

CAPITOLO III

IL METODO DEL TEOREMA DI MENABREA

Si è già detto nella «Premessa» in quale campo è strettamente applicabile il Teorema di Menabrea; e cioè, ricordiamo, quando il corpo elastico si trova nello stato naturale non deformato e non è soggetto a cedimenti di vincoli o a stati di coazione di qualsiasi altra natura, come variazioni termiche, difetti di montaggio, di costruzione, ecc.

In particolare, dunque, per quanto riguarda i vincoli, questi debbono essere perfetti, cioè rigidi e lisci; in tutto il Cap. riterremo soddisfatta questa ipotesi, anche quando non lo diremo esplicitamente.

Il contenuto del Teorema nelle ipotesi ora dette è specificatamente rivolto alla risoluzione dei sistemi iperstatici.

Si pensi infatti un qualunque sistema n volte iperstatico, dotato di vincoli perfetti e compatibili con il suo stato naturale non deformato, esente da qualsiasi causa di coazione, soggetto a date forze esplicitate P .

Per una prefissata scelta del sistema principale, si introducano come ulteriori forze esplicitate, ma col carattere di parametri arbitrari, le n incognite iperstatiche X_k che sono state annullate con la soppressione delle n condizioni di vincolo riguardate come sovrabbondanti. La funzione potenziale Φ nel sistema principale risulta in tal modo espressa mediante le forze esplicitate P e le iperstatiche X_k ; è cioè:

$$\Phi = \Phi (P; X_k).$$

Il Teorema di Menabrea afferma allora, com'è noto,

che, nelle dette condizioni, fra tutte le infinite distribuzioni concepibili per le X_k , quella che costituisce la soluzione del problema rende minimo il valore della funzione Φ , e tale valore minimo coincide con il lavoro di deformazione Φ_1 del sistema effettivo ⁽¹⁾.

Questa condizione di minimo, come insegna l'Analisi, si traduce nella seguente $n^{\mu\alpha}$ di condizioni:

$$(a) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial X_k} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial X_n} = 0,$$

costituente un sistema di n equazioni lineari in altrettante incognite, e quindi atto in generale a determinare queste incognite.

Ai sensi del Teorema di Castigliano, le (a) esprimono anche che, nel sistema effettivo, sono nulli gli spostamenti secondo le singole X_k dei punti in cui queste sono state introdotte. Per quanto riguarda le incognite esterne, ciò è in armonia con l'ipotesi fatta di sopra sui vincoli, ipotesi che equivale appunto a dire che i punti (le sezioni) di vincolo non si spostano (non ruotano); per un'incognita interna, la generica equazione fra le (a) esprime invece che è nullo lo spostamento relativo dei due punti (la rotazione relativa delle due sezioni) che si sono resi indipendenti mediante la sconnessione che ha annullato quella incognita.

⁽¹⁾ In questo senso la funzione Φ sarebbe in sostanza da riguardare come una forma puramente analitica dei parametri indeterminati X_k , con significato fisico, nei confronti del sistema assegnato, solo nella condizione di minimo, quando cioè il suo valore fornisce il lavoro di deformazione Φ_1 del sistema; secondo tale enunciato, apparirebbe perciò impropria la denominazione di "*Teorema del minimo lavoro*" sotto cui va abitualmente il Teorema di Menabrea; la improprietà però scompare quando si pensi di prefissare volta a volta una determinata $n^{\mu\alpha}$ di valori per le X_k ; sul sistema principale, questa $n^{\mu\alpha}$ e le forze esplicitate P costituiscono infatti certamente un sistema equilibrato con le reazioni che nascono corrispondentemente nei vincoli rimasti, e la funzione Φ calcolata per tale sistema di forze-reazioni misura il lavoro di deformazione del sistema principale; in tal senso il teorema esprime allora che fra tutti i valori così concepiti del lavoro di deformazione, quello corrispondente alla particolare $n^{\mu\alpha}$ delle X_k che costituisce la soluzione del problema, e che è quindi anche il lavoro di deformazione del sistema effettivo, è il minimo.

