.

Le scoperte e le sintesi più ardue della matematica, della fisica, della chimica e della biologia, le invenzioni prodigiose nel campo della meccanica applicata per l'utilizzazione dell'energia termica, mediante la produzione, l'espansione e la condensazione del vapore o la combustione ed espansione di prodotti gassosi e per l'utilizzazione dell'energia idraulica e dell'energia elettrica, accompagnati dal progresso incessante di tutte le industrie manifatturiere, dei mezzi di trasporto terrestri per trazione od automozione, dei mezzi di trasporto idrici ed aerei, dei mezzi di telecomunicazione, delle costruzioni di ogni genere, dettero a questo periodo fulgore di luce, del quale l'umanità avrebbe dovuto essere fiera e riconoscente, traendone i vantaggi per un superiore livello di vita, associata ed individuale, nella concordia e nell'amore e l'auspicio di un avvenire sempre più florido nell'ordine e nella giustizia.

II. I nomi celebri degli artefici di questi trionfi della Scienza e della Tecnica designano intelletti sommi, operanti in piena armonia e stretto collegamento di mezzi e di fini; sperimentatori e teorici, filosofi, matematici, fisici e fisico-matematici, chimici e biologi, fisico-chimici e chimico-biologi, naturalisti e grandi e dotti ingegneri francesi, tedeschi, inglesi, italiani e d'ogni altra nazione civile.

Noi passeremo brevemente in rassegna l'opera di questi uomini, specialmente nei riguardi del progresso della meccanica pura ed applicata, che più interessa per la nostra visione.

a) Cominceremo col ricordare i contributi di alcuni fisici e matematici famosi, quali Ampère, Lazare Nicolas Marguerite Carnot, Sadi Nicolas Léonhard Carnot, Gauss, Jacobi ed Hamilton, allo studio teoretico dell'equilibrio e del movimento.

1. *André Marie Ampère*, sommo fisico e matematico, il Newton dell'elettricità e del magnetismo, che concepiva la matematica non come fine a se stessa ma come potente ed eccelso mezzo di studio nell'analisi e nella sintesi dei fenomeni, nacque a Polémieux presso Lione il 22 gennaio 1775 e morì a Marsiglia il 10 Giugno 1836. Autodidatta precocissimo, era innamorato della scienza, della religione e della libertà: letterato, botanico, chimico, insegnante di Analisi matematica nell'École Polytechnique di Parigi dal 1805, membro dell'Istituto di Francia dal 1814, professore di Filosofia e Fisica nella Faculté des Sciences nel 1819, di Fisica Sperimentale e generale al Collège de France nel 1824 e Ispettore generale delle Università francesi, imprese nuove vedute nell'insegnamento. L'opera sua principale è nel campo dell'Elettrodinamica e dell'Elettrocinetica: ma scrisse molte note su svariatissimi argomenti e tra esse due « Sull'integrazione delle equazioni differenziali ». In età tarda scrisse il suo importante « Essai sur la Phylosophie des Sciences », pubblicato a Parigi nel decennio 1834-1844; nella prima parte (1834) è contenuta la esposizione analitica di una classificazione naturale di tutte le conoscenze e figura, per la prima volta, come ramo a sè stante della Meccanica, la Cinematica, « *scienza che deve comprendere tutto ciò che vi è da dire delle diverse specie di movimenti indipendentemente dalle forze che li possono produrre, occupandosi prima di tutte le considerazioni relative agli spazi percorsi nei diversi movimenti, ai tempi impiegati a percorrerli, alla determinazione delle velocità secondo le varie relazioni che possono esistere tra spazi e tempi, e studiando poi i molteplici strumenti con i quali si può trasformare un movimento in un altro ossia cambiare la direzione e la velocità di un movimento dato* ».

2. *Lazare Nicolas Marguerite Carnot*, il gran Carnot, statista della

rivoluzione e dell'Impero ed eminente soldato, nacque a Nolay in Borgogna nel 1753 e morì a Magdeburgo il 2 Agosto 1823. Ufficiale del Genio e generale di divisione, ministro, governatore d'Anversa, pari di Francia, fu coltissimo nelle scienze matematiche e meccaniche. Nel 1783 comparve il suo « Essai sur les machines en général », cui si informarono poi le idee di Ampère: nel 1801 il pregiato lavoro « De la corrélation des figures de géometrie », nel 1803 l'altro « Géometrie de position », nel 1803 il trattato « Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement », tutti tradotti in tedesco, e nel 1810 la grande opera sulle fortificazioni « De la défense des places fortes » tradotta poi ad uso della maggior parte degli eserciti europei. Una memoria, pubblicata a Parigi nel 1797, contiene le « Réflexions sur la Métaphisique du Calcul infinitesimal » par le Citoyen Carnot M. de l'Institut National.

3. *Sadi Nicolas Léonhard Carnot*, suo figlio primogenito, nato a Parigi il 1° giugno 1796 e morto a Parigi il 24 agosto 1832, fu il fisico francese cui si deve il principio fondamentale della termodinamica che porta il suo nome. Uomo di straordinaria versatilità e acceso di fervore per gli studi, fece scoperte scientifiche di eccezionale importanza nella dottrina del calore, ma ne lasciò inedite le maggior parte: pubblicò soltanto, a Parigi nel 1824, un'opera « Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance », che lo rivelava come uno dei più originali e profondi pensatori dedicatisi alla Scienza.

4. *Karl Friedrich Gauss*, celebre matematico, fisico, astronomo e geodeta, poliglotta e membro di quasi tutte le grandi Accademie, nacque a Brunswick il 30 aprile 1777 e morì a Gottinga il 23 febbraio 1855. I lavori, che furono raccolti nei dodici volumi delle sue Opere, pubblicati dalla Società delle Scienze di Gottinga fra il 1879 e il 1930, si riferiscono a cinque periodi successivi di attività: 1796-1801 (Aritmetica ed Algebra), 1801-1816 (astronomia), 1816-1829 (Geodesia e Geometria), 1828-1841 (Fisica-matematica) e 1841-1855 (Geometria). Per lui l'Aritmetica era sempre la regina delle matematiche: diceva però che i mezzi logici nulla possono se non produrre sterili fiori quando non domini la fertile intuizione dell'argomento: d'altronde, avendo un concetto altissimo della Scienza, sulle relazioni di questa con la pratica pensava che la Scienza dev'esserne l'amica, non la schiava, farle doni, non servizi. A lui si devono nella meccanica, il *principio della minima costrizione da parte dei vincoli*, coincidente col principio di d'Alembert, ed alcuni contributi sulla teoria dei potenziali: gli si devono poi la teoria della combinazione delle osservazioni, la

teoria del magnetismo, la teoria del moto dei corpi celesti e tante altre eccellenti trattazioni.

5. *Karl Gustav Jacob Jacobi*, illustre matematico tedesco, nacque a Potsdam il 10 dicembre 1804 e morì a Berlino il 18 febbraio 1851. Fu professore di matematica a Königsberg dal 1827 al 1842 e poi pensionato a Berlino. Scrisse sulle funzioni ellittiche, sulle equazioni differenziali, sulla teoria dei determinanti, della quale fu uno dei primi fondatori, sulla teoria dei numeri e dedusse un metodo per integrare le equazioni del moto mediante il *principio dell'azione stazionaria*.

6. *Sir William Rowan Hamilton*, sommo matematico scozzese, nacque a Dublino il 4 agosto 1805 e morì ivi il 2 settembre 1865. Fu, fin da giovanissima età, professore di astronomia: dette alla meccanica il suo *principio dell'azione variante* e dell'*azione stazionaria* e l'invenzione dei *Quaternioni* con relativa teoria, da cui derivano i diversi metodi del calcolo vettoriale e del calcolo motoriale.

b) Con i nuovi contributi la *Meccanica razionale*, studio teoretico dell'equilibrio e del movimento, già costituito nella forma moderna sulle nozioni elaborate, come vedemmo nei precedenti capitoli, da Leonardo, Galileo, Descartes, Cavalieri, Newton, dai Bernoulli, da Eulero, d'Alembert, Lagrangia, Fourier e tanti altri grandi, ed ormai esposto organicamente per l'insegnamento normale nel celebre « *Traité de Mécanique* » di S. D. Poisson (1831 e 1833), viene ad assumere l'aspetto definitivo, che si riscontra negli attuali corsi universitari, con la suddivisione, dovuta ad Ampère, nelle quattro parti fondamentali.

1. *Cinematica*, relativa alle sole grandezze fondamentali lunghezza e tempo (L e T).

2. *Teoria delle masse*, relativa alle sole grandezze fondamentali lunghezza e massa (L e M).

3. *Statica*, relativa alle grandezze fondamentali e derivate lunghezza e forza (L e F); poichè $(F) = (M L T^{-2})$, entrano qui anche la massa ed il tempo.

4. *Dinamica*, relativa a tutte le grandezze fondamentali e derivate massa, lunghezza, tempo e forza (M, L, T, F), delle quali la quarta è combinazione delle prime tre.

I sistemi di misura, variabili a seconda delle unità che si scelgono per le dimensioni L (lunghezza), M (massa), T (tempo), F (forza), sono i seguenti⁽¹⁹⁾:

(19) G. GIORGI, *Meccanica razionale*. Soc. An. Tuminelli. Roma 1946.

1. Sistema assoluto CGS (centimetro, grammo massa, secondo) (unità derivate di grandezza incomoda e di difficile uso pratico).
2. Sistema assoluto MKS (metro, chilogrammo massa, secondo) o sistema Giorgi, proposto dal prof. G. Giorgi nel 1901 e reso definitivo pochi anni or sono nel 1938.
3. Sistema, non assoluto, degli ingegneri MKS (metro, chilogrammo forza, secondo), con K forza variabile da luogo a luogo e perciò con unità derivate variabili.
4. Sistema assoluto francese MTS (metro, tonnellata massa, secondo) (unità derivate poco convenienti).
5. Sistema inglese assoluto FPS (piede, libbra massa, secondo).
6. Sistema inglese non assoluto FPS (piede, libbra peso, secondo).

Contribuiscono, con metodi sintetici, al progresso delle applicazioni della meccanica geometri insigni come *Chasles*, *A. F. Moebius*, *Maxwell*, *Clifford* e ancora *H. Résal* coi suoi trattati di « *Éléments de Mécanique* » (1851) e di « *Cinématique pure* » (pubblicato a Parigi nel 1862, primo del genere), *F. Reuleaux* col bel trattato sulla « *Cinematica dei Meccanismi* » (pubblicato nel 1862 e riedito nel 1865), *Karl Culmann* con l'elegante trattato « *Die graphische statik* » (Zurigo 1866 e 1877), *Maurice Lévy* (Stat. Graf. 1884), *W. Ritter* (Stat. graf. 1888), *Luigi Cremona* (fig. rec. 1873), *Carlo Saviotti* (Stat. Graf. 1888) *Camillo Guidi* (Stat. Graf. 1895), *Jung* (Geom. der. Massen), *Williot* (diagrammi degli spostamenti delle travature reticolari elastiche), *Christman - Baer* (cinematica e dinamica grafica) ecc.

c) La moderna teoria, fisica e matematica, della Resistenza dei materiali, dalla quale direttamente derivano la Scienza e la Tecnica delle Costruzioni di oggi giorno, poste da tale teoria in grado di risolvere, sostituendo al corpo rigido il corpo deformabile, i problemi staticamente indeterminati o iperstatici, trae origine dai lavori di un cospicuo gruppo di Ingegneri provenienti dall'École Polytechnique e dall'École Nationale des Ponts et Chaussées di Francia.

