

Dott. Ing. OTELLO MAGINI

Dottore in Matematica Pura e in Fisica Pura

Assistente di Scienza delle Costruzioni nell' Università di Pisa

ESERCIZI

di

Scienza delle Costruzioni

Volume 2°

I sistemi iperstatici



194155

**COLOMBO CORSI
EDITORE - PISA**



Dr. Gray

Dott. Ing. OTELLO MAGINI

Dottore in Matematica Pura e in Fisica Pura

Assistente di Scienza delle Costruzioni nell' Università di Pisa

E S E R C I Z I

di

Scienza delle Costruzioni

Volume 2°

I sistemi iperstatici



**COLOMBO CURSI
EDITORE - PISA**

Le copie non firmate dall' Autore sono contraffatte

Giuseppe

RIPRODUZIONE VIETATA

Nº 727

Industria Tipografica — COLOMBO CURSI — fu Giuseppe - Pisa
1950

PREFAZIONE

Questo secondo volume di “Esercizi di Scienza delle Costruzioni” che, annunciato da alcuni anni, esce ora per la prima volta, è dedicato alla risoluzione dei sistemi iperstatici e, come il primo, destinato agli Studenti di Ingegneria della Università di Pisa e agli Allievi dei Corpi Tecnici dell'Accademia Navale di Livorno.

Erano mio proposito e mio desiderio di dare, come nel primo volume, addirittura delle applicazioni numeriche.

Ma, da un lato il lungo lavoro cui obbligano già, in quasi tutti i casi, gli sviluppi formali necessari alla risoluzione; dall'altro la convinzione che, tecnicamente, più della soluzione per date dimensioni del sistema sarebbe necessario l'esame comparativo di soluzioni per dimensioni diverse — in modo da porre tangibilmente in rilievo il ruolo che ha la sovrabbondanza dei vincoli nella distribuzione del compito statico fra le varie membrature — mi hanno consigliato a limitarmi, almeno per ora, alla risoluzione formale.

D'altronde, a chi legge, è riservato già sotto questo aspetto — un pò di proposito, un pò per necessità tipografiche — un lavoro non indifferente; in quanto i problemi vengono sviluppati in dettaglio solo fino alla impostazione delle equazioni di elasticità, mentre non è riportata tutta la parte degli sviluppi del calcolo brutto; la verifica della soluzione obbliga perciò chi legge alla ripetizione di tali sviluppi, che di solito sono lunghi e laboriosi.

Per questi e per altri motivi, le manchevolezze del libro non potranno che essere numerose; mi saranno perciò utili e graditi i consigli di quanti, amici e colleghi, si compiaceranno di darmene.

Considero infatti questa edizione, più che provvisoria, addirittura come una edizione di tentativo: se sarò riuscito, in qualche modo, a conciliare almeno le più importanti esigenze di un libro del genere, mi riprometto, in successive edi-

zioni, il proporzionamento dei sistemi iperstatici a mezzo di tabelle e di nomogrammi, almeno per quei tipi che trovano largo e frequente impiego nella pratica costruttiva.

Fra gli scopi che più particolarmente mi sono prefisso in questa edizione, è soprattutto quello di illustrare isolamente e comparativamente alcuni dei metodi più importanti di risoluzione: precisamente quelli basati sul principio dei lavori virtuali, sul teorema di Castigliano, sul teorema di Menabrea e il metodo dei coefficienti di influenza.

All'inizio dei quattro capitoli in cui è corrispondentemente suddiviso il libro, è stato fatto perciò un ampio richiamo di questi metodi, nell'intento di precisarne lo spirito pratico per le applicazioni, il campo di validità, i pregi e i difetti.

Ho invece tralasciato — contrariamente a quanto si trova annunciato nella Premessa — il metodo dell'ellisse di elasticità e alcuni dei metodi speciali — come quello dei punti fissi, quello Cross, ecc. — per ragioni di mole da un lato, di ordinamento interno dei nostri Corsi universitari dall'altro, in quanto questi ultimi argomenti passano di solito dal Corso di Scienza delle Costruzioni a quello di Costruzioni in l. f. e c. a.

