PARTE PRIMA

CINEMATICA

CAPITOLO I.

OPERAZIONI SUI VETTORI. ANALISI VETTORIALE.

§ 1. **Vettori e loro operazioni.** * — Nella Meccanica occorre considerare grandezze che risultano pienamente determinate dai numeri che le misurano (in una certa scala) e che perciò diconsi *scalari;* p. es. le masse, le temperature, i lavori. Altre grandezze invece dipendono dal concetto di misura e anche da quelli di direzione e di senso e diconsi *vettoriali.*

Un *vettore* è un ente geometrico individuato da grandezza, direzione e senso e lo si può pensare rappresentato da una freccia AB, gene-

---

* Per una sistematica e completa esposizione di queste teorie, qui rapidamente accennate, vedi: *Elementi di calcolo vettoriale* di C. Burali-Forti e R. Marcolongo; Bologna, Zanichelli, 1909; oppure la traduzione francese di S. Lattès; Paris, Hermann, 1910. Rimandiamo pure a questi volumetti per le numerose citazioni storico-bibliografiche.

rata dal trasporto del punto A in B lungo la direzione della retta AB e nel senso da A verso B; in altre parole, un vettore determina la posizione di un punto B rispetto a quella di un punto A qualunque.

Rappresenteremo un vettore con la notazione $B - A$, che si legge B *meno* A, oppure con una lettera in carattere *grassetto*; p. es. $\mathbf{a}$. La grandezza del vettore (numero positivo o nullo che misura la distanza AB) si dice il *modulo* del vettore.

Due vettori si dicono eguali se hanno eguali il modulo, la direzione ed il senso.

Poniamo:

$$B - A = \mathbf{a}; \qquad B = A + \mathbf{a};$$

diremo brevemente:

La differenza di due punti è un vettore; la somma di un punto e di un vettore è un punto.

Un vettore il cui modulo è zero dicesi *vettore nullo*.

Somma di più vettori. Siano dati i due vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$; scelto un punto O ad arbitrio, costruiamo i punti A, B, tali che

$$A = O + \mathbf{a}; \qquad B = A + \mathbf{b}.$$

Il vettore $B - O = \mathbf{c}$, qualunque sia il punto O, dicesi somma dei due dati e si scrive:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

oppure:

$$B - O = (A - O) + (B - A)$$

che ha valore d'identità algebrica.

Così può del pari definirsi la somma di più vettori. Essa gode dei due principii *commutativo* ed *associativo*; si noti inoltre che

$$(C - B) + (A - C) + (B - A) = 0.$$

Prodotto di un vettore $\mathbf{a}$ *per un numero reale* m è un vettore $\mathbf{b}$ avente la stessa direzione e lo stesso senso, o il senso contrario di $\mathbf{a}$, secondo che m è positivo o negativo, e il cui modulo è eguale a quello del primo moltiplicato pel valore assoluto di m; e si scrive

$$\mathbf{b} = m\,\mathbf{a} = \mathbf{a}\,m.$$

Moltiplicando un vettore per un numero reale si ottiene dunque un vettore parallelo al primo; e si può facilmente mostrare che dati due vettori paralleli $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ esiste un numero reale m unico e determinato tale che sia soddisfatta la precedente eguaglianza.

Prodotto interno o scalare di due vettori è il numero espresso dal prodotto dei moduli dei due vettori pel coseno dell'angolo convesso formato dalle loro direzioni. E si scrive

(1) $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \text{mod}\,\mathbf{a} \cdot \text{mod}\,\mathbf{b} \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

che si legge $\mathbf{a}$ scalare $\mathbf{b}$, oppure $\mathbf{a}$ interno $\mathbf{b}$.

Esso gode del principio commutativo, e, per le proprietà note della proiezione su di un asse di una spezzata poligonale, si vede subito che è verificata la proprietà distributiva rispetto alla somma; cioè

(2) $$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

Il prodotto scalare è nullo se i due vettori sono nulli od ortogonali e reciprocamente. Come in algebra poi scriveremo:

(3) $$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = (\mathrm{mod}\,\mathbf{a})^2.$$

Prodotto esterno o vettoriale di due vettori è un terzo vettore **c** di direzione normale a quelle dei due vettori dati **a** e **b**; di senso tale che la terna **a, b, c** sia *destrogira*; tale cioè che un osservatore posto nella direzione di **c** e nel senso dai piedi verso la testa, abbia **a** alla sua destra e **b** alla sua sinistra (sia cioè situato come il pollice della mano sinistra rispetto all'indice ed al medio); infine sia

$$\mathrm{mod}\,\mathbf{c} = \mathrm{mod}\,\mathbf{a} \cdot \mathrm{mod}\,\mathbf{b} \cdot \mathrm{sen}\,(\mathbf{a},\ \mathbf{b}).$$

Si scrive

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$$

che si legge: **a** vettore **b**, oppure **a** esterno **b**.

Tale prodotto è nullo se i due vettori sono nulli o paralleli, e reciprocamente.

Esso non gode del principio commutativo; ed è

(4) $$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\,\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}.$$

$|a|\cdot|b|\,\mathrm{sen}(a,b) = |b|\cdot|a|\,\mathrm{sen}\,ab$

Sussiste la proprietà distributiva rispetto alla somma; cioè:

(5) $$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{u} + \ldots$$

Infatti supponiamo anzitutto eguale ad uno il mod **u**. Poniamo

$$\mathbf{a} = A - O; \quad \mathbf{b} = B - O; \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = S - O$$

e proiettiamo i punti A, B, S su di un piano condotto per O normalmente al vettore **u**, nei punti A', B', S'; poscia si facciano ruotare questi punti di un angolo retto intorno ad O; otterremo i punti A_1, B_1, S_1; e precisamente il parallelogrammo $O A_1 S_1 B_1$ risulterà eguale ad $O A' S' B'$. Inoltre se la rotazione è avvenuta in un senso opportuno, risulta

$$A_1 - O = \mathbf{a} \wedge \mathbf{u}, \qquad B_1 - O = \mathbf{b} \wedge \mathbf{u},$$
$$S_1 - O = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge \mathbf{u};$$

e poichè $S_1 - O$ è la somma di $A_1 - O$ e $B_1 - O$, così risulta dimostrato il teorema per due e quindi per un numero qualunque di vettori.

Se poi il mod **u** non è eguale ad uno, possiamo ridurci a questo caso moltiplicando **u** per l'inverso del suo modulo.

Prodotto misto di tre vettori è il prodotto scalare del terzo per il prodotto vettoriale dei primi due; cioè $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. [ab sen (ab)] [c · cos φ]

Posto

$$A - O = \mathbf{a},\ B - O = \mathbf{b},\ C - O = \mathbf{c},$$

si vede subito che il prodotto misto rappresenta il numero che misura il volume del parallelepipedo i cui spigoli sono $A - O$, $B - O$, $C - O$. Infatti, il modulo di $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ rappresenta il numero che misura l'area del parallelogrammo di lati $A - O$, $B - O$; e il numero che misura l'altezza di tale parallelepipedo è precisamente la proiezione di $C - O$ su $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Inoltre tale prodotto misto risulterà positivo o negativo secondo che la terna **a, b, c** è destrogira o no.

Se i tre vettori sono complanari (cioè paralleli ad uno stesso piano) il prodotto misto è nullo, e reciprocamente.

Risulta ancora che

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

ed anche:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \tag{6}$$

la quale esprime una proprietà di uso frequentissimo, cioè il *teorema dello scambio dei due segni* $\times$, $\wedge$ *di prodotto scalare e vettoriale*.

§ 2. Rappresentazione di un vettore mediante tre altri. Vettori fondamentali. — Siano **i**, **j**, **k** tre vettori non complanari; $\mathbf{a} = P - O$ un altro vettore qualunque. È facile mostrare che:

Un vettore qualunque è una funzione lineare omogenea di altri tre non complanari. — Infatti, se $P - O$ non è parallelo al piano di due qualunque dei tre vettori, esso può considerarsi come somma di altri tre eguali agli spigoli di un parallelepipedo, la cui diagonale è $P - O$, coi lati paralleli ai tre vettori. Ognuno di questi tre è espresso da $x\mathbf{i}$, $y\mathbf{j}$, $z\mathbf{k}$, essendo x, y, z tre numeri (positivi o negativi) ed il cui valore assoluto è eguale al rapporto dei moduli dei tre vettori ai moduli di **i**, **j**, **k**. Quindi

$$\mathbf{a} = P - O = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{7}$$

Se $P - O$ è, p. es., parallelo al piano di **i** e **j**, ripetendo analogo ragionamento si vedrà che la precedente è pur valida con $z = 0$; e se è parallelo ad uno dei vettori, p. es. **i**, sarà $y = z = 0$.

Inoltre si prova che la espressione di **a** mediante i tre vettori non può avvenire che in una sola maniera.

I tre numeri x, y, z positivi, negativi o nulli, perfettamente determinati, si dicono le *coordinate* del punto P nel sistema O (**i**, **j**, **k**); coincidono colle ordinarie cartesiane ortogonali se i tre vettori sono ortogonali, costituiscono una terna destrogira ed hanno i loro moduli eguali ad uno. In tal caso i tre vettori **i, j, k** diconsi *fondamentali*; le coordinate del punto P diconsi anche le *componenti* del vettore **a** rispetto alla terna fondamentale.