Primo tra questi *Louis Marie Henri Navier*, Ufficiale della Legion d'onore, Membro dell'Istituto Reale di Francia nell'Accademia delle Scienze e Ispettore divisionario del Corpo Reale dei Ponti e Strade, nato a Digione il 15 febbraio 1785 e morto a Parigi il 23 agosto 1836, nipote dell'eminente Ispettore Generale dei Ponti e Strade *Émilien Marie Gauthey* (1733-1806), che di Navier curò la prima formazione nelle Scienze propedeutiche dell'Ingegneria.

Egli uscì⁽²⁰⁾, dopo corsi di studio brillantissimi, compiuti nel biennio 1802-1804, dall'École Polytechnique e, ammesso subito all'École des Ponts et Chaussées, vi conseguì nel 1808 il grado di Ingegnere ordinario, con una preparazione scientifica di primissimo ordine.

Il 26 gennaio 1824 fu nominato membro dell'Académie royale des Sciences de l'Institut de France. Pubblicò, con note personali, le importanti opere dello zio Gauthey, tra il 1813 e il 1816, ed anche due opere di Bélidor, di cui la prima « La Science de l'Ingénieur », pubblicata nel 1729, fu riedita da Navier nel 1813, arricchita di sue note ed aggiunte come quelle concernenti la spinta delle terre, la forma e le dimensioni dei muri di sostegno e la teoria delle volte, e la seconda « Premier volume de l'Architecture hydraulique », pubblicata nel 1737, fu riedita da Navier nel 1819, anche questa con aggiunte e note di grandissimo valore, veri capolavori che quasi ne raddoppiavano il testo.

È del 1819 una nota di Navier, presentata il 29 novembre all'Accademia ed approvata per la inserzione negli Atti, ma inedita, « sur la flexion des lames élastiques »: in essa si occupava, secondo le idee di Jacques Bernoulli, della curvatura dell'asse deformato. Del 1819-20-22-24 sono i riassunti litografati delle prime « Leçons de Mécanique appliquée » date all'École des Ponts et Chaussées, dove era stato nominato nel 1819 professore supplente: da questi riassunti appare che Navier insegnava ancora la teoria della rottura per flessione delle travi in modo erroneo, complicato e confuso, ammettendo il principio di conservazione delle sezioni piane ed una resistenza allo snervamento prossima ai limiti di elasticità.

Del 1820 è una memoria « sur la flexion des plans élastiques », relativa alle piastre, per le quali Navier suppone che nella deformazione le fibre longitudinali si mantengano rette e normali alla superficie media.

La celebre Nota « *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques* », inserita nel 1824 nel tomo VII dei Recueils de l'Académie, fu letta all'Accademia delle Scienze di Parigi il 16 maggio 1821. Vi sono stabiliti i fondamenti della teoria matematica dell'elasticità, impostata sulla meccanica molecolare di Newton, quella cioè che introduce la considerazione della composizione intima dei corpi con azioni reciproche delle molecole che li compongono, azioni

(20) M. BARRÉ DE SAINT VENANT, *Résumé des leçons données à l'École des P. et Ch. sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Pr. Partie Pr. Section: De la résistance des corps solides*. Troix. éd. avec des Notes et des Appendices. Dunod. Paris 1864.

di attrazione e di repulsione, equilibrantisi tra loro, nello stato naturale, e con le forze esterne applicate, nello stato deformato: essa portò ad istituire il collegamento di parecchie branche della filosofia naturale, rette dalla analisi matematica. Nella nota sono date, per corpi isotropi, cui spetta una sola costante di elasticità, che ha la natura del modulo di Joung, le equazioni indefinite e le equazioni definite o al contorno per l'equilibrio, statico e dinamico, assumendo come relazioni tra tensioni e deformazioni quelle che provengono dalla teoria molecolare delle attrazioni e repulsioni tra molecole, varianti per cambiamenti di posizione mutua delle molecole stesse rispetto ad uno stato naturale indeformato, con legge informata al criterio di proporzionalità enunciato già da Hooke e Mariotte. Questo lavoro, in cui Navier fa largo uso del principio dei lavori virtuali e impiega il calcolo delle variazioni, rappresenta la prima generale ricerca nel campo della teoria matematica dell'elasticità, ossia delle equazioni generali dell'equilibrio e delle vibrazioni dei solidi elastici, e può ben a ragione essere considerata come l'origine della odierna Resistenza dei materiali o Scienza delle costruzioni. Del 1821 e 1822 sono le due note « *Mémoire sur le lois du mouvement des fluides en ayant égard à l'adhésion des molécules* » (18 marzo 1821) e « *Mémoire sur la continuation des recherches sur le lois du mouvement des fluides en ayant égard...* » (16 dicembre 1822), pubblicate nel tomo VI dei Recueils de l'Académie e nelle quali si danno per i fluidi, tenendo conto dell'attrito e in analogia a quelle dei solidi elastici, sostituendo velocità a spostamenti, le equazioni indefinite dell'equilibrio, l'equazione di continuità e le equazioni definite o al contorno: sono le stesse dedotte poi da Poisson, Cauchy e Stokes in base a considerazioni sostanzialmente non diverse.

Del 1823 è il « *Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus* », presentata all'Accademia il 18 settembre di quell'anno e molto elogiata: doveva essa però procurargli profondi dispiaceri, nell'infelice applicazione fattane nel progetto del Pont des Invalides.

Del 1825 sono quattro note importanti:

La prima: « *Note sur les questions de statique dans les quelles on considère un corps supporté par un nombre de points d'appui dépassant trois* » è l'origine delle trattazioni di problemi iperstatici in cui si sostituisce alla statica dei corpi rigidi quella dei corpi elastici ed appoggi elastici; la seconda « *Note sur la flexion des verges courbes* » è un estratto della nota già citata del 1819 sulle lame elastiche; la terza « *Solution de diverses questions, relatives aus mouvements de vibration des corps solides* », è un esposto in cui si considerano vibrazioni di verghe con masse concentrate o ripartite e si studia la propagazione dell'onda d'urto; la quarta, « *Appareil pour essayer la force*

des chaînes du pont des Invalides », descrive il dispositivo per mantenere orizzontale la leva del dinamometro nonostante la deformazione del pezzo in prova, dispositivo ideato da Navier.

Dell'anno 1826 è la pubblicazione del » *Resumé des leçons données a l'École royale des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions des machines. Première partie sur la Résistance des Matériaux et sur l'établissement des constructions en terre, en maçonnerie et en charpentes (1824)* »: una seconda edizione del 1833 fu tradotta in italiano dal prof. d'Andrea della Scuola militare di Napoli: una terza edizione, con note ed appendice, è quella di Barré de Saint Venant, apparsa nel 1864, per i tipi di Dunod, a Parigi e contenente, oltre il testo di Navier, importanti ed amplissime aggiunte.

Nello stesso anno 1826 appare una nota « *Recherches expérimentales sur la résistance que diverses substances opposent à la rupture déterminée par un effort de traction* »: vi si considerano ferro, rame e piombo laminati, tubi e sbarre di ferro, sfere di lamiera contenenti fluidi sotto forti pressioni ecc. Nel 1831 appare una nota « *la flexion d'une pièce courbe dont la figure naturelle est circulaire* »: contiene risultati rigorosamente esatti, un po' diversi da quelli relativi all'arco parabolico.

Moltissimi altri lavori in ogni campo della conoscenza teorica e pratica sono dovuti alla sagace e instancabile attività di Navier e rimarchevoli sono le sue concezioni circa l'esercizio della professione dell'ingegnere.

2. Ai lavori fondamentali di Navier sulla teoria generale dell'elasticità, affiancati dalle ricerche di Fresnel sull'ottica e di Ampère sull'elettromagnetismo, fecero immediatamente seguito quelli di Cauchy e Poisson.

Augustin Louis Baron de Cauchy, nato a Parigi il 21 agosto 1789 e morto a Sceaux (Seine) il 23 maggio 1857, matematico, sommo analista e ingegnere, studiò nell'École centrale du Panthéon, ove entrò nel 1802, poi nell'École Polytechnique (1805-1807), e finalmente dal 1807 al 1810 nell'École des Ponts et Chaussées. Esercitò la professione d'ingegnere a Cherbourg dal 1810 al 1813; ma, tornato nel 1813 a Parigi per salute, si dedicò, seguendo i consigli di Lagrange e di Laplace, agli alti studi matematici. Ebbe vita movimentata, con incarichi alla corte del deposedo re Carlo X, ed insegnò a intervalli Analisi e Calcolo infinitesimale nella École Polytechnique, Meccanica nella Faculté des Sciences, Matematica e Fisica nel Collège de France: fu anche professore di Fisica-matematica a Torino dal 1831 al 1833. Le sue opere furono pubblicate in 27 volumi. La sua elaborazione della

Teoria di elasticità, sempre basata sulla meccanica molecolare, appare in una prima nota letta all'Académie des Sciences il 30 Settembre 1822: in essa si parte dalla considerazione dello stato di tensione esistente in un solido o fluido elastico o in un corpo plastico in riposo o in movimento interno, stato di tensione rappresentato da tensioni mutue, di trazione o compressione, operanti attraverso gli elementi superficiali di una sezione e generalmente oblique, ossia dotate di componenti normali e tangenziali, ma per i fluidi perfetti corrispondenti a sole componenti normali di compressione. Le tensioni interne per un punto del corpo, considerato come centro, sarebbero soggette a due teoremi generali, cioè

1° la pressione sopra un elemento superficiale è la risultante delle pressioni sopportate dalle proiezioni ortogonali od oblique dell'elemento su tre piani qualunque passanti per il centro;

2° quando due faccie che si tagliano ad angolo retto od obliquo hanno lo stesso centro e le stesse superfici, la proiezione della pressione relativa all'una delle facce su una retta perpendicolare all'altra faccia è uguale alla proiezione della pressione relativa a questa faccia su una retta perpendicolare alla prima: il secondo teorema riduce a sei le nove componenti spaziali delle tensioni unitarie ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x, \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_y, \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z$) (per noi $\equiv stress$); il primo permette di esprimere in funzione di queste sei componenti la componente della pressione su una faccia obliqua qualunque valutata in una direzione qualsiasi: i teoremi stessi derivano dalle sei equazioni spaziali di equilibrio (forze e momenti) del parallelepipedo elementare e dalle tre equazioni di equilibrio del tetraedro elementare, corrispondenti rispettivamente alle equazioni indefinite dell'equilibrio e alle equazioni dell'equilibrio definito o al contorno.

Cauchy deduce l'esistenza di tre tensioni principali ortogonali, semiassi dello ellissoide delle tensioni (introdotto da Lamé), caratteristiche delle variazioni dello stato di tensione intorno a un punto come interpretazione delle equazioni definite o al contorno, relative al tetraedro elementare.

In seguito Cauchy ricava, dall'equilibrio del parallelepipedo elementare, il sistema di equazioni indefinite dell'equilibrio elastico statico o dinamico in cui entrano le forze di massa (gravità ed inerzia).

Cauchy compie poi l'analisi dello stato di deformazione ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, 2\gamma_x, 2\gamma_y, 2\gamma_z$) (per noi $\equiv strain$) e trova che un elemento sferico si deforma in un ellissoide presentando tre dilatazioni principali ortogonali, secondo tre direzioni ortogonali principali. Fa notare che per un corpo isotropo le tensioni principali debbono avere le stesse

direzioni delle dilatazioni principali, pur non essendovi proporzionalità tra le σ e le ϵ principali.