Per i più degli esempi trattati, mi soffermo poi a esaminare assai ampiamente la soluzione, nell'intento di abituare a *sentire* il comportamento statico ed elastico di un sistema iperstatico, in ragione dei suoi vincoli sovrabbondanti, della natura di questi e dei rapporti fra le dimensioni interne e di insieme delle sue varie membrature.

Mi è gradito esprimere ancora una volta al Ch.mo Prof. Ing. L. F. Donato la più viva gratitudine, per avermi avviato e consigliato nella compilazione di questa raccolta.

Un plauso e la mia riconoscenza alla Casa Editrice C. Cursi, per essere riuscita con tanto lodevole cura e perizia nel difficile lavoro tipografico.

L' AUTORE

Pisa, 5 Dicembre 1949.

CAP. III – Il metodo del teorema di Menabrea

CAP. IV – Il metodo dei coefficienti di influenza

[illegible]

PREMESSA

Si ricorda che un sistema vincolato è iperstatico, quando presenta un numero di condizioni semplici di vincolo, fra loro indipendenti, superiore a quello strettamente necessario a definirne la configurazione geometrica; nel piano, dunque, quando tale numero è superiore a tre, nello spazio quando è superiore a sei.

Dal punto di vista statico, il problema è corrispondentemente indeterminato, in quanto le leggi della statica del corpo rigido non sono sufficienti a fornire le reazioni dei vincoli; e ciò perchè queste leggi si traducono in un sistema di equazioni algebriche (lineari) in un numero di incognite superiore a quello delle equazioni stesse, e pertanto dotato di infinite soluzioni; le quali si ottengono una ad una assegnando valori arbitrari al gruppo di incognite prefissate come sovrabbondanti: *incognite iperstatiche*.

A determinare il problema, occorre allora che, nel complesso, le incognite siano ulteriormente legate dal numero in difetto di equazioni indipendenti.

Tali equazioni sono *equazioni di elasticità*, equazioni cioè che legano fra loro le incognite in relazioni di natura geometrica, riflettenti in qualche modo la legge secondo cui si compie la deformazione del sistema: così esprimeranno o che un certo punto subisce un determinato spostamento — in particolare nullo — in una data direzione, ovvero che una certa sezione subisce

una determinata rotazione — in particolare che rimane ferma—.

Propriamente, lo spirito generale del procedimento per scrivere tali equazioni, qualunque sia poi il metodo che si intenda adottare, è il seguente: si immagina di rimuovere i vincoli sovrabbondanti, interni o esterni che siano o dell'uno e dell'altro tipo insieme, e di sostituirli con le corrispondenti reazioni, supposte momentaneamente note: ciò che, è ovvio, non altera il regime statico-elastico iniziale.

Il sistema che così si ottiene, *sistema principale*, soggetto insieme alle forze esplicite e alle reazioni sovrabbondanti, è staticamente determinato; in esso, d'altronde, tanto le reazioni dei vincoli rimasti, quanto gli elementi della deformazione che interessano per scrivere le equazioni di elasticità, sono direttamente esprimibili in funzione delle forze note e delle reazioni iperstatiche; se, pertanto, si impone alla deformazione di tale sistema di rispettare tutte le condizioni alle quali i vincoli soppressi obbligavano quella del sistema di partenza, si vengono a scrivere tante equazioni quanti sono i vincoli soppressi in altrettante incognite, e pertanto capaci di fornire queste ultime.

Tale, nella sostanza, lo spirito del procedimento generale; i vari metodi di risoluzione si differenziano fra loro solo per il diverso modo con cui arrivano a scrivere le suddette equazioni.

* * *

Al riguardo, si hanno a disposizione metodi generali e metodi particolari, validi cioè i primi senza restrizione alcuna, sotto determinate condizioni invece i secondi.