Si hanno, in queste ipotesi, le seguenti proprietà:

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{lll} \mathbf{i}^2 = 1, & \mathbf{j}^2 = 1, & \mathbf{k}^2 = 1 \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = 0, & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = 0, & \mathbf{i} \times \mathbf{j} = 0 \\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}, & \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}, & \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}. \end{array}\right.$$

Esse sono immediate conseguenze delle definizioni date.

§ 3. **Espressioni notevoli del prodotto scalare, vettoriale e misto. Doppio prodotto vettoriale.** — Seguono di qui alcune notevoli espressioni pel prodotto scalare, vettoriale e misto. Sia **a** un vettore; a_1, a_2, a_3 le sue componenti secondo la terna fondamentale; e così diciamo b_1, b_2, b_3 quelle del vettore **b**, e c_1, c_2, c_3 quelle del vettore **c**. Si ha:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k},$$

e però

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \times (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k})$$
$$= a_1 b_1 \mathbf{i} \times \mathbf{i} + \ldots + a_2 b_3 \mathbf{j} \times \mathbf{k} + \ldots$$

cioè per le (8),

$$(9)\qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

E di qui

$$(10)\qquad \mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \times \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Collo stesso procedimento risulta

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = a_1 b_1 \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} + \ldots + a_2 b_3 \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + a_3 b_2 \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} + \ldots$$
$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, \mathbf{k}$$

ed infine:

$$(11)\qquad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Si dedurrà pure, ricorrendo alla espressione di **c** mediante i tre vettori fondamentali ed applicando la (9), che

$$(12)\quad \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Tutte queste formule sono di uso frequentissimo.

Notiamo pure il seguente teorema sul *doppio prodotto vettoriale:*

$$(13)\quad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{c} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

Il primo membro esprime che il vettore risultante dal prodotto vettoriale dei due primi vettori, deve essere moltiplicato vettorialmente per il terzo; esso dicesi appunto doppio prodotto vettoriale e non gode del principio associativo.

Diciamo x, y, z le componenti secondo la solita terna fondamentale del 1° membro di (13); si trova subito, per la (11), che

$$x = c_3 (a_3 b_1 - a_1 b_3) - c_2 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

ossia:

$$x = b_1(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) - a_1(b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)$$
$$= \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot b_1 - \mathbf{c} \times \mathbf{b} \cdot a_1.$$

Due espressioni simili, cambiando b_1 ed a_1 in b_2, a_2 e in b_3, a_3, si troveranno per y e z. Moltiplicandole rispettivamente per **i, j, k** e sommando, otterremo precisamente la (13).

Risulta subito quindi che:

$$(14) \qquad \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

Il confronto con la (13) prova appunto che il doppio prodotto vettoriale non gode del principio associativo.

§ 4. **Vettori complanari. Punti e vettori funzioni di una variabile.** — I vettori **i, j, a** unitari siano complanari, e i primi due ortogonali; si dice che il secondo è dedotto dal primo

con una rotazione di un angolo retto in un senso determinato, p. es., quello orario; e si scrive

$$\mathbf{j} = i\,\mathbf{i};$$

accennando in altre parole con i un operatore che applicato ad un vettore lo fa ruotare di un angolo retto in un piano determinato e in un senso determinato. Risulta di qui che

$$i\,\mathbf{j} = i\,i\,\mathbf{i} = i^2\,\mathbf{i} = -\mathbf{i};$$

avendo posto, come al solito, $i^2 = i\,i$; quindi:

$$i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1;$$

proprietà del tutto identiche a quelle del simbolo algebrico $\sqrt{-1}$

Se diciamo φ l'angolo dei due vettori **a** ed **i**, si ha

$$\mathbf{a} = \cos\varphi \cdot \mathbf{i} + \operatorname{sen}\varphi \cdot \mathbf{j} = (\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi \cdot i)\,\mathbf{i}.$$

La espressione in parentesi è un nuovo operatore che applicato ad **i** lo fa ruotare di un angolo φ nel piano e in un senso determinato. Si suole rappresentare con $e^{i\varphi}$, essendo e la base dei logaritmi neperiani, per l'analogia con una nota formula di Euler. Quindi

$$(15) \qquad \mathbf{a} = e^{i\varphi}\,\mathbf{i}.$$

Se il vettore **a** invece di essere unitario ha ρ per modulo, si può scrivere:

$$(16) \qquad \mathbf{a} = \rho\, e^{i\varphi}\,\mathbf{i};$$

e se infine $\mathbf{a} = P - O$, si ha

$$(17) \qquad P = O + \rho\, e^{i\varphi}\, \mathbf{i}.$$

a) Facendo variare φ tra 0 e 2π, il punto P (ρ essendo costante) descrive un cerchio di centro O e di raggio ρ: la (17) *chiamasi equazione vettoriale del cerchio*; P è un punto funzione della variabile numerica φ.

b) Se x, y è un sistema d'assi qualunque, un punto di coordinate:

$$a \cos \varphi, \qquad b \operatorname{sen} \varphi$$

col variare di φ, descrive una ellissi di cui a e b sono le grandezze di due semi-diametri coniugati; se quindi $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ sono due vettori unitari paralleli a questi diametri, sarà

$$(18) \qquad P = O + a \cos \varphi \cdot \mathbf{i} + b \operatorname{sen} \varphi \cdot \mathbf{j}$$

l'*equazione vettoriale di una ellissi,* col centro in O e di cui due semi-diametri coniugati sono paralleli ad $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$. Anche qui P è funzione della variabile φ.

c) Nelle stesse ipotesi, posto

$$(19) \qquad P = O + a\, u\, \mathbf{i} + b\, u^2\, \mathbf{j}$$

(u è una variabile numerica), essendo x, y le coordinate di P nel sistema $O(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, avremo

$$x = a\, u, \qquad y = b\, u^2.$$

Il punto P descrive la parabola

$$x^2 = \frac{a^2}{b}\, y\,;$$

la tangente in O è parallela al vettore $\mathbf{i}$ e i diametri sono paralleli a $\mathbf{j}$; la (19) quindi (con P funzione di u) è l'*equazione vettoriale della parabola.*

§ 5. **Derivata di un punto e di un vettore.** — Se ad ogni valore di una variabile t, compresa tra certi limiti se occorre, corrisponde una unica posizione di un punto P o un unico valore di un vettore $\mathbf{u}$, si dirà P od $\mathbf{u}$ funzioni di t e si accennerà con $P(t)$, $\mathbf{u}(t)$.

Le coordinate di P o di $\mathbf{u}$, rispetto ad un sistema di riferimento (indipendente da t), saranno pure funzioni di t.

Si può, con tal convenzione, definire al modo solito la *derivata prima, seconda,* ecc. di un punto P o di un vettore. Se t_1 è un altro valore di t, la differenza $P(t_1) - P(t)$, che è un vettore, divisa per il numero $t_1 - t$, per t_1 convergente a t, rappresenta la derivata del punto P; si indica con P' o con $\frac{dP}{dt}$; dunque *la derivata di un punto è un vettore.*

Un vettore essendo la differenza di due punti, la derivata di un vettore è anche un vettore: dunque *le derivate di un punto o di un vettore sono vettori.*

P(t)

Dalla (7), nella ipotesi che il sistema di riferimento sia indipendente da t, risulta che:

Le derivate di un punto o di un vettore hanno per componenti le derivate delle coordinate del punto o delle componenti del vettore.

Valgono i noti teoremi sulla derivata di una somma, di un prodotto (scalare o vettoriale), ecc.

Se φ è una funzione (numerica) del punto P, e se è possibile porre

$$(20) \qquad d\varphi = \mathbf{u} \times dP,$$

in cui, come al solito, abbiamo accennato con $d\varphi$ e con dP i differenziali di φ e del punto P, si dice che il vettore $\mathbf{u}$ è il *gradiente* della funzione φ nel punto P. E si scrive

$$(21) \qquad \text{grad}\,\varphi = \mathbf{u}, \qquad d\varphi = \text{grad}\,\varphi \times dP.$$

Dalla definizione risulta assai agevolmente che l'operatore grad (che opera su numeri e produce vettori) gode di tutte le proprietà del simbolo di differenziazione; e che se le coordinate di P sono x, y, z; le componenti del gradiente sono $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$.

§ 6. **Alcune applicazioni alle curve gobbe.** Un punto P di una curva è funzione dell'arco s, contato a partire da una certa origine in un senso determinato. La derivata prima $\frac{dP}{ds}$

del punto rispetto l'arco è un vettore parallelo alla tangente alla curva in P; la derivata seconda $\frac{d^2 P}{ds^2}$ è un vettore parallelo al piano osculatore. L'elemento d'arco è poi espresso da $ds = \text{mod}\, dP$.