Finalmente egli definisce gli spostamenti (u, v, w) (nelle direzioni x, y, z) in funzione delle deformazioni, dilatazioni ϵ e scorrimenti 2γ . In due mirabili Memorie, la prima presentata all'Académie des Sciences il 1° ottobre 1827 e la seconda poco dopo, Cauchy si occupa di stabilire le equazioni di equilibrio di un sistema di punti materiali in termine degli spostamenti e vi riesce prima considerando uno stato naturale iniziale privo di tensioni e ponendo fra stress e strain relazioni lineari, con generalizzazione esplicita della legge di Hooke, in cui figurano 21 costanti (riducibili a due per corpi isotropi), e poi considerando uno stato iniziale non privo di tensioni interne, come il caso dei corpi eterotropi in generale e cristallini, nel qual caso, applicando la teoria molecolare come Navier, giunge a 15 costanti elastiche (riducibili a sei o ad una per corpi con particolari gradi di simmetria), ma deve affiancare ad esse le sei componenti delle tensioni iniziali. Le equazioni indefinite e quelle definite dell'equilibrio vengono ottenute dalla considerazione degli equilibrii del parallelepipedo elementare e del tetraedro elementare, già studiati nella nota del 1822.

È di Cauchy una memoria celebre del 1828 sulla resistenza delle piastre, scritta contemporaneamente ad altra di Poisson, cui fece seguito un importantissimo lavoro di Kirchhoff (1848), pubblicato nel 1850.

Siméon Denis Poisson, nato a Pithiviers (Loiret) il 21 giugno 1781 e morto a Parigi il 25 aprile 1842, uomo di precoce ingegno, entrò nel 1798 all'École Polytechnique: lasciato ivi libero di dedicarsi agli alti studi in cui dimostrava singolare perizia, aveva già nel 1800 pubblicato due importanti memorie di analisi. Divenne amico di Lagrange e di Laplace e, appena terminati i corsi scolastici, fu nominato ripetitore e poi nel 1802 professore supplente e nel 1806 professore ordinario di analisi nell'École Polytechnique in sostituzione di Fourier; nel 1808 nominato astronomo al Bureau des Longitudes e nel 1809 professore di meccanica razionale, venne nel 1812 creato membro dell'Istituto di Francia, nel 1825 barone e nel 1837, per meriti scientifici, pari di Francia. Pubblicò trecento lavori di matematica pura ed applicata, tra i quali il « *Traité de mécanique* » in due volumi (1831 e 1833) e le celebri memorie sulla Teoria generale dell'elasticità « *Mémoires sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques 1827-1828-1829* »: in queste, pubblicate nel Tomo VIII dei Recueils de l'Académie des Sciences, Poisson considera come Cauchy lo stress, lo strain, le equazioni di equilibrio del parallelepipedo e del tetraedro in ter-

mini dello stress, poi, per ricavare le espressioni delle tensioni in funzione degli spostamenti, le fa dipendere dalle azioni molecolari e con procedimenti di integrazione particolari giunge alle stesse conclusioni di Navier circa l'esistenza per corpi isotropi di una sola costante di elasticità indipendente; vi studia anche le vibrazioni di sfere, corde, aste, membrane e piastre. A Poisson è dovuta anche l'introduzione da lui fatta nel 1827 del concetto di *contrazione trasversale* accompagnante le deformazioni longitudinali di allungamento e l'affiancamento del rapporto m (inverso del coefficiente di contrazione trasversale ν) al modulo di rigidità longitudinale o di Young E ed al modulo di rigidità trasversale o di solidità G , con la relazione di dipendenza tra m , E e G espressa da $G = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} E$: per lui la stabilità delle costruzioni è da riferirsi ai massimi valori delle tensioni unitarie σ (normali) e τ (tangenziali).

3. Altri due famosi ingegneri e matematici, Lamé e Clapeyron, sono a questo punto da menzionare.

Gabriel Lamé, nato a Tours il 22 luglio 1795 e morto a Parigi il 1° maggio 1870 e *Benoît Paul Émil Clapeyron*, nato a Parigi il 20 febbraio 1799 e morto ivi il 28 gennaio 1864, insigni scienziati provenienti dall'École des Ponts et Chaussées, chiamati, come ingegneri ed insegnanti di matematiche pure ed applicate, presso la Scuola superiore dei Lavori pubblici a Pietroburgo, rimasero ivi fino al 1830: furon poi professore, il primo, di Fisica all'École Polytechnique dal 1832 al 1844 e di Calcolo delle probabilità alla Faculté des Sciences di Parigi dal 1848 al 1870 ed il secondo ingegnere ferroviario di alto valore in Francia e membro della Académie des Sciences, nominato nel 1858 in sostituzione di Cauchy.

Ad ambedue si debbono importantissimi contributi alla elaborazione della Teoria generale dell'elasticità, prima in lucide note, presentate all'Académie nel 1828, relative alle stesse questioni trattate da Navier, Cauchy e Poisson ma dotate di più ampi sviluppi ed applicazioni originali e poi con altri lavori concernenti i corpi elastici isotropi. Sono, in particolare, di Lamé la definitiva teoria dell'ellissoide delle tensioni e l'adozione delle costanti $\lambda = \frac{m E}{(m+1)(m-2)}$ (inverso del coefficiente di compressibilità cubica dei fluidi naturali, per cui è $m = 2$) e $\mu = G = \frac{m E}{2(m+1)}$ (modulo di solidità, perchè nullo, come E , per i fluidi), da lui introdotte nelle equazioni di equilibrio dei solidi elastici isotropi, a luogo di E , G ed m , nonchè il bel-

lissimo trattato « *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité* » (1852); è sua l'introduzione delle equazioni indefinite ridotte dell'elasticità, astraenti dalle forze di massa.

A Clapeyron si deve l'espressione del lavoro esterno di deformazione

$$\left(L = \frac{1}{2} \Sigma P \delta \right.$$

$$\left. L = \frac{1}{2} \int_V (Xu + Yv + Zw) dV + \frac{1}{2} \int_S (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS \right),$$

dedotta postulando, come farà poi Green, l'esistenza di un potenziale elastico come funzione indipendente dal modo di applicazione delle forze e dipendente solo dagli stati estremi dello stato di deformazione o di tensione, per sistemi elastici conservativi, con forze esterne applicate gradualmente, a partire da uno stato naturale indeformato, in condizioni isothermiche o adiabatiche, senza urti nè vibrazioni o cause dissipative di energia, come attriti o resistenze passive: gli si deve anche l'equazione dei tre (e implicitamente dei quattro) momenti per lo studio delle travi continue nelle condizioni più generali (1857).

4. *Jean M. C. Duhamel* (1797-1872) membro dell'Istituto di Francia, si occupò in due importanti note presentate all'Académie il 7 aprile 1828 ed il 22 febbraio 1835, dei fenomeni di propagazione del calore nei corpi solidi termicamente non isotropi e del calcolo delle azioni molecolari sviluppate dai cambiamenti di temperatura; argomento ripreso da Wertheim in rapporto alla differenza di grandezza dei coefficienti di elasticità dedotti con prove statiche, a sollecitazione graduale, o con prove dinamiche, per vibrazioni: anche delle vibrazioni di sistemi di punti materiali tratta Duhamel, in una bella nota del 1832.

5. Gli effetti meccanici delle variazioni di temperatura furono anche considerati dal generale *Jean Victor Poncelet*, nato a Metz il 10 luglio 1788 e morto a Parigi il 23 dicembre 1867, nella magnifica opera « *Introduction à la mécanique industrielle* », che costituisce parte del primo corso vero e proprio di Meccanica applicata alle macchine e di Meccanica industriale fisica o sperimentale, da lui tenuto nel 1839, e nel quale figurano considerazioni di geometria proiettiva, ossia di quella Scienza di cui lo stesso Poncelet è ritenuto uno dei fondatori. Uscito dall'École Polytechnique, ove era stato allievo di Monge, nel 1810, e dalla Scuola militare di Metz come Ufficiale del Genio nel 1812,

Poncelet seguì Napoleone nella campagna di Russia e, prigioniero di guerra a Saratov sul Volga negli anni 1812-14, vi attese a lavori scientifici e ricerche originali dalle quali trasse poi il suo « *Traité des propriétés projectives des figures* » pubblicato a Parigi nel 1822 e poi nel 1865-66 con altri lavori pensati in Russia. Insegnò Meccanica dal 1824 al 1835 nell'École d'application di Metz e poi, dal 1838 al 1848, Meccanica fisica e industriale alla Faculté des Sciences di Parigi: dal 1848 al 1850 comandò l'École Polytechnique: nel 1834 era stato nominato membro dell'Académie des Sciences.

Trattò brillantemente problemi di Teoria dell'elasticità ed a lui si deve il concetto di sostituire, per solidi isotropi, le tensioni massime ideali a quelle reali nelle equazioni di stabilità o equazioni di coesione permanente (rupture éloignée) delle strutture resistenti, per tener conto non del massimo sforzo unitario longitudinale o trasversale ma del massimo allungamento unitario, alla cui grandezza naturalmente contribuiscono gli effetti combinati degli sforzi longitudinali e trasversali ed il rapporto di Poisson m . Trattò anche della curva elastica e di tanti altri argomenti, tra i quali la *resistenza viva*, detta anche da Young *resilienza*, relativa alle sollecitazioni longitudinali o trasversali per urto, la quale risulterebbe proporzionale al volume del corpo urtato e indipendente dai rapporti tra le sue dimensioni, e d'altra parte sarebbe proporzionale al prodotto del quadrato σ_0^2 della coesione permanente per la flessibilità (o coefficiente di elasticità) $\frac{1}{E}$, con coefficienti di proporzionalità da determinarsi sperimentalmente.

6. Una nuova corrente, di Inghilterra e Germania, doveva essere immessa, nel 1837-39, negli studi sulla Teoria generale dell'elasticità, e di non minore importanza di quella originante da Navier in Francia, per opera del matematico inglese autodidatta *George Green*, nato il 14 luglio 1793 a Sneinton presso Nottingham, ove morì il 31 marzo 1841.

Egli, nominato nel 1839 Fellow del Cains College di Cambridge, si occupò principalmente di fisica matematica. Servendosi dei metodi della meccanica analitica di Lagrange, lievemente perfezionati col calcolo del potenziale o del lavoro virtuale finito di tutte le forze in giuoco fatto da Navier nel 1821, Green, dapprima in due celebri memorie del 1837-39 sulla luce, con ragionamento originale, tratto dall'impossibilità del moto perpetuo, ridusse a ventuno nel caso più generale i coefficienti di elasticità, introducendo la definizione del potenziale elastico Φ . Cercando d'interpretare la teoria di Green, di-

remo anzitutto che il potenziale Φ rappresenta l'energia elastica per unità di volume accumulata nelle varie parti di un sistema elastico conservativo cui si siano applicate forze che, agendo gradualmente, in equilibri statici o dinamici, a partire da uno stato naturale, indeformato o già deformato, in condizioni isotermitiche o adiabatiche, e cioè con temperatura invariata ovvero con impedita trasmissione del calore, e senza perdite per urti od attriti o altre resistenze passive; lo conducono ad uno stato finale di piccola deformazione elastica: l'integrale $\int_V \Phi dV = L_i$ è l'energia totale elastica del sistema a deformazione avvenuta, che si deve immaginare decomposta in un $\int_V \Phi_0 dV = L_0$, *energia vincolata*, posseduta eventualmente dal sistema allo stato naturale, per azioni esterne nulle, e non restituibile per applicazione di forze esterne di nessun tipo, ed in un $\int_V \Phi_1 dV = L_1$ energia accumulata durante l'applicazione delle forze esterne deformanti e restituibile per soppressione di queste forze, che diremo *lavoro di deformazione*. $L_1 = \int_V \Phi_1 dV$ risulta uguale al lavoro $L = \frac{1}{2} \Sigma P \delta$ delle forze esterne già espresso da Clapeyron, e ciò in virtù del principio dei lavori virtuali ossia per il principio di conservazione dell'energia, ed è sempre positivo, onde $\Phi > \Phi_0$. D'altra parte l'energia totale elastica unitaria non può essere che funzione finita e continua, e pertanto sviluppabile in serie, delle caratteristiche finali dello *strain* ($\epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \ 2\gamma_x \ 2\gamma_y \ 2\gamma_z$); la funzione sarà indipendente dal modo di prodursi dello *strain* e dipenderà solo dai valori finali di questo; sarà uguale a zero solo per valori tutti nulli delle componenti dello *strain* medesimo e pertanto omogenea; sarà sempre positiva e pertanto mancante, nello sviluppo, di termini di primo grado; avrà un valor minimo per $\Phi = \Phi_0$; e, poichè i suoi parametri sono di piccolissima grandezza, potranno trascurarsi nel suo sviluppo i termini di grado superiore al secondo: segue che la funzione Φ sarà una forma omogenea, definita, quadratica delle componenti dello *strain*, che per $\Phi_0 = 0$ coinciderà con Φ_1 ; in questo caso sarà $L_i = L_1 = L$ (*lavoro di deformazione*): per le condizioni cui deve soddisfare, il potenziale elastico Φ non può essere nel caso più generale rappresentato se non da una funzione con 21 termini a coefficienti distinti, i quali saranno coefficienti di elasticità, riducibili di numero a seconda dei gradi di simmetria per i corpi cristallini e riducentisi a due indipendenti per i corpi amorfi od isotropi. La forma del potenziale elastico