Fra i primi si dovrebbe annoverare anzitutto il *metodo delle deformazioni*, il quale consiste nell'esaminare di seguito la deformazione delle varie parti del sistema, prese una ad una indipendentemente — e valendoci al pro-

posito dei risultati del problema di Saint-Venant e della sua estensione alle travi inflesse—, nel comporre cinematicamente i contributi che la deformazione delle varie parti ha nello spostamento di quel certo punto o nella rotazione di quella certa sezione che interessa, come se questi contributi —anzichè, com'è di fatto, prodursi contemporaneamente— si innestassero l'uno sugli altri dopo che questi si sono già compiuti; nell'imporre infine, in base al principio di sovrapposizione degli effetti, alla somma algebrica di questi contributi, la specifica condizione di rispetto dei vincoli.

Tale metodo ha indubbiamente il pregio di rendere conto nel dettaglio e anche nell'insieme, del modo di compiersi della deformazione; al proposito, anzi, consente di tener conto, volendo, oltrechè del momento flettente, anche delle altre caratteristiche della sollecitazione (taglio e forza normale); soltanto non ne è pratico l'uso, perchè rende laborioso e complicato lo sviluppo formale.

Il metodo di risoluzione generale più importante e più acuto, è invece quello basato sul *principio dei lavori virtuali*, principio che, com'è noto, non soffre casi di eccezione, restando valido sia per vincoli perfetti che per vincoli imperfetti, sia quando intervengano difetti di montaggio o di costruzione, variazioni termiche ecc, vale a dire, in breve, stati di tensione in qualche modo indipendenti dai carichi espliciti; al contrario dell'altro metodo, evita poi l'analisi geometrica della deformazione, non sempre agevole, e anzi complessa e soprattutto differenziata, come capita nei sistemi a parete piena, quando si voglia tener conto anche dello sforzo normale e del taglio; al riguardo, l'equazione dei lavori virtuali presenta invece una perfetta uniformità nei confronti di ciascuna caratteristica di sollecitazione. Di contro a questi pregi, presenta, semmai, lo svantaggio di non far risaltare in modo evidente quegli elementi della deformazione, che si traducono nelle equazioni di elasticità; d'altra

parte, nei più dei casi particolari, non rappresenta il mezzo più rapido di risoluzione.

Altro metodo generale è quello basato sulla teoria dell'*'ellisse di elasticità'*; teoria che costituisce notoriamente il mezzo più rapido ed elegante per l'indagine della deformazione.

Questo metodo ha per conseguenza il pregio di riunire in sé, in una sintesi quanto mai felice, i vantaggi dei due precedenti, giacchè da un lato non trascura la visione della deformazione — e anzi la dà nel modo più immediato e sintetico — dall'altro presenta una assoluta uniformità di procedimento, traducendosi in espressioni semplici, chiare e concise che abbracciano nella sua complessità l'aspetto geometrico della deformazione, e che non riescono complicate nemmeno quando si voglia tener conto del contributo, totale o parziale, del taglio e della forza normale.

Un metodo generale è infine quello dei *coefficienti di influenza*, il quale si basa essenzialmente sul concetto di influenza e sul principio di sovrapposizione degli effetti, portando alle equazioni di elasticità nella forma di Müller-Breslau, valide qualunque siano le condizioni di vincolo e di carico.

L'impiego di tale metodo, semplice nella sua impostazione concettuale, è però di solito lungo e laborioso e perciò non sempre consigliabile; risulta spedito solo per alcuni tipi di sistemi elastici, come ad es. per le travi continue con un numero notevole di campate, per i quali si posseggono già in tabelle gli elementi per il calcolo dei coefficienti di influenza.

* * *

Fra i metodi particolari sono specialmente importanti quelli che si fondano sui *teoremi di Castigliano e di Menabrea*, teoremi che, nella sostanza, sono dei derivati del principio dei lavori virtuali.

Il primo di questi teoremi serve, com'è ben noto, a

calcolare spostamenti di punti e rotazioni di sezioni, provocati direttamente dalle forze esterne in conseguenza della deformazione elastica.

Per la sua validità nella forma più diretta, è quindi necessario che il corpo segua la legge di Hooke e le forze esterne siano indipendenti dalla deformazione, sicchè gli spostamenti e le rotazioni in parola risultino funzioni lineari e omogenee delle forze stesse; ciò che, invece, non è più vero, quando intervengano cause diverse, come cedimenti di vincoli, variazioni termiche od altri stati di coazioni elastiche.