Interpretate in tal senso, le (a) sono dunque in sostanza delle condizioni di congruenza della deformazione del sistema principale soggetto alle forze esplicitate e alle X_k , con le condizioni di vincolo esterne ed interne cui è soggetto il sistema effettivo. Il non essere verificata una di queste equazioni, dice in altri termini che il punto o la sezione del sistema principale in cui agisce la corrispondente X_k non rispetta nel suo movimento la condizione cui deve sottostare lo stesso punto nel sistema effettivo; è anzi questa circostanza che può fornirci un criterio per riconoscere che una certa n^{pua} prefissata di X_k non costituisce la soluzione del problema; è infatti sufficiente accertare che nel sistema principale caricato dalle forze esplicitate P e dalle X_k fissate, è ad es. diverso da zero lo spostamento di un punto (la rotazione di una sezione) che nel sistema effettivo è vincolato rigidamente.

* * *

Quanto si è sopra richiamato prova che il Teorema di Menabrea è atto a determinare tanto iperstatiche esterne quanto iperstatiche interne; in quest'ultimo caso, a seconda di come è fatta la scelta della incognita, si tratta soltanto, come vedremo, (cfr. ad es. l'Esercizio 42) di avere qualche accorgimento per mettere in conto nel debito modo il lavoro di deformazione.

Per la pratica applicazione delle (a), vale quanto si disse a proposito del Teorema di Castigliano (pag. 138); nel caso ad es. dei sistemi piani di travi, per i quali, ricordiamo, il lavoro di deformazione Φ_1 ha la forma (c) di pag. 137, quadratica nelle caratteristiche N, M e T della sollecitazione, la generica della (a) prende la forma:

$$(a') \quad 0 = \int_s^N \frac{\partial N}{\partial X_k} ds + \int_s^M \frac{\partial M}{\partial X_k} ds + \int_s^T \chi \frac{\partial T}{\partial X_k} ds ;$$

in base a questa si raggiunge la massima economia di lavoro esprimendo nei singoli tronchi del sistema prin-

principale caricato dalle P e dalle X_k come forze esplicite le caratteristiche N , M e T della sollecitazione; derivando quindi le leggi ottenute rispetto alle singole X_k e introducendo infine nella (a').

Per i sistemi reticolari la (a') si cambia in quest'altra.

$$(a'') \quad 0 = \sum \rho S \frac{\partial S}{\partial X_k}$$

con $\rho = l/EA$ estensibilità dell'asta generica, e vale quanto ora detto per la (a').

Del procedimento per i due tipi di strutture, viene reso pratico conto nelle applicazioni che seguono.

Esercizio 39 — Risolvere il portale di fig. 65 a), caricato sul rito da un carico uniforme q .

A parte la condizione di carico, si tratta dello stesso portale studiato all'Esercizio 9 col principio dei l.v..

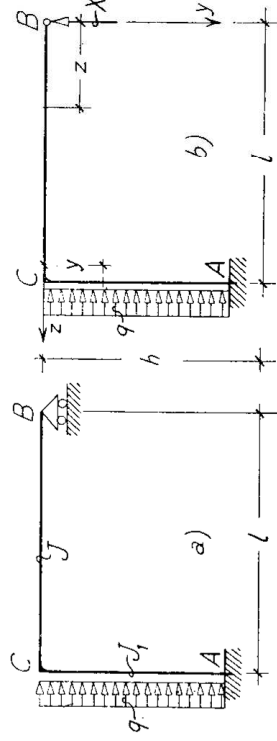


Fig. 65

Scelta come allora per incognita iperstatica X la reazione dell'appoggio semplice B (fig. 65b)), secondo il procedimento

di sopra basterà riguardare la X come

una forza esplicita, esprimere in conseguenza nei vari tronchi del portale le leggi delle caratteristiche della sollecitazione, derivare queste leggi rispetto ad X e introdurre quindi nella (a') di pagina precedente.

TABELLA I/39

TRONCO	M	$\frac{\partial M}{\partial X}$
$CA (0 \leq y \leq h)$	Xz	z
$BC (0 \leq z \leq l)$	$Xl - \frac{qy^2}{2}$	l

Tenendo conto per semplicità del solo momento flet-

tente, quanto occorre al riguardo è contenuto nella Tabella I/39, per la quale ci si è valse del riferimento $B(z, y)$ di fig. 65 b).