Poniamo:

$$(22) \qquad \mathbf{t} = \frac{dP}{ds};$$

risulta quindi che: $\mathbf{t}$ *è un vettore unità parallelo alla tangente in P, diretto nel senso degli archi crescenti.*

Poichè

$$\mathbf{t}^2 = 1$$

$t \times t = 1$

derivando risulta

$t \times \frac{dt}{ds} + t \times \frac{dt}{ds} = 0$

$$\mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0;$$

cioè i due vettori $\mathbf{t}$ e $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ sono ortogonali, supposto quest'ultimo diverso da zero. Si ponga

$$(23) \qquad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n}; \quad \frac{1}{\rho} = \mathbf{n} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds}$$

essendo ρ un numero positivo eguale all'inverso del mod di $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$; ρ dicesi *raggio di curvatura*; $\frac{1}{\rho}$ *curvatura* nel punto P.

$\mathbf{n}$ è quindi un vettore unità parallelo al piano osculatore e normale a $\mathbf{t}$; cioè parallelo alla *normale principale*. Il punto

$$P_1 = P + \rho\,\mathbf{n}$$

situato sulla normale principale è il *centro di curvatura* relativo a P; dunque il vettore $\mathbf{n}$ è diretto verso tale centro.

Se $\dfrac{d\,\mathbf{t}}{d\,s} = 0$, qualunque sia s, cioè se è nulla la curvatura, sarà $\mathbf{t}$ costante; cioè

$$\frac{d\,P}{d\,s} = \mathbf{a}\,; \quad P = P_0 + s\,\mathbf{a};$$

quindi il punto P descrive una retta condotta per P_0 parallelamente ad $\mathbf{a}$.

Poniamo

$$(24) \qquad \mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n}\,;$$

$\mathbf{b}$ è un vettore unità parallelo alla *binormale*. Dico che può porsi

2+

$$(25) \qquad \frac{d\,\mathbf{b}}{d\,s} = \frac{1}{\tau}\,\mathbf{n}\,, \quad \frac{1}{\tau} = \mathbf{n} \times \frac{d\,\mathbf{b}}{d\,s}\,;$$

τ essendo un numero che dicesi *raggio di torsione*; $\dfrac{1}{\tau}$ dicesi *torsione*. Infatti derivando rispetto ad s le $\mathbf{b} \times \mathbf{t} = 0$, $\mathbf{b}^2 = 1$, tenendo presente la (23), si deduce che $\dfrac{d\,\mathbf{b}}{d\,s}$ (supposto diverso da zero) è normale a $\mathbf{t}$ e $\mathbf{b}$ e quindi parallelo ad $\mathbf{n}$; quindi risultano le (25).

Si ha pure che:

$$(26) \qquad \frac{d\,\mathbf{n}}{d\,s} = -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{t} - \frac{1}{\tau}\,\mathbf{b};$$

+3

basta osservare che $\mathbf{n} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}$; derivare e tener presenti le (23), (25).

Le formule precedenti, che esprimono le derivate dei tre vettori $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, mediante i vettori stessi, τ, ρ, diconsi *formule di Frenet.* formule di frenet

Se $\dfrac{d\,\mathbf{b}}{d\,s} = 0$, cioè se è sempre nulla la torsione, la curva è piana; infatti da $\mathbf{b} = \text{cost.} = \mathbf{k}$, risulta pure $\dfrac{d}{ds}[(P - P_0) \times \mathbf{k}] = 0$; e quindi

$$(P - P_0) \times \mathbf{k} = 0\,;$$

cioè la curva giace nel piano condotto per P_0 normalmente al vettore $\mathbf{k}$.

Il punto P sia funzione di una variabile φ, a sua volta funzione dell'arco s; sarà

$$(27) \qquad \frac{d\,P}{d\,\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}\,\mathbf{t}\,,$$

$$\frac{d^2\,P}{d\,\varphi^2} = \frac{d^2\,s}{d\,\varphi^2}\,\mathbf{t} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\,s}{d\,\varphi}\right)^2 \mathbf{n}\,;$$

le quali esprimono che la derivata prima di P

rispetto φ è un vettore parallelo alla tangente ed ha per modulo $\frac{ds}{d\varphi}$; la derivata seconda è un vettore parallelo al piano osculatore; le sue componenti secondo $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ sono $\frac{d^2 s}{d\varphi^2}$ e $\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2$.

Se diciamo x, y, z le coordinate di P, i coseni direttori della tangente e della normale principale sono $\frac{dx}{ds}, \ldots$; $\rho \frac{d^2 x}{ds^2}, \ldots$

§ 7. **Omografie vettorali.** (*) — Occorre frequentemente considerare operatori lineari che trasformano vettori in vettori; cioè se $\mathbf{u}$ è un vettore qualunque, si considera un altro vettore le cui componenti sono certe funzioni lineari ed omogenee delle componenti di $\mathbf{u}$. Il nuovo vettore si rappresenta con $\alpha\,\mathbf{u}$; e l'operatore α dicesi una *omografia vettoriale;* esso gode evidentemente delle due proprietà

(*) La teoria, di cui qui esponiamo i rudimenti, è stata esposta da C. Burali-Forti e R. Marcolongo in: *Omografie vettoriali, con applicazione alle derivate rispetto a un punto ed alla fisica-matematica*, Torino, Petrini, 1909; e poi più diffusamente e completamente in: *Analyse vectorielle générale. I. Transformations linéaires; II. Applications à la Mécanique et à la Physique,* Pavia, Mattei, 1912-1913.

$$(28)\quad \begin{cases} \alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\,\mathbf{u} + \alpha\,\mathbf{v} \\ \alpha(m\,\mathbf{u}) = m\,\alpha\,\mathbf{u} \quad (m \text{ numero reale}). \end{cases}$$

L'omografia α trasforma vettori complanari in vettori complanari.

Infatti se $\mathbf{x}$ è complanare con $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si ha

$$\mathbf{x} = a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v}$$

e quindi

$$\alpha\,\mathbf{x} = a\,\alpha\,\mathbf{u} + b\,\alpha\,\mathbf{v};$$

cioè $\alpha\,\mathbf{x}$ è complanare con $\alpha\,\mathbf{u}$ e $\alpha\,\mathbf{v}$.

Diconsi rispettivamente primo, secondo, terzo invariante di una omografia α e si indicano con $\mathrm{I}_1\alpha$, $\mathrm{I}_2\alpha$, $\mathrm{I}_3\alpha$, i numeri seguenti:

$$\mathrm{I}_1\alpha = \frac{\alpha\,\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\times\mathbf{w} + \alpha\,\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}\times\mathbf{u} + \alpha\,\mathbf{w}\wedge\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\times\mathbf{w}},$$

$$(29)\quad \begin{cases} \mathrm{I}_2\alpha = \dfrac{\alpha\,\mathbf{u}\wedge\alpha\,\mathbf{v}\times\mathbf{w} + \ldots.}{\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\times\mathbf{w}} \\[2ex] \mathrm{I}_3\alpha = \dfrac{\alpha\,\mathbf{u}\wedge\alpha\,\mathbf{v}\times\alpha\,\mathbf{w}}{\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\times\mathbf{w}} \end{cases}$$

in cui $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sono tre vettori qualunque non complanari.

Essi sono indipendenti dai tre vettori dati; perchè se $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_1$, è un'altra terna di vettori, si ha:

$$\mathbf{u}_1 = a_1\,\mathbf{u} + b_1\,\mathbf{v} + c_1\,\mathbf{w};\ \text{ecc.}$$

e con breve calcolo si prova che

$$\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{v}_1 \times \mathbf{w}_1 = D \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{w} ;$$
$$\alpha\,\mathbf{u}_1 \wedge \alpha\,\mathbf{v}_1 \times \alpha\,\mathbf{w}_1 = D \cdot \alpha\,\mathbf{u} \wedge \alpha\,\mathbf{v} \times \alpha\,\mathbf{w}$$

essendo D il determinante (diverso da zero) delle a, b, c. Risulta quindi vera l'asserita proprietà per $I_3\,\alpha$. In modo identico si può procedere per gli altri due.

Se **u, v, w** coincide colla terna fondamentale, risulta

$$(30)\quad \begin{cases} I_1\,\alpha = \mathbf{i} \times \alpha\,\mathbf{i} + \mathbf{j} \times \alpha\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \times \alpha\,\mathbf{k} ; \\ I_2\,\alpha = \mathbf{i} \times \alpha\,\mathbf{j} \wedge \alpha\,\mathbf{k} + \dots . \\ I_3\,\alpha = \alpha\,\mathbf{i} \wedge \alpha\,\mathbf{j} \times \alpha\,\mathbf{k}. \end{cases}$$

Si trova pure subito che se α e β sono due omografie, m un numero reale:

$$(31)\quad I_1(\alpha + \beta) = I_1\,\alpha + I_1\,\beta ; \quad I_1(m\,\alpha) = m\,I_1\,\alpha$$

$$(32)\quad I_1\,m = 3\,m, \quad I_2\,m = 3\,m^2, \quad I_3\,m = m^3$$

$$(33)\quad I_3(m + \alpha) = m^3 + I_1\,\alpha \cdot m^2 + I_2\alpha \cdot m + I_3\alpha.$$

L'omografia α dicesi *degenere* se trasforma una terna di vettori non complanari in vettori complanari. Se **u, v, w** è questa terna, sarà (§ 1)

$$\alpha\,\mathbf{u} \wedge \alpha\,\mathbf{v} \times \alpha\,\mathbf{w} = 0$$

e quindi $I_3\,\alpha = 0$; allora ogni altra qualunque terna di vettori non complanari è trasformata in

vettori complanari. Dunque *α è degenere solamente quando* $I_3\,\alpha = 0$.