Con ciò non è detto che in questi casi sia senz'altro infirmata la validità del teorema: chè invece esso è comunque utilizzabile, purchè si abbiano di volta in volta opportune cautele; soltanto in questi casi è consigliabile rifarci senz'altro al principio più direttamente generale dei lavori virtuali, proprio perchè, non sopportando casi di eccezione, non lascia preoccupazioni di sorta sul modo di impiegarlo.

Pertale ragione, è consigliabile limitare l'impiego del teorema di Castigliano ai casi in cui i vincoli siano perfetti, la temperatura rimanga costante e comunque non intervengano coazioni di alcun genere, riguardandolo piuttosto come un metodo particolare.

Campo di validità rigorosamente ristretto a quello ora detto, ha il teorema di Menabrea, il quale vale appunto solo in assenza di sforzi indipendenti dai carichi espliciti, cioè, insistiamo, solo nel caso di un corpo nello stato naturale non deformato, soggetto a vincoli rigidi e in assenza di variazioni termiche.

* * *

Oltre a questi metodi generali o particolari, ma in tutti i casi applicabili a sistemi affatto generici quanto a tipo e forma — purchè soddisfacenti, beninteso, nei confronti dei secondi, alle debite condizioni — si dispone di metodi particolari, di solito approssi-

nati, destinati alla risoluzione di speciali sistemi elastici; tale è ad es. il metodo dei punti fissi, specifico per le travi continue, per i portalì, per le volte sottili; il metodo di Cross, nella forma originaria o nella forma semplificata, specifico per lo studio dei telai elastici, ecc.

* * *

Di tutti i metodi sopra elencati, ad eccezione di quello delle deformazioni, ci occuperemo separatamente in questo libro, richiamandoli anzitutto uno ad uno, un pò ampiamente, anche per quello che ne è la traduzione formale, e sviluppandoli quindi in un certo numero di esempi tipici di sistemi iperstatici, fra quelli che trovano più frequentemente impiego nella pratica costruttiva: ciò che varrà, da un lato, a far comprendere, più distintamente di quanto non possa un esame critico anche più approfondito di quello che avremo fatto precedere, i metodi stessi, dall'altro ad abilitare a *sentire* per tempo il comportamento di strutture che la pratica presenta di frequente al progettista.

Dopo un tale esame, sarà anche più agevole mettere a confronto i vari metodi, a chiarire il senso secondo cui va intesa la particolarità di qualcuno di essi e, per contro, a meglio porre in risalto il senso di generalità degli altri.

Fra questi metodi generali escludiamo volutamente quello delle deformazioni, per due ragioni; la prima perchè, in definitiva, non consiste in altro che nel combinare risultati già noti dalla teoria delle travi inflesse, sicchè l'unica novità sostanziale consisterebbe, al massimo, nel mostrare la più opportuna composizione dei vari contributi parziali; la seconda perchè, di questa stessa composizione ci occuperemo diffusamente nell'applicare la teoria dell'ellisse di elasticità, con la differenza che sarà ora diversa la via per valutare i vari elementi che si devono comporre: spostamenti di punti in determinate direzioni, rotazioni di sezioni.

D'altra parte, l'ordine che seguiremo sarà diverso da quello sopra indicato, e precisamente: ci occuperemo prima del metodo dei lavori virtuali; passeremo quindi ai due metodi particolari fondati sui teoremi di Castigliano e di Menabrea come teoremi derivati da quel principio, in modo che sia più immediato riscontrare la loro portata nei confronti di quello; al proposito, anzi, quando naturalmente sia possibile, saranno trattati medesimi esempi per le diverse vie, così da rendere bene ragione dei diversi modi di raggiungere uno stesso risultato.

Passeremo quindi ai metodi dei coefficienti d'influenza e dell'ellisse di elasticità, e faremo infine un cenno ai metodi speciali (dei punti fissi, di Cross ecc.).