La (a') diviene quindi successivamente:

$$0 = \int_s^l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} ds = \int_0^l \frac{Xz^2}{EJ_1} dz + \frac{1}{EJ_2} \int_0^h \left(Xl - \frac{qy^2}{2} \right) l dy ;$$

e da questa, posto $\vartheta = J_2/J_1$, $\mu = h/l$ si deduce subito:

$$X = \frac{qh\mu^2}{2(\vartheta + 3\mu)} ,$$

che, a parte le notazioni, coincide con la quota X_g della (a) di pag. 60, alla quale si rimanda pertanto chi legge per le varie considerazioni che possono interessare.

Esercizio 40 — Risolvere il sistema chiuso simmetrico di fig. 66 a).

È lo stesso sistema studiato all'Esercizio 17. (pag. 86 e segg.) col principio dei l.v.; si riconobbe allora che, in virtù della simmetria dello schema e del carico, le sezioni diagonali A e B , libere di muoversi nella giacitura comune, si comportavano per il resto come perfettamente incastrate; e che in definitiva il sistema risultava una sola volta iperstatico, la incognita essendo il momento flettente comune nelle dette sezioni diagonali. Lo studio del sistema era così riconducibile a quello di uno dei due semiriquadri ACB e ADB , in cui si riguardassero come forze esplicite note le interazioni $P/2$

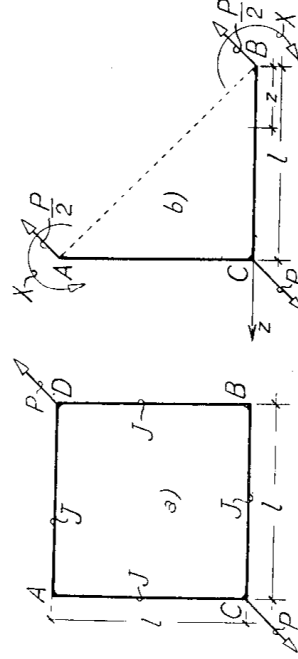


Fig. 66

che essi si trasmettevano attraverso le stesse sezioni diagonali A e B .

Consideriamo ad es. quello ACB (fig. 66b)) e pensiamo ulteriormente come un momento esplicito l'incognita iperstatica X nelle sezioni di estremità.

La legge del momento lungo il contorno del sistema, limitandoci, com'è possibile, ad es. al tronco BC , riferito all'asse $B(z)$ indicato in figura, e quella della derivata di M rispetto ad X , sono semplicemente:

$$M = \frac{P}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} z - X \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial X} = -1 \quad .$$

Sostituendo nella (d) di pag. 138, si ha pertanto subito l'equazione:

$$0 = - \int_0^l \left(\frac{P\sqrt{2}}{4} z - X \right) dz = - \frac{P\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{l^2}{2} + Xl \quad ,$$

da cui:

$$X = \frac{Pl\sqrt{2}}{8} \quad ,$$

che è la stessa trovata a pag. 89.

Esercizio 41 — Risolvere il portale di fig. 67a), nell'ipotesi che i vincoli siano perfetti. —♦—

È il sistema che abbiamo studiato all'Esercizio 20 col principio dei l.v.; riconoscemmo allora che è due volte iperstatico, in quanto, in virtù della simmetria, le componenti verticali delle reazioni dei vincoli valgono $P/2$; rimosso ad es. an-

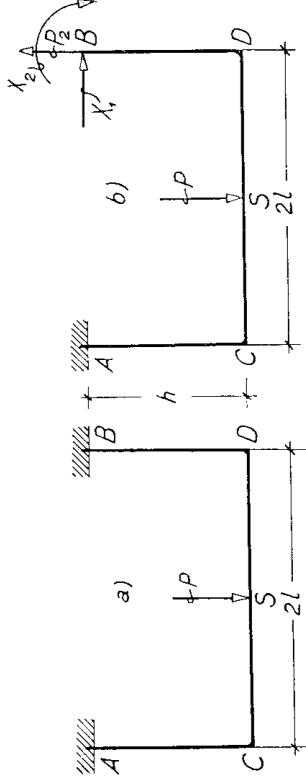


Fig. 67

cora l'incastro in B , le incognite sono dunque la componente orizzontale X_1 della reazione e il momento di incastro X_2 .