Se ad un vettore **x** applichiamo l'omografia α, otterremo il vettore $\alpha\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$; se al nuovo vettore applichiamo l'omografia β, otterremo il vettore $\beta\,\mathbf{y} = \mathbf{z}$; e si può scrivere

$$\mathbf{z} = \beta\,\mathbf{y} = \beta\,\alpha\,\mathbf{x}.$$

$\beta\,\alpha$ è una omografia (diversa in generale da $\alpha\,\beta$) che dicesi *prodotto* delle due omografie α e β. Ha luogo la proprietà:

$$(34)\qquad I_3(\beta\,\alpha) = I_3(\alpha\,\beta) = I_3\,\alpha \cdot I_3\,\beta.$$

Infatti se α non è degenere, posto $\mathbf{u}_1 = \alpha\,\mathbf{u}, \dots$ si ha

$$I_3(\beta\,\alpha) = \frac{(\beta\,\alpha\,\mathbf{u}) \wedge (\beta\,\alpha\,\mathbf{v}) \times (\beta\,\alpha\,\mathbf{w})}{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{w}}$$

$$= \frac{\beta\,\mathbf{u}_1 \wedge \beta\,\mathbf{v}_1 \times \beta\,\mathbf{w}_1}{\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{v}_1 \times \mathbf{w}_1} \cdot \frac{\alpha\,\mathbf{u} \wedge \alpha\,\mathbf{v} \times \alpha\,\mathbf{w}}{\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{w}},$$

la quale prova la (34). Se α è degenere, lo è anche $\beta\,\alpha$; allora la (34) è pure vera, poichè primo e secondo membro sono nulli.

§ 8. **Omografie speciali.** — Una omografia è detta *assiale*, se è della forma

$$(35)\qquad \alpha = \mathbf{u} \wedge ;$$

per modo che se **x** è un vettore arbitrario, si ha

$$\alpha\,\mathbf{x} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{x} ; \quad \mathbf{x} \times \alpha\,\mathbf{x} = 0.$$

Tale omografia trasforma ogni vettore in un vettore normale ad $\mathbf{u}$; è quindi una omografia degenere. I suoi invarianti si calcolano subito; e si trova

(36) $\quad I_1\,\alpha = 0; \quad I_2\,\alpha = \mathbf{u}^2; \quad I_3\,\alpha = 0.$

Una omografia è detta *dilatazione* se, $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ essendo due vettori arbitrari, si ha

(37) $$\mathbf{x} \times \alpha\,\mathbf{y} = \mathbf{y} \times \alpha\,\mathbf{x}.$$

È pure evidente che se α e β sono due omografie assiali oppure due dilatazioni, ed m un numero reale, $\alpha + \beta$ ed $m\,\alpha$ sono pure omografie assiali o dilatazioni; brevemente: le *omografie assiali e le dilatazioni sono dei sistemi lineari.*

Sia O un punto fisso; e consideriamo tutti i punti P tali che

(38) $$(P - O) \times \alpha\,(P - O) = \text{cost.},$$

tali punti sono situati su di una quadrica, detta *quadrica indicatrice della dilatazione* α. Ha luogo questa proprietà:

Il vettore $P - O$ è coniugato al piano diametrale normale a $\alpha\,(P - O)$ rispetto alla quadrica indicatrice.

Spostiamo infatti il punto P sul piano tangente in P alla (38) e sia $d\,P$ lo spostamento. Sarà

$$d\,P \times \alpha\,(P - O) + (P - O) \times \alpha\,(d\,P) = 0.$$

E poichè per la (37) i due prodotti sono eguali, risulta

$$d\,P \times \alpha\,(P - O) = 0$$

cioè $\alpha\,(P - O)$ è normale al piano tangente in P. Onde è vero, ecc.

La (38) ha sempre almeno una terna di assi reali; se $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ è una terna di vettori fondamentali paralleli agli assi, risulta $\alpha\,\mathbf{i}$ parallelo ad $\mathbf{i}$; e quindi

(39) $$\alpha\,\mathbf{i} = m\,\mathbf{i}, \quad \alpha\,\mathbf{j} = n\,\mathbf{j}, \quad \alpha\,\mathbf{k} = p\,\mathbf{k}$$

(m, n, p numeri reali). Le tre direzioni suddette diconsi *unite* o *principali* per la dilatazione α. Dunque:

Una dilatazione ha sempre tre direzioni unite ortogonali e reciprocamente.

Una terza omografia speciale è la *diade*; è cioè tale che applicata ad un vettore qualunque $\mathbf{x}$, produce il vettore $\mathbf{u} \times \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}$, cioè un vettore parallelo a $\mathbf{v}$; $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dati. Si rappresenta col simbolo $H\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})$; di guisa che:

(40) $$H\,(\mathbf{u}, \mathbf{v})\,\mathbf{x} = \mathbf{u} \times \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}.$$

È una omografia degenere; la somma di due diadi non è una diade; quindi *le diadi non costituiscono un sistema lineare.*

Si trova agevolmente che

(41) $$I_1\,H\,(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v};$$

basta applicare la prima delle (29) ed osservare che i primi due termini del secondo membro sono nulli.

§ 9. **Decomposizione di una omografia. Coniugata di una omografia.** — La considerazione delle due speciali omografie del precedente § è importante per il seguente teorema:

Una omografia qualunque può sempre decomporsi, e in una sola maniera, nella somma di una dilatazione e di una omografia assiale.

Cominciamo a dimostrare che data α, si può trovare almeno una dilatazione β ed un vettore $\mathbf{u}$ tali che

$$\alpha = \beta + \mathbf{u} \wedge .$$

Ammessa tale possibilità, se $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sono tre vettori non complanari, si ha ricordando la (37):

$$\mathbf{y} \times \alpha \mathbf{z} - \mathbf{z} \times \alpha \mathbf{y} = -2 \mathbf{u} \times \mathbf{y} \wedge \mathbf{z},$$

e due equazioni analoghe. Ma $\mathbf{u}$ è una funzione lineare di $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$; cioè

$$\mathbf{u} = a \mathbf{x} + b \mathbf{y} + c \mathbf{z};$$

moltiplicando scalarmente per $\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}$ risulta

$$\mathbf{u} \times \mathbf{y} \wedge \mathbf{z} = a \mathbf{x} \times \mathbf{y} \wedge \mathbf{z};$$

ma il primo membro, per le formule precedenti, è noto in funzione di α; quindi potremo determinare a e così b e c, e quindi $\mathbf{u}$. Trovato il vettore, si determina β.

Dico che tale decomposizione è possibile in un sol modo. Se infatti fosse

$$\beta + \mathbf{u} \wedge = \beta' + \mathbf{u}' \wedge ,$$

posto $\beta - \beta' = \gamma$ (dilatazione); $\mathbf{u}' - \mathbf{u} = \mathbf{v}$, qualunque sia $\mathbf{x}$ dovremmo avere

$$\gamma \mathbf{x} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{x}.$$

Ma, per la (37)

$$\mathbf{y} \times \gamma \mathbf{x} = \mathbf{x} \times \gamma \mathbf{y}$$

cioè

$$\mathbf{y} \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{y}.$$

I due prodotti misti sono eguali e di segno contrario e, poichè $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ è qualunque, si deduce $\mathbf{v} = 0$; ossia $\beta = \beta'$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$.

La dilatazione β chiamasi *dilatazione di* α e si indica con $D\alpha$; il vettore $\mathbf{u}$ chiamasi *vettore di* α e si indica con $V\alpha$; ed ha luogo la proprietà fondamentale

$$\alpha = D\alpha + V\alpha \wedge . \tag{42}$$

Se ci riferiamo alla terna fondamentale, valendoci del calcolo precedente di $\mathbf{u}$, si trova facilmente

$$2 V \alpha = \mathbf{i} \wedge \alpha \mathbf{i} + \mathbf{j} \wedge \alpha \mathbf{j} + \mathbf{k} \wedge \alpha \mathbf{k}. \tag{43}$$

Una dilatazione ha nullo il vettore, e reciprocamente.

L'omografia avente la stessa dilatazione di α, lo stesso vettore cambiato di segno, chiamasi la *coniugata* di α e si rappresenta con $\mathrm{K}\,\alpha$; sicchè

$$(44) \qquad \mathrm{K}\,\alpha = \mathrm{D}\,\alpha - \mathrm{V}\,\alpha \wedge \;.$$

Ricordando le (31) e che il primo invariante di una omografia assiale è nullo si deduce che

$$(45) \qquad \mathrm{I}_1\,\alpha = \mathrm{I}_1\,\mathrm{K}\,\alpha = \mathrm{I}_1\,\mathrm{D}\,\alpha.$$

Inoltre da (42) e (44) discende subito

$$(46) \qquad \mathbf{y} \times \alpha\,\mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathrm{K}\,\alpha\,\mathbf{y}$$

che dicesi *teorema di commutazione*.