mostra che le derivate parziali di esso rispetto alle componenti dello *strain* sono le componenti speciali dello *stress* ($\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_x \tau_y \tau_z$), che risultano pertanto funzioni lineari omogenee delle componenti dello *strain*: le relazioni tra le sei componenti dello *stress* e le sei componenti dello *strain*, omogenee e lineari, hanno apparentemente 36 coefficienti, che, per i teoremi di reciprocità, che vedremo enunciati da Betti e da Maxwell, si riducono appunto a ventuno differenti, con determinante simmetrico dei coefficienti stessi. Scritte le equazioni indefinite e quelle definite o al contorno, le condizioni di congruenza, che saranno espresse da B. de Saint Venant, e le condizioni di compatibilità o ai vincoli, sarà completamente predisposta la trattazione del problema generale dell'equilibrio e del movimento del sistema elastico, che richiede la integrazione di sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo e del primo ordine, in termini degli spostamenti u, v, w nelle direzioni x, y, z .

7. *George Biddell Airy*, fisico matematico inglese (1801-1892) fu il primo a riconoscere che per qualunque sistema piano, in equilibrio sotto l'azione di forze al contorno, escluse dunque le forze di massa, le componenti della tensione in un punto secondo due direzioni ortogonali qualunque sono le derivate seconde rispetto a quelle direzioni di una certa funzione del posto, *la funzione di Airy*, che può valere per sistemi continui e per sistemi discontinui o reticolari; è una funzione arbitraria $F(x, y)$ delle coordinate x ed y , che ha valori indipendenti dalla scelta delle coordinate.

8. *James Clerk Maxwell*, sommo fisico matematico scozzese (1831-1879), scrisse diciassettenne una famosa nota « Sull'equilibrio dei solidi elastici », in cui poneva i fondamenti di quella che fu una delle sue più singolari scoperte, la birifrangenza temporanea prodotta in un liquido viscoso da tensioni tangenziali. A lui si deve (1872) nel campo dell'elasticità l'introduzione di un principio di reciprocità che rientra come caso particolare in quello del Betti, e si debbono altre interessanti ricerche nello stesso campo.

9. *Lord Kelvin, Sir William Thomson*, fisico matematico inglese, nato a Belfast (Irlanda) il 26 giugno 1824 e morto a Netherall (Scozia) il 17 dicembre 1907, laureato a Cambridge nel 1845, proseguì gli studi a Parigi presso H. Regnault: nel 1846 fu chiamato alla cattedra di Natural Philosophy e fisica generale, nell'Università di Glasgow, dove la tenne per cinquantatré anni, ritirandosi nel 1899 e iscrivendosi studente nella stessa Università: nel 1890 fu nominato Presidente della Royal Society. Si occupò di tutti i campi della fisica, soprattutto del calore e dell'elettricità, trattò problemi dell'elasticità con straordina-

ria perizia, giustificando la teoria del potenziale elastico di Green con la 1^a e la 2^a legge della Termodinamica e dimostrando che, in condizioni isoterme (temperatura costante) o adiabatiche (inattuata trasmissione del calore, come nei rapidi moti vibratori), le derivate parziali del potenziale Φ rispetto alle componenti dello *strain* rappresentano le componenti dello *stress* (1855).

Lord Kelvin pubblicò, insieme con P. G. Tait, il classico splendido trattato di meccanica teoretica « *Treatise on Natural Philosophy* » in 2 volumi edito a Oxford nel 1867 e successivamente: ivi introdusse il suo *ellissoide della deformazione*.

Anche a *Gustav Robert Kirchhoff*, eminente fisico tedesco (1826-1887) si debbono fondamentali contributi alla teoria matematica dell'elasticità.

10. Alla ricerca della completa soluzione del problema elastico, statico e dinamico, più generale, problema che presenta nella maggior parte dei casi difficoltà di soluzione insormontate, fu dato mano scendendo dal più al meno e cercando di risolvere problemi particolari che potessero essere di immediata utilità per le applicazioni tecniche.

I fondamentali problemi elaborati sono i seguenti:

A) per corpi isotropi, senza forze di massa.

I) Elasticità piana o a due dimensioni (linee isostatiche ecc.).

1) Prisma indefinito di asse z : forze esterne indipendenti da coordinata z ed agenti in piani perpendicolari ad asse z ; spostamenti $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w = 0$, stress $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y$, con $\tau_x = \tau_y = 0$.

2) Tronco sottile del prisma del problema precedente, con basi scariche e forze esterne indipendenti da coordinata z ed agenti in piani perpendicolari all'asse z ; spostamenti u, v, w , stress $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$, sulle basi $\sigma_z = \tau_x = \tau_y = 0$ e $w \neq 0$, sulla sezione media $\tau_x = \tau_y = 0$, $w = 0$, nelle sezioni intermedie $\sigma_z = \tau_x = \tau_y = 0$ (per approssimazione) e $w \neq 0$.

II) Elasticità spaziale.

1) Compressione normale ed uniforme (trave, piastra, blocco).

2) Estensione longitudinale di un prisma o di un cilindro (pieno o cavo).

3) Equilibrio di uno strato cilindrico (pressioni idrostatiche interne ed esterne).

4) Equilibrio di uno strato sferico (pressioni idrostatiche interne ed esterne).

5) Problema di Barré de Saint Venant: asta cilindrica sot-

tile, caricata sulle basi e scarica sulla superficie di contorno; si hanno solo le componenti σ_z, τ_x, τ_y dello stress (sforzo longitudinale, taglio semplice o deviato, flessione semplice o deviata, torsione).

6) Problema di R. F. Clebsch: piastra cilindrica sottile, caricata sulla superficie cilindrica di contorno e scarica sulle basi; si hanno solo le componenti $\sigma_x, \sigma_y, \tau_z$ dello stress (flessione sferica, flessione non uniforme, estensione): è problema complementare del precedente).

7) Equilibrio di elasticità di un solido indefinito sollecitato in una certa regione da forze esterne date (problema di Boussinesq).

a) forza unica di grandezza assegnata.

b) due forze uguali ed opposte applicate in due punti vicini.

8) Equilibrio elastico del masso indefinito limitato da un piano e sollecitato in una regione limitata del piano, essendo dati sul piano gli spostamenti o gli sforzi o gli spostamenti normali e gli sforzi tangenziali o viceversa (problema del suolo elastico, di Boussinesq-Cerruti).

9) Pressioni di contatto (problema di Hertz).

10) Sfera isotropa.

B) per corpi anisotropi o cristallini.

Problemi di Voigt.

I problemi tecnici trattati nella Scienza delle Costruzioni sono quelli relativi a solidi soggetti anche a forze di massa (peso proprio ecc.), come le travi rettilinee, le lastre piane, gli archi, le lastre curve, le cupole, i recipienti, le reti, i portali ecc., di struttura, omogenea e isotropa o non omogenea, elastica.

Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant, nato a Fillier en Bric (Seine) il 23 agosto 1797 e morto a Sant Ouen il 16 gennaio 1886, allievo dell'École Polytechnique e poi dell'École Nationale des Ponts et Chaussées, ingegnere dei Ponti e Strade fino al 1852 e dal 1848 al 1852 professore all'Istituto agronomico di Versailles, fu nominato membro dell'Académie des Sciences nell'Istituto di Francia nel 1868 succedendo a Coriolis. Fu uno dei cultori insigni della Teoria matematica dell'elasticità. Pubblicò nel 1864 il « *Resumé des Leçons sur la Résistance des Solides di Navier* » già citato, arricchito di note e appendici e di un'accurata esposizione storica sugli studi della Resistenza ed Elasticità dei materiali: nel 1883 tradusse e commentò l'opera di Clebsch su quell'argomento. A lui si debbono: la trattazione approfondita del problema, che porta il suo nome, relativo alle aste cilin-

driche isotrope sottili caricate solo sulle basi, di alto interesse per gli ingegneri; l'enunciazione del principio di equivalenza, per il quale, agli effetti dello studio degli stati di tensione e di deformazione di un'asta, se si eccettuino i tratti terminali, di lunghezza comparabile con la massima dimensione trasversale, tutte le distribuzioni di sforzi sulle basi possono ritenersi equivalenti quando siano rappresentate da uno stesso sistema risultante; la formulazione delle sei condizioni di congruenza cui debbono soddisfare le derivate parziali di secondo ordine delle componenti dello *strain* ($\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z 2\gamma_x 2\gamma_y 2\gamma_z$), rispetto alle coordinate x, y, z ; numerose altre osservazioni e deduzioni utili per le applicazioni della teoria dell'elasticità e resistenza; una ancor oggi feconda e profonda trattazione della teoria della plasticità ecc.

Rudolf Friedrich Clebsch, nato a Königsberg il 19 febbraio 1823 e morto a Göttingen il 7 marzo 1872, fu allievo di F. Neumann, Hesse e Richelot all'Università di Königsberg, libero docente a Berlino e in seguito professore di meccanica teorica nella Scuola Politecnica di Karlsruhe (1858) e poi di matematica nell'Università di Giessen (1863) e di Göttingen (1868). Si occupò di problemi di fisica matematica, principalmente di idrodinamica e di elasticità, di analisi e di geometria, segnatamente di geometria proiettiva e teoria delle forme secondo l'indirizzo seguito poi da Klein e da Cremona. Pubblicò il bellissimo trattato «*Theorie der Elastizität fester Körper*, Leipzig 1862». A lui si debbono la trattazione dello stesso problema di Saint-Venant e di quello complementare relativo alla piastra cilindrica isotropa sottile caricata solo sulla superficie cilindrica al contorno, anch'esso di alto interesse per gl'ingegneri, ed altri contributi di molto valore nel campo della teoria matematica dell'elasticità.

Heinrich Hertz (1857-1894), professore nell'Università di Bonn, *Valentino Cerruti* (1851-1909), professore nell'Università di Roma e *Joseph Boussinesq* (1842-1929) professore della Facoltà di Scienze di Parigi furono scienziati insigni, che portarono eccelsi contributi alle soluzioni di problemi dell'elasticità rivolti anche alle più utili applicazioni.