Riguardate queste due incognite come quantità esterne esplicite, nel riferimento $B(z, y)$ con asse z positivo verso sinistra e asse y verso il basso, il momento flettente lungo il mezzo riquadro e le sue derivate rispetto a X_1 e a X_2 variano come indicato nella Tabella I/41.

TABELLA I/41

TRONCO	M	$\frac{\partial M}{\partial X_1}$	$\frac{\partial M}{\partial X_2}$
$BD \ (0 \leq y \leq h)$	$X_1 y + X_2$	y	1
$DS \ (0 \leq z \leq l)$	$X_1 h + X_2 - \frac{P}{2} z$	h	1

Sostituendo separatamente nella (d) di pag. 138, le due equazioni di elasti-

cità occorrenti a determinare le due incognite sono pertanto:

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= \int_s^l \frac{M}{J} \frac{\partial M}{\partial X_1} ds = \int_0^h \frac{(X_1 y + X_2) y}{J_1} dy + \int_0^l \frac{(X_1 h + X_2 - \frac{P}{2} z) h}{J} dz \\ 0 &= \int_s^l \frac{M}{J} \frac{\partial M}{\partial X_2} ds = \int_0^h \frac{X_1 y + X_2}{J_1} dy + \int_0^l \frac{(X_1 h + X_2 - \frac{P}{2} z)}{J} dz ; \end{aligned} \right.$$

ovvero, sviluppando e posto:

$$\vartheta = J/J_1 \quad , \quad \mu = h/l \quad ,$$

anche:

$$\left\{ \begin{aligned} 4\mu l (3 + \vartheta\mu) X_1 + 6 (2 + \vartheta\mu) X_2 &= 3Pl \\ 2\mu l (2 + \vartheta\mu) X_1 + 4 (1 + \vartheta\mu) X_2 &= Pl . \end{aligned} \right.$$

Tale sistema, come si riconosce subito eliminando volta a volta una incognita, ammette la soluzione:

$$X_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{\mu (4 + \vartheta\mu)} \quad ; \quad X_2 = - \frac{Pl}{2 (4 + \vartheta\mu)} \quad ,$$

che è quella stessa trovata a pag. 101.

Esercizio 42 — Risolvere il sistema di fig. 68 a) nella ipotesi che i vincoli siano perfetti. —♦—

Si tratta dello stesso sistema risolto all'Esercizio 37 col teorema di Castigliano.

Con la stessa scelta di allora per il sistema prin-

principale (fig. 68b)), le incognite iperstatiche hanno il carattere di incognite esterne; con quella della fig. 68c), ottenuta svincolando le articolazioni in B e in E , le incognite — per quanto sostanzialmente siano, come prima, gli sforzi nel tirante e nel puntone di rinforzo della trave — hanno invece il carattere di incognite interne; nel primo caso esse operano fin dai punti di vincolo D e C sull'intero sistema, costituito dall'insieme della trave e dei due pendoli; nel secondo caso queste due ultime membrature acquistano la funzione di vincoli elastici intermediari fra il vin-