Notiamo pure che se α è la diade $\mathrm{H}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, il suo vettore si calcola con una delle formule stabilite e cioè

$$2\,\mathrm{V}\,\alpha \times \mathbf{y} \wedge \mathbf{z} = \mathbf{z} \times \alpha\,\mathbf{y} - \mathbf{y} \times \alpha\,\mathbf{z}.$$

Ma il secondo membro vale

$$\mathbf{u}\times\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{z} - \mathbf{u}\times\mathbf{z}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{y} = (\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\times(\mathbf{y}\wedge\mathbf{z})$$

e poichè $\mathbf{y}\wedge\mathbf{z}$ è arbitrario, si deduce

$$(47) \qquad 2\,\mathrm{V}\,\mathrm{H}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}.$$

Se rispetto ad una terna fondamentale, rappresentiamo una omografia α con una sostituzione lineare (di coefficienti a_{rs}) da eseguire sulle componenti del vettore arbitrario $\mathbf{x}$ per avere

quelle di $\alpha\,\mathbf{x}$, è facile vedere che $\mathrm{K}\,\alpha$ è rappresentata dalla sostituzione trasposta; che α è una dilatazione (e coincide quindi con $\mathrm{K}\,\alpha$) se $a_{rs} = a_{sr}$ $(r \neq s)$, ed una omografia assiale se $a_{rs} = -\,a_{sr}$; che $\mathrm{I}_1\,\alpha = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, e $\mathrm{I}_3\,\alpha$ è il determinante della sostituzione; ecc.

§ 10. **Derivata di un punto e di un vettore rispetto a un punto. Altri operatori fondamentali.** — Consideriamo un numero m, un punto Q, ed un vettore $\mathbf{u}$ funzioni di un punto P; tali cioè che per ogni posizione di P corrisponde un valore unico per m e per $\mathbf{u}$ ed una posizione per Q; così, p. es., le coordinate di Q e di $\mathbf{u}$ sono funzioni di quelle di P, rispetto al solito sistema di riferimento.

Ed è noto che le coordinate di $d\,Q$, $d\,\mathbf{u}$ sono funzioni lineari ed omogenee di quelle di $d\,P$; cioè esiste, in generale, un operatore lineare α che applicato a $d\,P$ riproduce $d\,Q$ oppure $d\,\mathbf{u}$; tale operatore (omografia vettoriale) si chiama rispettivamente derivata di Q o di $\mathbf{u}$ rispetto al punto P e si accenna con la solita notazione: $\dfrac{d\,Q}{d\,P}$, $\dfrac{d\,\mathbf{u}}{d\,P}$; di guisa che, per definizione, queste derivate sono omografie vettoriali tali che:

$$(48) \qquad \frac{d\,Q}{d\,P}\,d\,P = d\,Q, \quad \frac{d\,\mathbf{u}}{d\,P}\,d\,P = d\,\mathbf{u}.$$

Lo stesso può dirsi pel numero m; l'operatore lineare $\frac{d\,m}{d\,P}$, che applicato a $d\,P$ (vettore) produce un numero non è una omografia vettoriale. Si ha, per le (20) e (21)

$$(49) \qquad \frac{d\,m}{d\,P}\,d\,P = d\,m = \operatorname{grad} m \times d\,P.$$

Di qui, potendo assumere un vettore qualunque $\mathbf{x}$ parallelo a $d\,P$, si ha:

$$(50) \qquad \frac{d\,m}{d\,P}\,\mathbf{x} = \operatorname{grad} m \times \mathbf{x}.$$

La considerazione delle derivate di vettori rispetto a un punto permette di esprimere agevolmente il gradiente del prodotto scalare di due vettori, sotto la forma:

$$(51) \qquad \operatorname{grad}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \left(\mathrm{K}\frac{d\,\mathbf{u}}{d\,P}\right)\mathbf{v} + \left(\mathrm{K}\frac{d\,\mathbf{v}}{d\,P}\right)\mathbf{u}.$$

Infatti per la definizione (20),

$$\operatorname{grad}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times d\,P = d\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$
$$= \mathbf{v} \times \frac{d\,\mathbf{u}}{d\,P}\,d\,P + \mathbf{u} \times \frac{d\,\mathbf{v}}{d\,P}\,d\,P;$$

applicando il teorema (46) di commutazione il secondo membro si scrive

$$\left(\mathrm{K}\frac{d\,\mathbf{u}}{d\,P}\,\mathbf{v}\right) \times d\,P + \left(\mathrm{K}\frac{d\,\mathbf{v}}{d\,P}\,\mathbf{u}\right) \times d\,P;$$

quindi per l'arbitrarietà di $d\,P$, risulta la (51).

Come caso particolare otteniamo

$$(52) \qquad \operatorname{grad} \mathbf{u}^2 = 2\left(\mathrm{K}\frac{d\,\mathbf{u}}{d\,P}\right)\mathbf{u}.$$

Per le derivate di punti e vettori valgono le solite proprietà formali delle derivate usuali.

Riferendosi ad un sistema cartesiano ortogonale, le due omografie precedentemente considerate possono essere rappresentate dalla trasformazione lineare i cui coefficienti sono le derivate delle coordinate di Q, o delle componenti di $\mathbf{u}$, rispetto alle coordinate di P.

Se $\mathbf{u}$ è un vettore funzione del punto P, diconsi rispettivamente *divergenza* e *rotore* di $\mathbf{u}$ nel punto P, l'invariante primo e il doppio del vettore dell'omografia $\frac{d\,\mathbf{u}}{d\,P}$; e si indicano:

$$(53) \qquad \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathrm{I}_1 \frac{d\,\mathbf{u}}{d\,P}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{u} = 2\,\mathrm{V}\frac{d\,\mathbf{u}}{d\,P}.$$

Risultano subito le formule seguenti:

$$(54) \qquad \begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{v} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \operatorname{rot} \mathbf{u} + \operatorname{rot} \mathbf{v} \end{cases}$$

$$(55) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} m\,\mathbf{u} = m \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{grad} m \times \mathbf{u} \\ \operatorname{rot} m\,\mathbf{u} = m \operatorname{rot} \mathbf{u} + \operatorname{grad} m \wedge \mathbf{u}. \end{cases}$$

Le (54) sono immediate. Per le altre, consideriamo che

$$d\,(m\,\mathbf{u}) = m\,d\,\mathbf{u} + \mathbf{u}\,d\,m$$

e quindi, per le (20) e (40),

$$\frac{d\,(m\,\mathbf{u})}{d\,P}\,d\,P = m\,\frac{d\,\mathbf{u}}{d\,P}\,d\,P + \mathrm{H}\,(\mathrm{grad}\,m,\ \mathbf{u})\,d\,P;$$

ossia

$$\frac{d\,(m\,\mathbf{u})}{d\,P} = m\,\frac{d\,\mathbf{u}}{d\,P} + \mathrm{H}\,(\mathrm{grad}\,m,\ \mathbf{u}).$$

Prendendo l'invariante primo ed il vettore dei due membri, in virtù delle (41) e (47), si deducono le (55).

Se rispetto al solito sistema di riferimento diciamo u_1, u_2, u_3 le componenti di $\mathbf{u}$; x, y, z le coordinate di P, si deduce subito che

(56) $$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

e che rot $\mathbf{u}$ ha per componenti, per la (43), le espressioni

(57) $$\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\,,\quad \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial v}\,.$$

Si può anche dimostrare che

(58) $$\mathrm{div}\,(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{u} - \mathbf{u} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{v}.$$

(59) $$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0, \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,m = 0.$$

Supponiamo finalmente che l'omografia α sia funzione del punto P; come al solito si può definire la derivata di α rispetto a P, che si accenna con $\frac{d\,\alpha}{d\,P}$, l'operatore lineare (non è una omografia vettoriale) che applicato a $d\,P$ produce $d\,\alpha$.

Se quindi $\mathbf{a}$ è un vettore costante rispetto a P, $\mathbf{x}$ un vettore qualunque, si ha

(60) $$\frac{d\,(\alpha\,\mathbf{a})}{d\,P}\,\mathbf{x} = \left(\frac{d\,\alpha}{d\,P}\,\mathbf{x}\right)\mathbf{a}\,;$$

perchè infatti essa si trasforma in una identità, assumendo $\mathbf{x}$ parallelo a $d\,P$.

Chiamasi *gradiente* di α in P, e si accenna con grad α, il vettore

(61) $$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,\alpha &= \frac{d\,\alpha\,\mathbf{i}}{d\,P}\,\mathbf{i} + \frac{d\,\alpha\,\mathbf{j}}{d\,P}\,\mathbf{j} + \frac{d\,\alpha\,\mathbf{k}}{d\,P}\,\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{d\,\alpha}{d\,P}\,\mathbf{i}\right)\mathbf{i} + \dots\end{aligned}$$

dove $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ è la terna fondamentale indipendente da P.