11. Al primo avviamento del grande movimento scientifico ora esaminato l'Italia non partecipò e restò quasi estranea, se non si considerino i lavori di *Giovanni Plana* (1811) sulla curva elastica, di *Ottaviano Fabrizio Mossotti* (1820) sullo scatto dell'elice, di *Gabrio Piola* (1832 e 1836) sulle equazioni generali dell'equilibrio di un corpo continuo ispirate ai metodi analitici di Lagrangia e sulla nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare, di *Giusto Bella-*

vitis (1839) sulle verghe elastiche, di *Giulio* sulla resistenza del ferro colato e la torsione dei fili metallici (1840 e 1842) e di *Pacinotti e Peri* (1845) sulla resistenza elastica del legno.

Solo coi lavori del generale Menabrea (1857), di Alberto Castigliano (1873), di Enrico Betti (1873) e di Valentino Cerruti, già citato, l'Italia viene a riprendere il proprio posto di guida nel comune lavoro scientifico e dai matematici italiani si scrivono ⁽²¹⁾ i più interessanti capitoli della Teoria matematica dell'elasticità e delle sue applicazioni, con un magnifico complesso di lavori, vero monumento nazionale ispirato alle più pure idealità della Scienza, che ha rapidamente maturato l'ardita concezione della teoria completa di integrazione delle equazioni di elasticità, anche per i fini applicativi dell'alta ingegneria.

Luigi Federico Menabrea, marchese di Valdora, generale, scienziato e uomo politico di fama, nato a Chambéry il 4 settembre 1809 e morto a Saint Capin (Chambéry) il 26 maggio 1896, fu appassionato cultore di scienze fisiche e matematiche: laureato in matematica nell'Università di Torino e poi Ufficiale del Genio, insegnò geometria descrittiva, meccanica e costruzioni nell'Accademia militare di Torino (1839-1848), dove era stato discepolo di Giovanni A. Plana. Menabrea nel 1857 annunciò all'Accademia delle Scienze di Torino la scoperta del suo « *principio di elasticità o del minimo sforzo* », che in una nota all'Académie des Sciences di Parigi del 1858 espresse nel moto seguente « *Lorsqu'un système élastique se met en équilibre sous l'action de forces extérieures, le travail développé par l'effet des tensions ou des compressions des liens qui unissent les divers points du système est un minimum* ». Questo enunciato ($\delta L = 0$ con $L = \int_V \Phi_1 dV$ funzione quadratica degli sforzi e nullo il potenziale vincolato Φ_0) non era chiaro nè preciso, perchè l'indicata condizione di massimo o di minimo non può prescindere ⁽²²⁾ da una conveniente limitazione della classe di configurazioni del sistema che si considera, essendo d'altronde il sistema da ritenersi iperstatico. Tale classe è quella delle configurazioni equilibrate non congruenti o non compatibili coi vincoli esterni ed interni al sistema, tra le quali, in condizioni isotermitiche e in mancanza di cause dissipative di energia o da coazioni dipendenti da deformazioni permanenti o plastiche, una sola sarà equi-

⁽²¹⁾ R. MARCOLONGO, *Progressi e sviluppo della Teoria matematica della elasticità in Italia*. Rapp. a Soc. It. di Fisica. Congr. Parma 1907. Pisa. Nuovo Cimento 1907.

⁽²²⁾ G. COLONNETTI ed E. GIACCHERO, *Ingegneria. Scienza delle Costruzioni*. V. Bompiani. Enc. Scient. Monogr. It. XX Secolo. Serie I, n. 3. Verona, 1939.

librata e congruente e coinciderà pertanto con l'unica configurazione reale di equilibrio del sistema: a questa si potrà legare l'unica possibile grandezza del lavoro di deformazione, che risulterà minima tra tutte quelle, corrispondenti, ma solo come somme dei lavori di deformazione delle varie parti del sistema, alle singole configurazioni della classe presa in esame. L'espressione del lavoro L è in funzione degli sforzi. È nozione certa, nel campo dei problemi della Scienza delle costruzioni, l'unicità di soluzione del problema dell'equilibrio elastico stabile. All'unica configurazione reale di equilibrio si può anche giungere per altra via considerando del sistema, sempre iperstatico, soggetto a date forze, applicate nelle condizioni prima indicate e ritenute ora costanti, tutte le configurazioni possibili congruenti coi vincoli esterni ed interni e scegliendo tra esse l'unica reale equilibrata, mediante l'applicazione integrale del principio dei lavori virtuali sotto forma del principio della *minima energia totale* ($\delta(L + \pi) = 0$) che definisce la stabilità dell'equilibrio⁽²³⁾: L (energia potenziale elastica) e π (energia potenziale esterna ossia delle forze applicate) sono espresse in funzione degli spostamenti. L'applicazione del principio della minima energia totale fu ed è fecondo di risultati di grande importanza nei problemi di carattere tecnico maggiormente complessi. Tuttavia, dopo le precisazioni sopra esposte, che hanno tardato per vero a maturarsi, il principio del minimo lavoro si è imposto nel campo delle applicazioni della Teoria dell'elasticità alla Scienza delle costruzioni, dando luogo a cospicui procedimenti per lo studio dei sistemi iperstatici, reticolari o continui, in condizioni isotermitiche o adiabatiche e in assenza di fenomeni dissipativi (con vantaggio notevole sul metodo della minima energia totale perchè l'espressione del lavoro molecolare in funzione degli sforzi è molto più agevole a trovarsi che non la espressione di esso in funzione degli spostamenti e d'altronde le reazioni iperstatiche che interessa conoscere, a prescindere dagli spostamenti, sono generalmente in numero inferiore al numero dei parametri degli spostamenti). Castigliano, Müller Breslau, Mohr, Ceradini, Canevazzi, Guidi ed altri insigni cultori della Scienza e docenti nei politecnici hanno, nelle loro lezioni o nei loro classici e stupendi trattati, applicato questo principio del minimo lavoro, perfezionandone i metodi di impiego e segnando una vera tappa storica, come dice il Colonnetti⁽²⁴⁾, nella moderna Scienza delle costruzioni.

Carlo Alberto Castigliano, nato ad Asti il 9 novembre 1847 e morto a Milano il 25 ottobre 1884, ingegnere, fu dal 1866 al 1870 inse-

(23) (24) G. COLONNETTI ed E. GIACCHERO, *Ingegneria. Scienza delle Costruzioni*. V. Bompiani. Enc. Scient. Monogr. It. XX Secolo, Serie I, N. 3. Verona 1939.

gnante di meccanica e macchine in Istituti tecnici: tornato a Torino, compì gli studi di ingegneria e si laureò nel 1873, entrando poi nel corpo degli Ingegneri delle Ferrovie dell'Alta Italia, dove raggiunse il grado di Capo Ufficio d'Arte Serv. manutenzione e lavori. Nella sua dissertazione di laurea, presentata alla Scuola d'Applicazione per gli ingegneri di Torino nel 1873, e poi nella « *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications* » stampata pure a Torino nel 1879, tornando sulla controversia suscitata dall'enunciato del principio del minimo lavoro di Menabrea, così egli lo riassumeva ⁽²⁵⁾, con maggior chiarezza, ma senza precisare la limitazione della classe di configurazioni considerata nè il significato di lavoro; « Les forces élastiques qui ont lieu entre les couples moléculaires après la déformation du corps ou du système sont celles qui rendent un minimum le travail de déformation, eu égard aux équations de condition qui expriment qu'il y a équilibre entre ces forces autour de chaque molécule ». In una memoria « *Nuova teoria intorno all'equilibrio dei sistemi elastici* », pubblicata negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino nel 1875, Castigliano, riportando osservazioni già contenute nella sua tesi di laurea del 1873, enunciava uno dei suoi *due teoremi sulle*

derivate del lavoro $\frac{\delta L}{\delta P} = p$ (L lavoro di deformazione, P forza

esterna, p proiezione dello spostamento del punto di applicazione della forza P sulla direzione della forza stessa con valore positivo se consensuale alla forza, negativo se di senso opposto). Nell'opera citata « *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques* », pubblicata in lingua francese per i tipi dell'ed. Negro a Torino nel 1879, Castigliano comincia con l'enunciare i suoi due « Teoremi dalle derivate del

lavoro di deformazione », il 1° $\frac{\delta L}{\delta r_p} = R_p$, che dice esser già stato

impiegato, ma solo in un caso particolare e senza enunciazione nè dimostrazione, dal celebre fisico inglese Green, mentre egli ne dà per

primo enunciato e dimostrazione; il 2° $\frac{\delta L}{\delta R_p} = r_p$, che dice essere

inverso dal 1° e che coincide con quello esposto nelle note precedenti; dà poi un 3° teorema, che intitola « del minimo lavoro » ed esprime nel modo sopra riportato, del quale dice esplicitamente poter esso essere riguardato come un corollario del 2° teorema delle derivate del lavoro, mentre, come avviene in altre questioni di massimo e di minimo, è

(25) A. CASTIGLIANO, *Selecta* a cura di G. Colonnetti. R.L.A. Valle. Torino 1935.

stato per così dire intuito e presentato, senza precisazioni, da Menabrea molti anni prima del suo, che gli sta a fondamento $\left(\frac{\partial L}{\partial X} = 0 \right)$, simbolicamente rappresentante tante equazioni quante sono le iperstatiche X) (trattarsi effettivamente di un minimo e di un massimo si può accertare mediante l'applicazione del principio di reciprocità del Betti).

Nella suddetta opera Castigliano applica il principio del minimo lavoro a sistemi articolati, sistemi continui, travi ad asse rettilinea caricate di pesi e travi a semplice curvatura e dà le espressioni del lavoro di deformazione per molti corpi isotropi. Avverte Castigliano che il teorema del minimo lavoro non vale in presenza di attriti, di difetti di costruzione o di montaggio, di variazioni di temperatura a libera trasmissione termica, di deformazioni plastiche, di cedimento di vincoli: è lo stesso, aggiungiamo noi, per il « principio variazionale della minima energia totale $(\delta(L + \pi) = \delta(L - \Sigma Pp) = 0)$ », che può ritenersi un diretto corollario del 1° teorema delle derivate del lavoro.

Numerose pubblicazioni sulla Teoria delle molle, sugli archi in muratura, sul colpo d'ariete ed uno strumento micrometrico per la misura degli sforzi nelle membrature delle costruzioni metalliche attestano la multiforme attività di questo grande italiano, rapito in giovanissima età alla scienza e alla vita, il quale con la sua opera ha segnato agli ingegneri il giusto mezzo tra l'empirismo cieco ed una irraggiungibile o illusoria esattezza teorica.

Enrico Betti, l'illustre matematico e fisico-matematico dell'Ateneo di Pisa, nato nel 1820 e morto nel 1892, dette uno dei più alti e decisivi contributi al rapido sviluppo della Teoria matematica dell'elasticità e delle sue applicazioni alla Scienza delle Costruzioni, con il suo celebre « *teorema di reciprocità* », enunciando il quale, nella sua classica Teoria dell'elasticità, il Betti nel 1872 dimostrava rigorosamente e generalizzava un principio, comune ad altri rami della fisica matematica, già introdotto in un caso particolare da Maxwell pure nel 1872. Il principio di Betti vale in condizioni isoterme o adiabatiche e in assenza di forze dissipative ed è così enunciato « Date due diverse deformazioni di un corpo elastico, relative a due diversi sistemi di forze esterne, il lavoro che le forze del primo sistema compirebbero qualora ai vari loro punti di applicazione venissero attribuiti gli spostamenti che caratterizzano la seconda deformazione, è uguale al lavoro che compirebbero le forze del secondo sistema nell'ipotesi che ai loro punti di applicazione venissero attribuiti gli spostamenti che caratterizzano la prima deformazione ».

Betti

$$\int_V (X^1 u^{11} + Y^1 v^{11} + Z^1 w^{11}) dV + \int_S (X_n^1 u^{11} + Y_n^1 v^{11} + Z_n^1 w^{11}) dS =$$

$$= \int_V (X^{11} u^1 + Y^{11} v^1 + Z^{11} w^1) dV + \int_S (X_n^{11} u^1 + Y_n^{11} v^1 + Z_n^{11} w^1) dS$$

(ovvero $\Sigma P \delta P_Q = \Sigma Q \delta Q_P$)

Maxwell

($\delta P_{Q_{-1}} = \delta Q_{P_{-1}}$) (due sole forze uguali).

Non vi è problema di Scienza delle Costruzioni cui questo elegantissimo principio non possa essere applicato con vantaggio.

Per le equazioni di elasticità ha lo stesso ufficio del lemma di Green nella teoria del potenziale; permette l'espressione della dilatazione cubica totale in un corpo elastico qualunque; permette di constatare la simmetria del determinante dei 36 coefficienti che appaiono come coefficienti di influenza nelle sei relazioni lineari omogenee che legano lo strain allo stress, riducendo quindi le costanti elastiche distinte, siano pur legate da qualche condizione di congruenza, a 21, quanti sono i termini del potenziale elastico.

In generale il principio di reciprocità rappresenta il punto di partenza ed il fondamento necessario e insostituibile della moderna teoria delle linee di influenza ⁽²⁶⁾, utilizzando per carichi mobili curve elastiche e deformate relative a carichi fissi; permette di determinare gli spostamenti dovuti a carichi applicati alla superficie laterale nel problema delle travi di Saint-Venant e di risolvere questioni analoghe nel problema delle piastre di Clebsch ed in altri problemi di elasticità. Esso permette di trovare una corrispondenza biunivoca tra rette (linee di azione di forze) e punti (centri di rotazione istantanei) di un piano, corrispondenza la quale ha i caratteri della polarità e consente di dedurre il peso elastico e la ellisse terminale di elasticità di un sistema piano (ellisse centrale di una antipolarità, conica fondamentale dei pesi elastici): la conseguente teoria ha aggiunto un potente strumento grafico-analitico per la indagine sulla deformazione elastica e sulle reazioni iperstatiche di sistemi semplici o complessi e si può estendere all'uso di un'ellisse trasversale di elasticità e di ellissi di elasticità composte in serie o in parallelo.

I lavori del Betti nel campo dell'elasticità riguardano l'estensione a questa dei metodi escogitati da Green in poi per la teoria del potenziale e costituiscono il primo dei metodi generali per la integrazione

⁽²⁶⁾ G. COLONNETTI ed E. GIACCHERO, op. cit. ai NN. ⁽²²⁾ ⁽²³⁾ ⁽²⁴⁾.

delle equazioni dell'equilibrio elastico per le più comuni condizioni al contorno.

Lo sviluppo e l'insegnamento della Teoria matematica dell'elasticità ha avuto, nell'ultimo quarto del secolo XIX, rappresentanti insigni, oltre che negli scienziati già ricordati, in illustri fisico-matematici italiani (E. Beltrami, E. Cesaro, L. Donati, G. Crotti, M. Gebbia, L. Lauricella, T. Levi Civita, R. Marcolongo, G. Morera, E. Padova, C. Somigliana, O. Tedone, V. Volterra ecc.) e stranieri (Dirichlet, Duhem, Fredholm, Kirchhoff, Hadamard, Lamb, Lecornu, Love, Neumann, E. Picard, H. Poincaré, Stokes, Voigt ecc.).

12. A questo punto dobbiamo ricordare altri progressi raggiunti, per opera di trattatisti e docenti universitari italiani e stranieri, sulla fine del secolo XIX, nello studio dei problemi costruttivi concernenti la spinta delle terre incoerenti e coerenti, il cemento armato, le sollecitazioni dinamiche nonchè la valutazione di effetti (deformazioni e tensioni) derivanti da variazioni di temperatura, di tensioni e autotensioni derivanti da deformazioni di carattere plastico, da difetti di costruzione o di montaggio, forzamenti, distorsioni, cedimento di vincoli in sistemi isostatici o iperstatici. L'applicazione pura e semplice del principio dei lavori virtuali, valevole in ogni caso d'equilibrio, ha, tanto per i sistemi reticolari quanto per i sistemi continui, condotto a rivelare relazioni puramente geometriche, atte, con le dovute limitazioni, al calcolo degli effetti su indicati, isolati o sovrapposti a quelli di sistemi di forze esterne, e specialmente semplici e vantaggiose per la determinazione di iperstatiche (tipica la relazione $\delta = \Sigma t \cdot \Delta l + \dots$ o $\delta = \int (c \Delta ds + v \Delta' ds + m \Delta d\varphi + \dots + \dots + \dots) + \dots$, dalla quale, come dalle altre analoghe che se ne possono derivare, si possono trarre le grandezze degli spostamenti di punti, rette e piani di un sistema dovuti a forze esterne, variazioni di temperatura, deformazioni plastiche, cedimento di vincoli esterni ed interni, nonchè le equazioni determinatrici di reazioni iperstatiche esterne od interne nelle condizioni più generali.

All'illustre e venerato mio maestro, l'ingegnere *Cesare Ceradini*, nato a Milano nel 1844 e morto a Roma nel 1936, docente dal 1867 al 1872 nell'Università di Palermo e dal 1873 al 1919 professore di Meccanica applicata alle Costruzioni e Teoria dei Ponti nella Scuola di Applicazione per gli ingegneri di Roma, che diresse dal 1909 al 1922, spetta il merito di aver portato in Italia per primo nell'insegnamento della Scienza delle Costruzioni il nuovo indirizzo scientifico-tecnico rigoroso segnato dalle teorie di Menabrea, Castigliano e Betti, dedicando la sua profonda sagacia, l'ingegno brillante e la dot-

trina sicura alla preparazione di lezioni attraenti ed efficaci, sempre aggiornate, sulle sollecitazioni statiche e dinamiche di corpi e sistemi elastici e sulle loro applicazioni alle costruzioni di ogni genere: i suoi primi allievi, ing. *Silvio Canevazzi* emiliano (1852-1918), professore di Meccanica applicata alle Costruzioni, Ponti e costruzioni idrauliche dal 1877 al 1918 nella Scuola d'applicazione per gli ingegneri in Bologna, che diresse dal 1911 al 1918, e ing. *Camillo Guidi* romano (1853-1941), professore di Statica grafica e Scienza delle Costruzioni dal 1882 al 1928 nel Politecnico di Torino, fecero grande onore al maestro con l'opera ammirevole, svolta come docenti e come scienziati, ampiamente dedicandosi, oltrechè al campo teorico, a lavori sperimentali di molto pregio e riuscendo, come il maestro, a formare una valorosa schiera di cultori e professori delle discipline da loro illustrate. Oltrechè i corsi litografati, ancor oggi validissimi, si debbono a loro pubblicazioni importanti sui più vari argomenti e trattati, uno dei quali, quello di Scienza delle Costruzioni del Guidi, è di ampia mole e può considerarsi come il trattato nazionale italiano, riprodotto in numerose edizioni. Ricordiamo ancora il prof. *Cavalli* di Napoli, il prof. *Iorini* di Milano e *Francesco Crotti*, ingegnere ferroviario. All'estero le applicazioni della Resistenza dei Materiali e della Teoria matematica alla Scienza delle costruzioni furono coltivate e professate in questo periodo da insigni maestri, tra i quali ricordiamo:

l'ing. *A. René Polonceau* (1778-1847) e l'ing. *J. B. Camille Polonceau*, suo figlio (1813-1859), ideatore e costruttore del tipo di capriate che porta il suo nome;

H. Bresse, professore all'Éc. Imp. P. C. in Parigi, autore di un bel trattato « *Cours de mécanique appliquée 1859-1865-1880* »;

William J. M. Rankine (1820-1872), ingegnere scozzese, membro della Royal Society (1849) e professore di Ingegneria civ. e meccanica a Glasgow (1855), autore di un ottimo « *Manual of applied Mechanics 1858-1868* »;

Karl Culmann (1821-1881), ingegnere e poi dal 1855 al 1875 professore a Zurigo e direttore dal 1872 al 1875 di quel Politecnico, autore di una bell'opera « *Die graphische Statik. Zurigo 1875* »;

Hermann L. F. Helmholtz (1821-1894), professore a Berlino;

Johann Bauschinger (1834-1893), professore a Monaco di Baviera, benemerito della organizzazione delle ricerche sperimentali sui materiali da costruzione nelle conferenze internazionali di Monaco (1884), Dresda (1888), Berlino (1890) e Vienna (1893).

Georg D. A. Ritter (1826-1908), professore ad Hannover dal 1856 al 1870, poi fino al 1899 ad Aquisgrana, ove ideò il metodo, che porta il suo nome, per la determinazione degli sforzi nelle aste delle travi reticolari;

Christian O. Mohr (1835-1918), professore a Dresda, che si occupò, soprattutto con metodi analitico-grafici, di problemi di resistenza delle travi, di equilibrio delle dighe: a lui si deve la rappresentazione piana delle tensioni intorno a un punto (cerchi di Mohr);

Julius Weingarten (1836-1910), professore a Charlottenburg dal 1879 al 1893, famoso per i suoi splendidi corsi di lezioni di meccanica e di teoria dell'elasticità;

Horace Lamb (1849-1920), professore a Manchester, illustre cultore dell'idrodinamica e degli altri rami della fisico-matematica;

Ludwig von Tetmaier (1850-1905), professore a Zurigo e poi a Vienna dal 1873 al 1905, fondatore dal 1893, alla morte di Bauschinger, e Presidente della Association Internationale pour l'essai des matériaux, autore di un bel trattato « Die Angewandte Elastizitäts und Festigkeitslehre Wien 1904 ».

Heinrich F. B. Müller Breslau (1851-1925), professore ad Hannover dal 1883 al 1889 e poi a Berlino, in sostituzione di Winkler, dal 1889 al 1920, particolarmente famoso per il suo trattato « Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. Leipzig 1904 ».

August Föppl (1856-1924), professore a Lipsia e poi, in successione del Bauschinger, a Monaco di Baviera, autore del voluminoso trattato « Vorlesungen über technische Mechanik. Leipzig 1905-1907-1912 », completato nel 1922 con due bei volumi « Drang und Zwang », scritti in collaborazione col figlio;

F. Grashof, professore a Berlino, autore della « Theorie der Elast. und Fest. Berlin 1878 ».

E. Winkler, professore a Berlino, autore del trattato « Die Lehre v. d. Elast. un Fest. Prag 1867 » e delle « Vorträge über Brüchenbau. Wien 1877-86 »;

W. Ritter, professore a Zurigo, autore delle « Anwendungen de Graphische Statik. Zürich 1890-1906 »;

C. Bach, professore a Stuttgart, autore di « Elastizität und Festigkeit. Berlin 1905 »;

B. Kirsch, *F. Engesser*, *G. Rehbann*, *F. J. Weyrauch*, professori rispettivamente a Vienna, Berlino, Vienna e Lipsia;

G. C. Mehrrens, Maurice Lévy, H. Bouasse, A. Mesnager, professori rispettivamente a Lipsia, a Parigi, Tolosa, Parigi.

Ricordiamo anche *Vicat, Barlow, Fairbairn, Hodgkinson, Wertheim, Tresca*, famosi sperimentatori della resistenza dei solidi e gli ingegneri *Wöhler, Spangenberg* ecc., che primi, dal 1859 per lungo periodo d'anni, diedero contributo di ricerca importantissimo intorno alle sollecitazioni dinamiche e ripetute, e Launhardt che con Winkler e Weyrauch ne applicò i risultati.

B) IL SECOLO XX

I. 1. Nell'ultimo cinquantennio, per le esigenze stesse, pur non sempre congruenti, della civiltà contemporanea, gli studi sulla Resistenza dei materiali, diretti al progresso della Scienza e della Tecnica delle Costruzioni, hanno avuto notevole sviluppo.