L'identità dei secondi membri risulta subito dalla (60); di più si prova, col metodo noto, che tale vettore è indipendente dalla terna e che se α si riduce ad un numero m, il secondo membro esprime effettivamente il grad m come era già stato definito.

È inoltre subito evidente che

$$(62)\qquad \operatorname{grad}(\alpha+\beta)=\operatorname{grad}\alpha+\operatorname{grad}\beta.$$

Di più, se $\mathbf{a}$ è un vettore costante,

$$(63)\qquad \operatorname{grad}\alpha\times\mathbf{a}=\operatorname{div}(\mathrm{K}\,\alpha\,\mathbf{a}).$$

Moltiplicando infatti scalarmente per $\mathbf{a}$ la (61), il primo membro di (63) risulta espresso come somma di tre termini analoghi a

$$\mathbf{a}\times\left(\frac{d\,\alpha}{d\,P}\,\mathbf{i}\right)\mathbf{i}=\mathbf{i}\times\mathrm{K}\left(\frac{d\,\alpha}{d\,P}\,\mathbf{i}\right)\mathbf{a}$$

$$=\mathbf{i}\times\left(\frac{d\,\mathrm{K}\,\alpha}{d\,P}\,\mathbf{i}\right)\mathbf{a}=\mathbf{i}\times\frac{d\,\mathrm{K}\,\alpha\,\mathbf{a}}{d\,P}\,\mathbf{i}$$

sempre in virtù di (60). La somma di questi tre termini esprime, (30), il primo invariante di $\dfrac{d\,\mathrm{K}\,\alpha\,\mathbf{a}}{d\,P}$; cioè, (53), la $\operatorname{div}(\mathrm{K}\,\alpha\,\mathbf{a})$.

Se α è un numero riotteniamo, per $\mathbf{u}$ costante, la prima delle (55). Se poi in luogo di $\mathbf{a}$ poniamo un vettore $\mathbf{u}$ funzione di P, ed osserviamo che

$$\frac{d(\mathrm{K}\,\alpha\,\mathbf{u})}{d\,P}=\mathrm{K}\,\alpha\frac{d\,\mathbf{u}}{d\,P}+\frac{d\,\mathrm{K}\,\alpha}{d\,P}\,\mathbf{u},$$

si deduce l'altra formula

$$(64)\ \operatorname{div}(\mathrm{K}\,\alpha\,\mathbf{u})=\mathrm{I}_1\left(\mathrm{K}\,\alpha\,\frac{d\,\mathbf{u}}{d\,P}\right)+\operatorname{grad}\alpha\times\mathbf{u}.$$

Dalla (63) si deduce agevolmente che se l'omografia α è definita dalla sostituzione lineare di coefficienti: $a_{11}, a_{12}, a_{13}; \ldots$ (linee orizzontali), grad α è un vettore le cui componenti secondo gli assi sono:

$$\frac{\partial\,a_{11}}{\partial\,x}+\frac{\partial\,a_{12}}{\partial\,y}+\frac{\partial\,a_{13}}{\partial\,z};\ \text{ecc.}$$

§ 11. **Formule integrali.** — Sia σ una superficie con piano tangente determinato e che racchiude un volume τ; $\mathbf{n}$ un vettore unità parallelo alla normale nei punti di σ e volto verso l'interno di τ; α ed $\mathbf{u}$ una omografia ed un vettore, funzioni finite dei punti P di τ e di σ e delle quali esiste il grad e la div integrabili in τ; si hanno le seguenti proprietà:

$$(65)\qquad \int\operatorname{grad}\alpha\cdot d\,\tau=-\int\alpha\,\mathbf{n}\cdot d\,\sigma$$

$$(66)\qquad \int\operatorname{div}\mathbf{u}\cdot d\,\tau=-\int\mathbf{n}\times\mathbf{u}\cdot d\,\sigma;$$

esse diconsi rispettivamente il *teorema del gradiente* e *della divergenza* e valgono come formule di trasformazione di un integrale di volume in integrale di superficie.

Il prodotto $\mathbf{n}\times\mathbf{u}\cdot d\,\sigma$ dicesi *flusso del vettore* $\mathbf{u}$ attraverso l'elemento $d\,\sigma$ di superficie; il secondo membro (a meno del segno) della (66) dicesi *flusso dello stesso vettore attraverso tutta la superficie* σ; ed il teorema espresso da (66) dicesi *teorema del flusso*. Cominciamo a dimostrare questo teorema.

Decomponiamo il volume τ in elementi di volume parallelepipedi con piani perpendicolari alla solita terna; e sarà facile accertare che il flusso del vettore $\mathbf{u}$ attraverso σ è eguale alla somma di tutti i flussi attraverso le superficie dei vari elementi parallelepipedi; calcoliamo dunque il flusso attraverso uno di questi. Considero la faccia $d\sigma_1$ normale ad $\mathbf{i}$ nel punto P; il valore del flusso è $\mathbf{u} \times \mathbf{i}\, d\sigma_1$; per la faccia opposta invece $-[\mathbf{u} \times \mathbf{i} + d(\mathbf{u} \times \mathbf{i})]\, d\sigma_1$; e la loro somma dà

$$-d(\mathbf{u} \times \mathbf{i}) \cdot d\sigma_1 = -\operatorname{grad}(\mathbf{u} \times \mathbf{i}) \times dP \cdot d\sigma_1$$

avendo accennato con dP uno spostamento parallelo ad $\mathbf{i}$. Quindi detto $d\tau$ l'elemento di volume, tale somma può scriversi

$$-\operatorname{grad}(\mathbf{u} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{i}\, d\tau = -\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i})\, d\tau,$$

in virtù della (55). Lo stesso dicasi per le altre due coppie di facce opposte. Finalmente, osservando che

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{u} \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{u} \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'$$

risulta che il flusso attraverso la superficie del parallelipipedo elementare è

$$-\operatorname{div} \mathbf{u} \cdot d\tau;$$

e quindi la (66).

Per dimostrare la (65), applichiamo la (66) al caso in cui $\mathbf{u} = \mathrm{K}\,\alpha\,\mathbf{a}$, essendo $\mathbf{a}$ un vettore costante. Il primo membro, per la (63), si trasforma in $\mathbf{a} \times \int \operatorname{grad} \alpha\, d\tau$; il secondo membro, osservando che, (46),

$$\mathbf{n} \times \mathrm{K}\,\alpha\,\mathbf{a} = \mathbf{a} \times \alpha\,\mathbf{n}$$

diventa:

$$-\mathbf{a} \times \int \alpha\,\mathbf{n}\, d\sigma.$$

Quindi, $\mathbf{a}$ essendo arbitrario, si ha la (65).

Collo stesso metodo, sostituendo ad $\mathbf{u}$ il vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{a}$ nella (66), si dimostra pure che, ricordando la (58),

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{u} \,.\, d\tau = -\int \mathbf{n} \wedge \mathbf{u} \,.\, d\sigma. \tag{67}$$

Un'altra formula utile nelle applicazioni è la seguente:

$$\int (P - O) \wedge \operatorname{grad} \alpha \cdot d\tau + 2\int \mathrm{V}\,\alpha \cdot d\tau = -\int (P - O) \wedge \alpha\,\mathbf{n} \cdot d\sigma, \tag{68}$$

essendo O un punto fisso qualunque.

La dimostrazione si fa assai semplicemente calcolando, colla (61), il

$$\operatorname{grad}\left\{(P - O) \wedge \alpha\right\} = \frac{d[(P - O) \wedge \alpha\,\mathbf{i}]}{dP}\,\mathbf{i} + \ldots\ldots$$
$$= (P - O) \wedge \operatorname{grad} \alpha - [\alpha\,\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} + \ldots\,.]$$

cioè, per la (43),

$$\text{grad}\,\{(P-O)\wedge\alpha\}=(P-O)\wedge\text{grad}\,\alpha+2\,\text{V}\,\alpha.$$

Integrando al volume τ, e trasformando il primo membro con (65), risulta (68).

Se u e v sono due funzioni finite dei punti P di τ, di cui esiste il grad e soddisfacenti inoltre alle solite condizioni di integrabilità, si hanno le formule seguenti, conosciute col nome di *primo* e *secondo lemma di Green.*

$$(69)\qquad \int(\text{grad}\,u\times\text{grad}\,v+u\,\text{div grad}\,v)\,d\tau = -\int \mathbf{n}\times\text{grad}\,v\cdot u\,d\sigma$$

$$(70)\qquad \int(u\,\text{div grad}\,v-v\,\text{div grad}\,u)\,d\tau = -\int(u\,\text{grad}\,v-v\,\text{grad}\,u)\times\mathbf{n}\,d\sigma$$

Esse si dimostrano subito partendo, (55), dalla

$$\text{div}\,(u\,\text{grad}\,v)=u\,\text{div grad}\,v+\text{grad}\,u\times\text{grad}\,v,$$

integrando al volume τ ed al primo membro applicando la (66); si ha cioè la (69); scambiando poscia u con v e sottraendo da (69) l'equazione ottenuta, si ha la (70).

Si suole porre

$$(71)\qquad \text{div grad}\,u=\Delta\,u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Dimostriamo finalmente un importante teorema, conosciuto col nome di *teorema di Stokes.*

Sia s una curva chiusa che immagineremo percorsa da un punto P in un determinato senso; σ una superficie avente s per contorno (diaframma); $\mathbf{n}$ un vettore unità parallelo alla normale nei punti P di σ e diretto in modo che un osservatore coi piedi in P, la testa in $P+\mathbf{n}$ osservi il percorso della curva s dalla sinistra verso destra; e finalmente sia $\mathbf{u}$ un vettore funzione dei punti di s e di σ di cui esista il rot. Si ha:

$$(72)\qquad \int\mathbf{u}\times dP=\int\text{rot}\,\mathbf{u}\times\mathbf{n}\cdot d\sigma.$$

L'integrale del primo membro chiamasi la *circuitazione* di $\mathbf{u}$ lungo s; quindi la (72) esprime che:

La circuitazione di un vettore lungo una curva chiusa è eguale al flusso del rotore attraverso qualunque diaframma avente la detta curva per contorno.

Teorema di Stokes

Cominciamo a provare il teorema nella ipotesi che s sia una curva piana chiusa percorsa da un punto P in senso orario e σ l'area piana da essa racchiusa. Nel punto P di s sia $\mathbf{t}$ il vettore unità parallelo alla tangente in P nel senso di s; $\mathbf{n}_1$ il vettore unità parallelo alla normale in P e diretto verso l'interno di σ; e finalmente $\mathbf{n}=\mathbf{t}\wedge\mathbf{n}_1$.

Risulterà $\mathbf{n}$, costantemente normale a σ, di grandezza, direzione e senso costante, e quindi costante; di più un osservatore coi piedi in P e la testa in $P + \mathbf{n}$ osserva il percorso di s da sinistra verso destra.

Ora è

$$\int \mathbf{u} \times d\,P = \int \mathbf{u} \times \mathbf{t}\,d\,s = -\int (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) \times \mathbf{n}_1\,d\,s$$

perchè $\mathbf{t} = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{n}_1$. Applicando il teorema della divergenza (66), e notando che

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{u}$$

per la (58), risulta vera la (72).

Sia ora s una curva qualunque, σ un diaframma avente s per contorno. Su σ tracciamo due curve uscenti dai punti di s e che intersecandosi su σ, la spezzino in quattro parti. Consideriamo i contorni di queste quattro parti; è facile vedere, notando che un lato è percorso una volta in un senso, e un'altra in senso contrario, che la circuitazione lungo s è eguale alla somma delle circuitazioni dei contorni delle quattro parti; e così può evidentemente continuarsi fino a decomporre σ in parti elementari da ritenersi come piane: e siccome per queste il teorema è stato dimostrato, così esso è vero in generale.

Una semplice e importante applicazione di questo teorema si ha in questa proprietà:

Se in un campo τ *è* $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0$, *il vettore* $\mathbf{u}$ *è il gradiente di una funzione numerica.*

Il campo τ (che supporremo a tre dimensioni) sia anzitutto semplicemente connesso (aciclico); per es., lo spazio interno ad una sfera, ad una camera, ecc. Tracciamo in esso una curva chiusa s, contorno di un qualunque diaframma σ tutto contenuto in τ; ciò non avrebbe luogo se τ non fosse semplicemente connesso (ciclico), per es., una camera con delle colonne. L'applicazione di (72) ci dà quindi che è nulla la circuitazione di $\mathbf{u}$ lungo s. Ora se sopra s partiamo da un punto P e nel senso prestabilito giungiamo in Q percorrendo l'arco s_1; poi da Q, sempre nello stesso senso, percorrendo s_2, giungiamo nuovamente in P, la somma delle due circuitazioni è nulla; ossia, cambiando il senso alla circuitazione lungo s_2, si può dire che la circuitazione lungo s_1 è la stessa che lungo s_2; cioè la circuitazione da P a Q non varia se all'arco s_1 si sostituisce s_2; è cioè indipendente dall'arco. Dunque

$$\int \mathbf{u} \times d\,P = \varphi$$

φ essendo una funzione del solo punto Q. Di qui

$$\mathbf{u} \times d\,P = d\,\varphi, \qquad \mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{u}$$

come si voleva dimostrare. φ è una funzione ad un sol valore o uniforme. Se il campo τ è ciclico, il teorema seguita a sussistere; ma φ non è più funzione uniforme.

Esercizi.

1. Dedurre le formule fondamentali della trigonometria piana e sferica dalle proprietà dei prodotti scalari e vettorali.

Se A, B, C sono i vertici di un triangolo di lati a, b, c, elevando a quadrato l'identità

$$B - C = (B - A) + (A - C)$$

si ottiene subito il teorema di Carnot.

Se gli stessi punti sono vertici di un triangolo sferico tracciato su di una sfera di centro O e raggio uno, e diciamo α, β, γ gli angoli sferici A, B, C, si ha $(B - O) \times (C - O) = \cos\alpha$, ecc...; di più $(A - O) \wedge (B - O)$ e $(A - O) \wedge (C - O)$ sono due vettori di moduli $\operatorname{sen}\gamma$ e $\operatorname{sen}\beta$ e rispettivamente normali ai piani AOB e BOC ed il cui angolo è eguale all'angolo diedro $\widehat{A}$. Poscia l'identità

$$[(A - O) \wedge (B - O)] \times [(A - O) \wedge (C - O)] = (B - O) \times (C - O) - (A - O) \times (C - O) \cdot (A - O) \times (B - O)$$

si traduce nella nota formula

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma \cos\widehat{A}.$$

2. Dimostrare che se O è un punto fisso, $\mathbf{a}$ un vettore costante ed $r = \operatorname{mod}(P - O)$, si ha

$$\operatorname{grad} r = \frac{P - O}{r},$$

$$\operatorname{grad}[\mathbf{a} \times (P - O)] = \mathbf{a}, \quad \operatorname{div}(P - O) = 3,$$

$$\operatorname{rot}(P - O) = 0; \quad \operatorname{rot}\{\mathbf{a} \wedge (P - O)\} = 2\,\mathbf{a}$$

(1) $\underline{a} \times \underline{a} = (\underline{b} + \underline{c}) \times (\underline{b} + \underline{c})$; $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos b =$

Le prime due si ottengono differenziando le funzioni

$$r^2 = (P - O)^2 \quad \text{e} \quad \mathbf{a} \times (P - O)$$

e applicando la (21). Per la terza si osservi che

$$\frac{d\,(P - O)}{d\,P} = 1, \quad I_1(1) = 3$$

e si applichi la definizione (53). Essendo poi, per la prima,

$$P - O = r \operatorname{grad} r = \frac{1}{2} \operatorname{grad} r^2$$

risulta subito la quarta, per la (59). Finalmente per l'ultima si noti che l'omografia

$$\frac{d\,\{\mathbf{a} \wedge (P - O)\}}{d\,P} = \mathbf{a} \wedge$$

è una omografia assiale il cui vettore è $\mathbf{a}$, e poi si applichi la (53).

3. Dimostrare che l'equazione vettoriale della cicloide è

$$P - O = r\varphi\,\mathbf{a} + r\,i\,\mathbf{a} - r\,i\,e^{-i\varphi}\,\mathbf{a},$$

e fare lo studio di essa.

Sia r il raggio del cerchio di centro G che rotola su di una retta fissa parallela ad un vettore unitario $\mathbf{a}$; O la posizione iniziale di P. Sarà, § 4,

$$P - G = e^{-i\varphi}(C - G); \; C - G = -r\,i\,\mathbf{a}; \; C - O = r\varphi\,\mathbf{a};$$

quindi risulta l'equazione da dimostrare.

Sappiamo, § 6, che il vettore $\mathbf{t}$ è parallelo a $\frac{dP}{d\varphi}$; e poichè

$$i\frac{dP}{d\varphi} = r\,i\,\mathbf{a} - r\,e^{-i\varphi}\,i\,\mathbf{a} = P - C$$

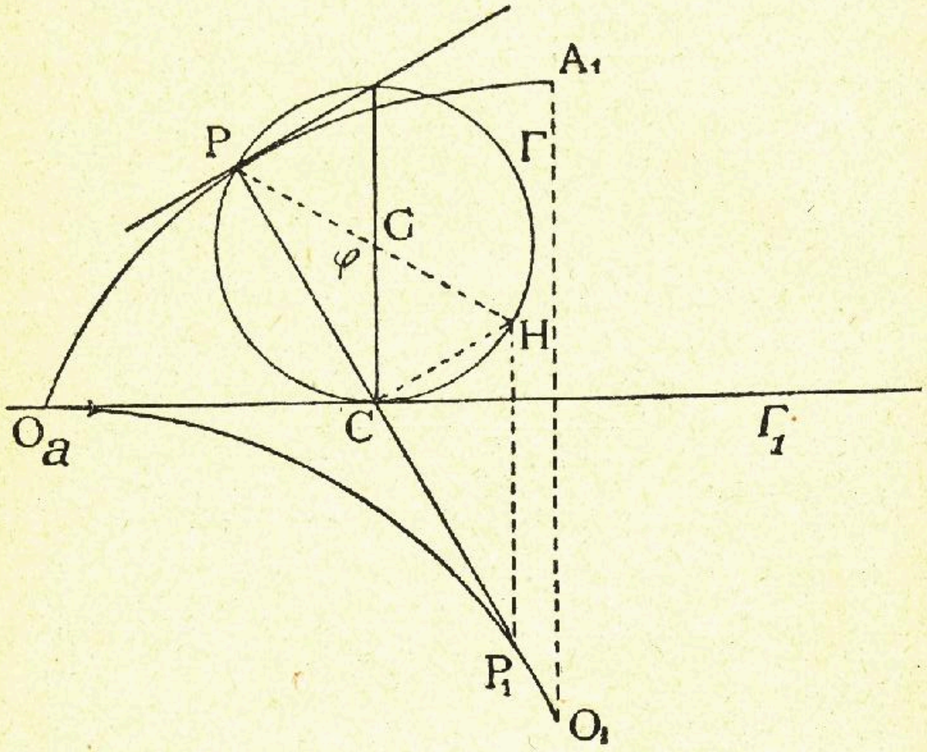

Fig. 1.