Alle già complesse strutture litoidi, lignee e metalliche, cui si può, entro certi limiti, sia pure con approssimazione grossolana, attribuire i caratteri dell'omogeneità e perfino dell'isotropia, si erano aggiunte, con rapida estensione e particolare arditezza di concezione, le strutture di cemento armato, seguite presto da quelle di cemento precompresso, di leghe metalliche leggere, di vetro, di materie plastiche e di altri prodotti dell'industria: si era poi accentuato l'intervento delle alte e basse pressioni, delle alte e basse temperature, delle pulsazioni rapide o lente dei carichi, tutte cause di poco noti e pericolosi fenomeni.

L'attenzione degli studiosi fu pertanto richiamata sull'opportunità, anzi la necessità, di tentare la definizione di particolari teorie sulle sollecitazioni di tipo elastoplastico o plastico, da affiancare alla teoria dell'elasticità, e di spingere la ricerca sperimentale sulle proprietà fisiche dei materiali da costruzione e sul comportamento delle strutture finite.

2. È stato ripreso anzitutto, con attenzione particolare, l'esame dei criteri di sicurezza per la stabilità dei corpi isotropi, assoggettati, staticamente o dinamicamente, a sollecitazioni semplici od a sollecitazioni simultanee.

Gli equilibri elastici dei sistemi a telaio con molte iperstatiche, delle piastre, dei gusci, dei recipienti, gli equilibri degli ammassi disgregati incoerenti o coerenti, le condizioni di stabilità degli equilibri di compressione o di flessione (pressoflessione o flessotorsione) per sistemi semplici o composti sono stati oggetto di accurate ricerche, certo non esaurienti.

Sono stati iniziati studi approfonditi sulle distorsioni, le coazioni elastiche, le autotensioni.

Sono state sottoposte a studio le sollecitazioni prodotte da variazioni di temperatura non uniformi, eventualmente in presenza di alte pressioni.

Così hanno occupato l'attività di insigni ricercatori le sollecitazioni dinamiche e ripetute, le vibrazioni flessionali e torsionali, le vibrazioni delle fondazioni e dei telai, con risultati già importanti ma incompleti.

Tra i metodi grafico-analitici di calcolo ha avuto notevole incremento quello dell'ellisse terminale di elasticità.

Grandi progressi si sono verificati nelle ricerche sperimentali scientifiche e tecniche intese allo studio del comportamento fisico e più particolarmente meccanico dei materiali da costruzione nelle condizioni più varie di sollecitazione e di ambiente o alle verifiche su modelli o strutture finite, in sede di progetto o di collaudo: una ricca messe di ottimi e moderni macchinari di prova e strumenti di misura, di metodi d'indagine con misure dirette o indirette (micrometria, fotoelasticimetria, radiografia), di esperienze, semplici o complesse, di laboratorio o di cantiere, costituisce il risultato fecondo della geniale e costante applicazione di decenni, per parte di pensatori ed operatori, benemeriti della Scienza e della Tecnica delle costruzioni.

II. 1. Non è oggetto certamente di questo mio discorso un esame particolareggiato di tutta l'opera svolta negli ultimi cinquant'anni da scienziati ed ingegneri nel campo tanto vasto delle costruzioni: la storia di essa, con le sue sintesi e i suoi giudizi, non è da scriversi oggi. Soltanto credo opportuno affermare che di grande valore sono i contributi che nei primi lustri di questo secolo, in tutti i paesi civili, hanno recato al progresso scientifico-tecnico i cultori insigni delle applicazioni della matematica e della fisica già citati nelle pagine precedenti ed i loro più eminenti allievi, che, continuando da loro opera, insegnano attualmente nelle Università e nei Politecnici o alimentano con dottrina e genialità le manifestazioni pratiche dell'alta ingegneria: credo anche opportuno far considerare che, nonostante le vicende perturbatrici connesse alle continue guerre e ai movimenti sociali, il fervore di ricerca e di organizzazione operativa nel campo delle scienze applicate si è mantenuto vivo, pur non tacendo che è, a mio avviso, improrogabile il ritorno alle nobili tradizioni dei liberi rapporti scientifici, personali e collettivi, tra tutti gli studiosi e, nel tempo stesso, ad un concorde indirizzo nel dirigere, con chiarezza e semplicità, evitando ermetismi sempre dannosi e la confusione delle lingue, le impo-

stazioni e le soluzioni dei difficili problemi che sempre più numerosi si presentano per il conseguimento delle mete nuove ed ardite che il progresso della civiltà, morale e materiale, reclama.

2. Qualche particolare su questioni ampiamente trattate e parzialmente risolte sul principio del secolo può trovarsi in un mio discorso di classe « Recenti progressi della Scienza e della Tecnica delle Costruzioni », pronunciato nel Settembre 1913 a Siena durante la VII Riunione della Società Italiana per il progresso delle scienze, pubblicato negli Atti della Riunione stessa e poi nella Rivista L'Industria, Vol. XXVIII nel 1914: altre notizie aggiornate, con trattazione critica profonda ed estesa bibliografia, riguardante specialmente contributi italiani, si trovano nel dotto, già citato, Vol. 3, Serie I dell'Enciclopedia scientifica monografica italiana del ventesimo secolo, scritto in collaborazione dal prof. Gustavo Colonnetti e dall'ing. Enzo Giacchero col titolo « Ingegneria, Scienza delle Costruzioni » edito da V. Bompiani nel 1939.

Rinviando senz'altro a queste pubblicazioni coloro cui possano interessare, qui mi limiterò a ricordare ciò che costituisce l'oggetto delle ricerche e dei problemi che hanno più spiccato carattere di attualità e sono tuttora, in generale, in una fase di incompleto, se pur promettente sviluppo. Certo, molto è stato fatto attraverso le iniziative personali, i Congressi dell'Association Internationale pour l'Essai des Matériaux, ricostituitasi dopo la prima guerra mondiale, i Congressi internazionali di Meccanica applicata, ed altre Conferenze e Riunioni, per il progresso degli studi sperimentali e teorici interessanti l'Elasticità e Resistenza dei materiali, l'idrodinamica, l'aerodinamica e la Scienza e la Tecnica delle Costruzioni: ma i risultati sono in molti campi ben inferiori a quelli che ai principi del secolo si era sperato di poter perseguire e raggiungere lavorando con metodo e lena.

III. 1. Le ricerche e prove sul comportamento meccanico dei materiali litoidi naturali hanno fatto ben pochi progressi; quelle sugli agglomeranti aerei ed idraulici, sulle malte e sui conglomerati cementizii, sui laterizi e materiali analoghi, sulle murature, sul cemento armato attendono aggiornamenti e complementi di assoluta necessità, dai quali siamo ancora ben lontani, pur disponendosi di attrezzature sperimentali perfezionate prodotte da benemerite case costruttrici svizzere, tedesche, americane, inglesi, francesi ed anche italiane, come la Amsler di Schaffhausen, la Losenhausen Werke di Düsseldorf, la Tinus Olsen di Philadelphia, la E. Gregori di Schio, la Galileo di Firenze, ecc.; le ricerche e prove sulle fibre e paste cellulosiche e sui le-

gnami richiedono esse pure radicali riforme di indirizzo e di metodi; quelle dei materiali metallici debbono essere coordinate ed estese, con particolare riguardo alla durezza, all'usura, alla resilienza, alle sollecitazioni ripetute od alterne o di fatica, alla resistenza sotto basse ed alte temperature, alla tempratura ecc.: così la resistenza statica e dinamica dei filati e tessuti, delle funi vegetali o metalliche, delle molle, delle piastre, dei tubi e recipienti, delle chiodature e saldature, dei pezzi finiti di macchine o di strutture e la resistenza delle fondazioni, dei muri, delle travature ed arcate, delle coperture, palificazioni, torri ecc. sono ancora indagate e sperimentate con metodi e strumenti che non riescono a far conoscere tutti i parametri caratteristici necessari per l'interpretazione sufficientemente esatta del comportamento sotto azioni costanti o variabili; lo stesso dicasi del cemento armato, del cemento precompresso e di altre strutture soggette a coazioni di vario tipo.

Per quanto si riferisce ai mezzi sperimentali, di cui si sono arricchiti i numerosi laboratori di ricerca e di prova delle Università, dei Politecnici e dei grandi Enti tecnici pubblici e privati, dobbiamo riconoscere che si è fatto un buon cammino nell'ultimo cinquantennio. Possiamo registrare progressi notevoli, oltrechè nelle prove statiche, nelle prove di fatica, per le quali, al fine di abbreviarle e renderle quindi praticamente accessibili, è stata molto aumentata la velocità o frequenza di ripetizione od alternazione degli sforzi o degli urti, basandosi sulla constatazione fatta già in passato che tale velocità o frequenza non esercita influenza sul risultato dell'esperienza. Anche nell'applicazione della fotoelasticimetria, ossia nell'impiego della luce polarizzata e della doppia rifrazione accidentale per l'indagine della distribuzione e della grandezza delle tensioni nei solidi isotropi sollecitati, nel piano o nello spazio, sono stati raggiunti, sia per l'attrezzatura sia per i metodi, progressi cospicui, specialmente per opera dei professori inglesi E. C. Coker e L. N. G. Filon, del prof. A. Mesnager, del prof. L. Föppl, del prof. F. Tank e ing. Henry Favre di Zurigo, e dei colleghi G. Colonnetti, O. Sesini, G. M. Pugno, G. Giordano, G. Manzella, G. Oberti, E. Volterra, M. Salvadori ecc. Infine ottimi tensimetri di precisione a leve, come quelli notissimi della casa Huggenberger di Zurigo, acustici, magnetici, a resistenza elettrica di fili sottili ecc. si son aggiunti allo *spiegelapparat* e ad altri strumenti già in uso, per misure accurate di piccolissime deformazioni in ambiente ordinario od in camere per bassissime od altissime temperature: ad essi si sono affiancati micrometri, ottimetri, misuratori di spessore, comparatori e deformometri, durometri, flessimetri, flessimetrografi, clinometri, ed una ricca serie di altri apparecchi che permettono mi-

sure di alta sensibilità nei vari campi di osservazione del comportamento elastico, elasto-plastico, plastico, termico ecc.

2. Molto profondi studi sono stati compiuti nelle indagini teoriche, che continuano ad essere coltivate con intenso ritmo in relazione ai nuovi quesiti posti dallo sviluppo delle moderne tecniche dell'edilizia, della locomozione terrestre, idrica ed aerea, delle telecomunicazioni, della produzione industriale, ecc.

La lettura e la comparazione dei lavori numerosissimi e dei trattati che a tali studi si riferiscono è però assai faticosa e spesso repellente per la mancata unificazione dei simboli, che in consessi internazionali era stata invocata e promossa ma restò lettera morta, come accade tuttora, in parte, per l'adozione universale del sistema metrico decimale.