si deduce che la normale in P, essendo parallela al vettore $P - C$, passa pel punto di contatto C. Risulta pure che

$$\operatorname{mod}\frac{dP}{d\varphi} = \operatorname{mod}(P - C) = \operatorname{mod}\frac{ds}{d\varphi} = 2\,a\,\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2};$$

integrando si ha per l'arco contato a partire da O:

$$s = 4\,a\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Inoltre è

$$C - P = \frac{ds}{d\varphi}\mathbf{n};$$

$$\frac{d^2 P}{d\varphi^2} = r\,i\,e^{-i\varphi}\,\mathbf{a} = G - P = \frac{d^2 s}{d\varphi^2}\mathbf{t} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2\mathbf{n}$$

per la (27). Moltiplicando scalarmente si trova

$$\rho = 4\,a\,\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} = 2\operatorname{mod}(P - C);$$

il raggio di curvatura è doppio della normale geometrica.

Il centro di curvatura P_1 viene dato da

$$P_1 = P + 2(C - P);$$

e se poniamo:

$$O_1 = O + r\pi\,\mathbf{a} - 2\,r\,i\,\mathbf{a}, \quad \varphi - \pi = \varphi_1$$

si ha:

$$P_1 - O_1 = r\varphi_1\,\mathbf{a} + r\,i\,\mathbf{a} - r\,i\,e^{-i\varphi_1}\,\mathbf{a}$$

cioè: *l'evoluta di una cicloide è una cicloide eguale.*

4. Determinare l'equazione vettoriale della epicicloide.

Se R ed r sono i raggi dei due cerchi ed h la distanza del punto P dal centro del secondo cerchio (quello mobile), $\mathbf{a}$ un vettore unitario costante, si ha

$$P - O = (R + r)\,e^{i\varphi}\,\mathbf{a} - h\,e^{i\frac{R+r}{r}\varphi}\,\mathbf{a}.$$

Mutando r ed h in $-r$, $-h$ si ha una ipocicloide.

Collo stesso metodo del precedente esercizio si trova che la tangente è parallela al vettore $P - C$, C essendo il punto di contatto dei due cerchi.

Si può anche dimostrare che la epicicloide può essere riguardata come una ipocicloide in cui

$$R_1 = \frac{h\,R}{r}, \quad r_1 = \frac{h\,(R+r)}{r}, \quad h_1 = R + r;$$

infatti se facciamo queste sostituzioni nella

$$P_1 - O = (R_1 - r_1)\, e^{i\varphi_1}\,\mathbf{a} + h_1\, e^{-i\frac{R_1 - r_1}{r_1}\varphi_1}\,\mathbf{a}$$

e poniamo $\varphi = \frac{r\,\varphi_1}{R+r}$, risulta $P = P_1$.

5. Determinare l'equazione vettoriale dell'elica cilindrica.

Se r è il raggio del cilindro, **i** e **k** due dei vettori fondamentali, α un angolo costante, φ una variabile, si ha

$$P - O = r\,e^{i\varphi}\,\mathbf{i} + r \tan \alpha \cdot \varphi\,\mathbf{k}.$$

Coi metodi dell'esercizio 3 si trova subito

$$\rho = \frac{r}{\cos^2 \alpha}, \quad \mathbf{n} = -\frac{M - O}{r}$$

essendo M la proiezione di P sul cerchio base.

6. Dimostrare le seguenti formule relative agli invarianti di una omografia:

$$\mathrm{I}_2(\alpha + \beta) = \mathrm{I}_2\,\alpha + \mathrm{I}_2\,\beta + \mathrm{I}_1\,\alpha \cdot \mathrm{I}_1\,\beta - \mathrm{I}_1\,(\alpha\,\beta)$$
$$\mathrm{I}_1\,(\alpha\,\mathrm{D}\,\alpha) = \mathrm{I}_1\,(\mathrm{D}\,\alpha)^2.$$

La prima si deduce subito dalla seconda delle (29); per l'altra osserviamo (42) che

$$\alpha \cdot \mathrm{D}\,\alpha = (\mathrm{D}\,\alpha)^2 + \mathrm{V}\,\alpha \wedge \mathrm{D}\,\alpha;$$

poscia se ci riferiamo alla terna di direzioni unite della $\mathrm{D}\,\alpha$, e diciamo β la omografia $\mathrm{V}\,\alpha \wedge \mathrm{D}\,\alpha$, si vede subito, per essere $\mathrm{D}\,\alpha\,\mathbf{i}$ parallelo ad **i**, che $\mathbf{i} \times \beta\,\mathbf{i} = 0$; quindi (30) è $\mathrm{I}_1\,\beta = 0$; e la seconda è dimostrata.

7. Dimostrare che tra gl' invarianti e le potenze di una qualunque omografia ha luogo l' identità di Hamilton-Cayley:

$$\alpha^3 - \mathrm{I}_1\,\alpha \cdot \alpha^2 + \mathrm{I}_2\,\alpha \cdot \alpha - \mathrm{I}_3\,\alpha = 0.$$

Nelle prime due equazioni (29) mutiamo rispettivamente **w** in $\alpha^2\,\mathbf{w}$ e in $\alpha\,\mathbf{w}$; combinando poscia le tre equazioni risulta l'identità

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \{\alpha^3 - \mathrm{I}_1\,\alpha \cdot \alpha^2 + \mathrm{I}_2\,\alpha \cdot \alpha - \mathrm{I}_3\,\alpha\}\,\mathbf{w} = 0;$$

quindi per l'arbitrarietà di **u**, **v**, **w**, risulta l'equazione da dimostrare.

L'identità è utilissima: per es., si può agevolmente dimostrare che

$$\mathrm{I}_r\,\alpha = \mathrm{I}_r\,\mathrm{K}\,\alpha.$$

Basta applicare l'identità alla omografia $\mathrm{K}\,\alpha$ e poi su questa operare con α

8. Dimostrare che esiste un'omografia $\mathrm{R}\,\alpha$ tale che

$$\mathrm{R}\,\alpha\,(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = (\alpha\,\mathbf{x}) \wedge \alpha\,\mathbf{y},$$

e inoltre:

$$\mathrm{K}\,\alpha \cdot \mathrm{R}\,\alpha = \mathrm{R}\,\alpha \cdot \mathrm{K}\,\alpha = \mathrm{I}_3\,\alpha.$$

Ammessa infatti l'esistenza di tale omografia, pel teorema di commutazione (46) e per la definizione (29) risulta

$$K\alpha \cdot R\alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$$
$$= (\alpha\,\mathbf{u}) \wedge (\alpha\,\mathbf{w}) \times \alpha\,\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot I_3\,\alpha$$

e per l'arbitrarietà dei vettori **u**, **v**, **w**, risulta la prima delle relazioni date. Essa poi, valendosi della identità di Hamilton, può scriversi

$$K\alpha \cdot R\alpha = K\alpha(K\alpha^2 - I_1\alpha \cdot K\alpha + I_2\alpha);$$

quindi

$$R\alpha = K\alpha^2 - I_1\alpha \cdot K\alpha + I_2\alpha$$

la quale dimostra l'esistenza di $R\alpha$; ecc.

CAPITOLO II.

VELOCITÀ ED ACCELERAZIONE.

§ 1. **Oggetto della Cinematica.** — Dicesi *movimento* il variare delle posizioni di una parte dello spazio, rispetto ad un'altra, riguardata come fissa, col variare del tempo. La Meccanica si propone lo studio delle leggi e delle cause del moto. Quella parte poi che si occupa dello studio delle proprietà geometriche del movimento, fatta astrazione dalle cause che lo producono e dai corpi che ne sono animati, dicesi *Cinematica*. Essa si fonda sui concetti di spazio e di tempo e perciò suol definirsi come geometria del movimento o geometria a quattro dimensioni; e giova premetterne lo studio a quello della Meccanica propriamente detta. (*)

(*) L'importanza e la convenienza dello studio della cinematica (detta in passato anche *Foronomia*), da premettersi a quello della Dinamica, furono riconosciute da d'ALEMBERT, EULER [Novi Comm. Acad. Petrop., v. 20