Indicheremo gli argomenti principali delle ricerche e citeremo per ciascuno i nomi di alcuni dei cultori più noti, a titolo di orientamento e come fonti di bibliografia.

a) La *meccanica razionale* è stata oggetto di brillanti e moderne trattazioni da parte di P. Appell, H. Bouasse, A. Einstein, E. Jouguet, L. Lecornu, P. Painlevé, H. Lamb, G. A. Crocco, P. Burgatti, F. Calderara, U. Cisotti, G. Giorgi, T. Levi Civita e U. Amaldi, R. Marcolongo, ecc.: la Statica grafica, il Calcolo grafico e la Nomografia sono state chiaramente professate da Maurice d'Ocagne, Maurice Lévy, C. O. Mohr, C. Guidi, A. Ciappi, ecc.

b) L'*alta meccanica tecnica*, con le sue tre branche relative ai solidi deformabili, all'idrodinamica ed all'aerodinamica, ha avuto incremento notevolissimo e ha dato apporti di primo ordine alla Scienza ed alla Tecnica del costruire. La teoria matematica dell'elasticità di primo grado (deformazioni infinitesime) e di secondo grado (deformazioni finite), la teoria matematica della elastoplasticità, la teoria matematica della plasticità pura e della rottura, la teoria dei corpi allegati, la fluido-dinamica e le applicazioni di tutte queste dottrine sono state, con metodi originali, perfezionate o completamente rinnovate da scienziati geniali. Ne sono derivati i trattati e i lavori monografici ben noti di: H. Bouasse, M. Brillouin, J. Boussinesq, A. Caquot, Bertrand de Fontviolant, L. Lecornu, A. Mesnager, G. Pigeaud, G. Villey ecc. in Francia; di O. Mohr, C. Bach, L. Föppl, O. Graf, H. Müller Breslau, R. von Mises, L. Prandtl, H. Hencky, A. Lèon in Germania; di A. Ostenfeld in Danimarca; di A. E. H. Love ed H. Lamb in Inghilterra; di G. F. Swain, S. Timoshenko e A. Nádai in America; di G. Sanatani ed altri in Giappone; di M. Baes in Belgio;

di G. h. Em. Filipescu in Rumenia, di M^{me}. H. Geiringer in Turchia; e, in Italia, di Carlo Somigliana, Vito ed Enrico Volterra, R. Marcolongo, L. Maggi, T. Levi Civita, G. Lauricella, O. Tedone, E. Almansi, U. Cisotti, T. Boggio, E. Laura, A. Signorini, A. Tonolo, G. Supino, Leo Finzi, Maria Pastori, Modesto Panetti, C. L. Ricci, G. Colonnetti, M. Greco, A. Danusso, O. Sesini, L. Donato, D. Bonvicini, O. Belluzzi, O. Zanaboni, L. Sobrero, C. Minelli, P. Locatelli ed altri valorosi professori e studiosi.

c) I problemi particolari delle travature reticolari e continue, derivanti dal problema di Saint-Venant, sono stati ampiamente trattati in tutti i Corsi di Scienza delle Costruzioni e di Costruzioni: in particolare il problema moderno *dei telai e delle strutture con gran numero di iperstatiche* è stato trattato, con procedimenti sufficientemente semplici ed approssimati, da H. Müller-Breslau, A. Ostenfeld, A. Vierendeel, A. Kleinlogel, H. Cross, W. Gehler, A. Strassner, A. Takabeya, M. Baroni, O. Belluzzi, D. Bonvicini, A. Giannelli, C. Minelli, A. Cattin, G. Turazza, ecc.

d) Il problema delle *lastre piane o curve* è stato oggetto di fruttuose ricerche per parte di H. Marcus, di H. Keller, A. Mesnager, G. Pigeaud, C. Guidi, M. Panetti, A. Danusso, G. Albenga, O. Belluzzi, E. Ferrari, E. Frola, L. Kambo, E. Orabona, M. Salvati e molti altri.

e) Il problema dei *tubi e recipienti*, di grande o piccola curvatura, ha trovato i suoi esperti cultori in G. Pigeaud, Goupil, H. Lossier, H. Reissner e E. Meissner, T. Pöschl, H. Müller-Breslau, J.W. Geckeler, S. Timoshenko, C. Guidi, M. Panetti, E. Casati, O. Belluzzi, O. Zanaboni, E. Orabona, G. Turazza, S. Dei Poli, ecc.

f) *Arcate, volte, cupole* sono state oggetto di studio per parte di H. Marcus, E. Schwerin, P. Sokoloff, A. Strassner, S. Timoshenko, Freyssinet, P. Séjourné, J. Résal, C. Ceradini, C. Guidi, A. Iorini, M. Panetti, G. Colonnetti, G. Albenga, L. Stabilini, O. Belluzzi, O. Zanaboni, E. Miozzi, ecc.

g) Una particolare attenzione è stata rivolta alla teoria dell'*ellisse di elasticità* con le sue generalizzazioni e derivazioni, per lo studio dei sistemi piani e spaziali: l'ellisse terminale di elasticità, la composizione in serie o in parallelo di ellissi terminali per sistemi solidali complessi, l'ellisse trasversale di elasticità, le coniche di elasticità longitudinali e trasversali per i sistemi piani più volte connessi hanno trovato ampia trattazione e sviluppo nell'insegnamento e nella tecnica, in ogni ramo di applicazioni. Dopo i contributi di W. Ritter, gli apporti italiani sono dovuti principalmente a S. Canevazzi, C. Guidi,

M. Panetti, C. L. Ricci, G. Colonnetti, A. Giannelli, G. Albenga, O. Sesini, G. M. Pugno, A. Galli, C. F. Iodi, L. Stabilini ecc.

h) Un problema importantissimo, quello degli *stati di coazione* dei corpi o sistemi di corpi, indipendenti da forze esterne esplicitamente date e dipendenti invece da piccolissime deformazioni impresse mediante distorsioni (distorsioni di Volterra, come le lesioni sistematiche di E. Miozzi o i cunei forzati negli archi di Freyssinet ecc.), o variazioni termiche (distorsioni di Somigliana, come i forzamenti termici), o intervento di fenomeni di plasticità, igroscopicità, ritiro, rilassamento, fluimento, è stato ripreso a fondo in questi ultimi decenni: si tratta della determinazione delle tensioni indotte, di tipo elastico, che A. Danusso preferisce designare col nome di *autotensioni*. Il problema fu trattato inizialmente da J. Weingarten, Vito Volterra, C. Somigliana, A. Maggi, E. Almansi, C. Ceradini, S. Canevazzi, C. Guidi ed altri: i professori G. Colonnetti e A. Danusso hanno posto in evidenza, in modo definitivo, le caratteristiche di talune coazioni, alcuni metodi di calcolo delle tensioni corrispondenti alle applicazioni di esse alla compensazione di stati di equilibrio particolari in strutture speciali; oltre i loro contributi fondamentali si debbono ricordare quelli di U. Puppini, B. Zunini, O. Sesini, G. M. Pugno, G. Krall, D. Bonvicini, E. Volterra, A. Signorini, S. Timoshenko ecc.

i) La teoria delle *linee di influenza di spostamenti e di forze interni* per carichi mobili, quale conseguenza del primo principio di reciprocità di Betti-Maxwell e del secondo principio di reciprocità di Land-Colonnetti, principi che si unificano nella dipendenza diretta dal principio dei lavori virtuali, ha avuto cultori eminenti, che, tenendo conto delle sollecitazioni indotte da forze esterne o dalle coazioni di tipo elastico hanno dato preziosi contributi: tali sono W. Ritter, H. Müller-Breslau, M. Lévy, Hisely, Th. Landsberg, C. Ceradini, C. Guidi, G. Colonnetti, G. Albenga, A. Giannelli, O. Belluzzi, L. Stabilini, e molti altri illustri docenti dei vari Politecnici.

l) Alle questioni inerenti *alla stabilità dell'equilibrio elastico* delle strutture sottili e in particolare al problema del *carico di punta* hanno recato nuovi ed importanti contributi R. Mayer, M. Roy, S. Timoshenko, G. F. Swain, T. von Karmán, G. Zimmermann, F. Bleich, G. Albenga, G. Krall, P. Locatelli, O. Belluzzi, O. Zanaboni, L. Stabilini, C. Minelli, ecc.

m) Sulle *sollecitazioni dinamiche* si sono soffermati, con ampiezza di vedute e originali contributi, numerosissimi autori, tra i quali H. Bouasse, M. Wallace, K. Hoenemser, P. W. Prager, L. Jannin, W.

Hort, O. Föppl, J. Geiger, O. Graf, S. Timoshenko, Padre Alfani, T. Levi-Civita, C. Ceradini, S. Cavenazzi, A. Danusso, O. Sesini, L. Roy, D. Negrotti e, col suo bel trattato, G. Krall.

n) *I criteri di sicurezza cinematici, statici, energetici*, in relazione al limite di elasticità o alla rottura, hanno richiamato l'attenzione di tutti i docenti dei Politecnici e di insigni studiosi: particolari apporti sono dovuti negli ultimi decenni a J. J. Guest, F. Huber, R. von Mises, C. E. Inglis, M. Born, A. I. Becker, B. P. Haigh, G. Tamman, K. Wolf, A. A. Griffith, L. Föppl, H. Hencky, G. D. Sandel, F. S. Schleicher, A. Nádai, O. Mohr, W. von Burzynski, H. Fromm, M. Panetti, G. Albenga, A. Danusso, L. Donato, C. F. Camoletto ed altri.

o) Sull'equilibrio dei massi disgregati, più o meno coerenti, e in particolare sulla *Spinta attiva e passiva delle terre, sui suoli elastici, sulle fondazioni, sui muri di sostegno, sulle dighe, sui bacini di carenaggio, sui sylos* ecc. molto è stato scritto e sperimentato: J. Weingarten, J. Boussinesq, J. Résal, G. Pigeaud, Fr. von Engelhard, A. Lèon, Keiichi Hayashi, K. Terzaghi, C. Ceradini, S. Canevazzi, C. Guidi, M. Panetti, G. Krall, A. Danusso, U. Puppini, G. Oberti, Viscardini, Carlo Cestelli Guidi ed altri hanno dato contributi di gran pregio.

p) Circa la teoria e la tecnica del *Cemento armato* richiamo senz'altro la nota storica del caro collega Giuseppe Albenga « Il contributo italiano alla teoria ed alla tecnica del Cemento armato », esposta nel 1949, durante il convegno per la celebrazione del primo ventennio del Corso di perfezionamento per le costruzioni in c. a. presso il Politecnico di Milano: ricorderò solo esplicitamente i più eminenti rappresentanti del pensiero e dell'azione di questa branca dell'ingegneria moderna, che in questo secolo ha avuto le sue prime affermazioni e i suoi trionfi.

Ormai lontano di un secolo il periodo dei pionieri e lontano, ma sopravvissuto in certi campi il periodo della teoria elastica, è ora in pieno sviluppo il periodo della teoria elastoplastica, che in Italia ha avuto il suo profondo codificatore in Gustavo Colonnetti, ed è in rapido progresso quello degli stati di coazione impressi o del cemento precompresso. La precompressione determina coazioni artificiali, valide per contrastare lo stato di tensione pericoloso provocato dalle forze esterne e perduranti anche dopo che le forze esterne vengono a scomparire; della sua applicazione si sono occupati con ottimo successo E. Mörsch, M. Ritter, P. Lardy, G. Magnel, J. Guyon, G. Colonnetti, A. Morandi, G. Rinaldi ecc.; alle altre questioni si dedicarono

particolarmente Considère, E. Lossier, C. Rabut, A. Messnager, E. Mörsch, Fritz von Emperger, Melan, C. Bach, O. Graf, C. Guidi, S. Canevazzi, L. Santarella, M. Baroni, G. Colonnetti, A. Danusso, A. Giannelli, G. Albenga, L. Stabilini, C. Jodi, G. Neumann, G. Niccolosi, A. Muggia, D. Donghi, E. Hennebique, A. Porcheddu, E. Giay, ecc.

Chiudo questa rapida rassegna storica della Scienza e della Tecnica delle Costruzioni, augurando che gli sforzi degli studiosi siano per l'avvenire più nobilmente compensati, offrendosi loro la possibilità di constatare che le prestazioni dell'ingegno sono utilizzate per alti fini di bene e richiamano la gratitudine di una umanità veramente civile.

C. PARVOPASSU

Milano, 15 Maggio 1953.