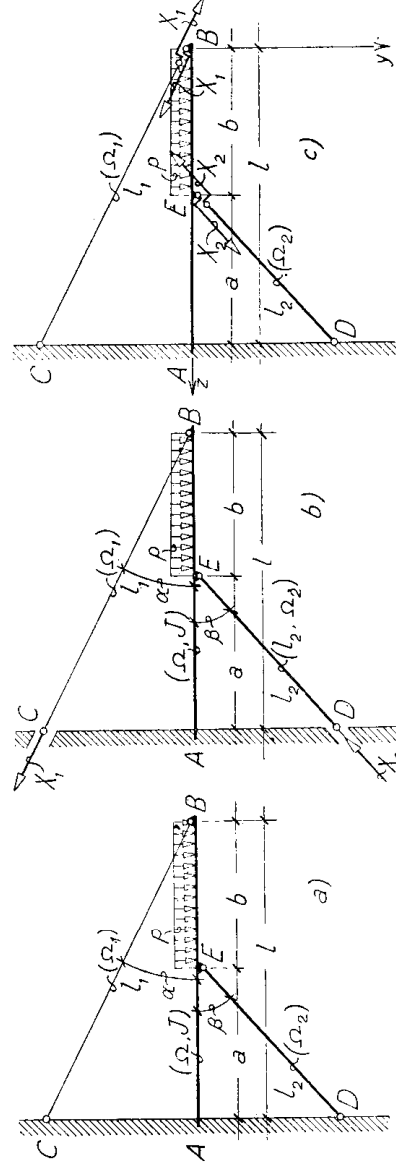


Fig. 68

colo effettivo, cioè il riferimento fisso esterno, e il sistema vero e proprio, costituito ora dalla sola trave; mentre allora nel primo caso il lavoro di deformazione del sistema è automaticamente quello globale e le equazioni di elasticità hanno il significato geometrico di cui si è già detto a pag. 139, nei confronti dei punti C e D , esprimono cioè la rigidezza dei vincoli a cui questi punti sono collegati; nel secondo caso bisogna computare come quota ulteriore additiva del lavoro di deformazione quella relativa ai due vincoli elastici, pensandoli come un *prolungamento* del sistema fino ai vincoli rigidi.

La forza normale, il momento flettente e le loro derivate rispetto ad X_1 e ad X_2 hanno comunque le leggi già indicate a pag. 168 nella Tabella I/37.

Al primo modo di scegliere il sistema principale, le due equazioni di elasticità si scrivono allora direttamente introducendo nella (a') gli elementi di detta Tabella con gli indici 1 e 2, ed è immediato ricono-

scere che sono le stesse trovate a pag. 169 col Teorema di Castigliano.

Per riconoscere come queste medesime equazioni nascano al secondo modo di scegliere il sistema principale, si avverta che, come detto, il lavoro di deformazione del sistema vero e proprio è ora quello Φ'_1 relativo alla trave; le derivate di tale lavoro rispetto ad X_1 e ad X_2 esprimono allora, ai sensi del teorema di Castigliano, gli spostamenti dei punti B ed E della trave nelle direzioni dei pendoli che rispettivamente vi fanno capo; ovvero anche, gli spostamenti relativi degli estremi C e B , D ed E dei pendoli stessi. Ora tali spostamenti devono, per la congruenza della deformazione, risultare uguali ed opposti alle variazioni di lunghezza dei pendoli; deve cioè essere:

$$(b) \quad \frac{\partial \Phi'_1}{\partial X_1} = -\frac{X_1 l_1}{E \Omega_1} \quad ; \quad \frac{\partial \Phi'_1}{\partial X_2} = -\frac{X_2 l_2}{E \Omega_2} .$$

Con gli elementi della citata Tabella I/37 relativamente ai due tronchi di trave BD e DA , queste equazioni prendono in termini espliciti la forma:

$$\int_0^b \frac{X_1 \cos^2 \alpha}{E \Omega} dz + \int_b^l \frac{(X_1 \cos \alpha - X_2 \cos \beta) \cos \alpha}{E \Omega} dz + \int_0^b \frac{(X_1 \sin \alpha \cdot z - pz^2/2) \sin \alpha \cdot z}{E J} dz + \\ + \int_b^l \frac{X_1 \sin \alpha \cdot z - pz^2/2 + X_2 \sin \beta (z-b) \sin \alpha \cdot z}{E J} dz = -\frac{X_1 l_1}{E \Omega_1} ;$$

$$\int_0^l \frac{(-X_1 \cos \alpha + X_2 \cos \beta) \cos \beta}{E \Omega} dz + \int_b^l \frac{[X_1 \sin \alpha \cdot z + X_2 \sin \beta (z-b) - pb(z-b/2)] \sin \beta (z-b)}{E J} dz = -\frac{X_1 l_1}{E \Omega_2} ;$$

basta allora operare qui il trasporto dei secondi membri nei primi, per ricadere esattamente nelle già ricordate equazioni di pag. 169.

Ora si avverta che le (b) possono scriversi:

$$\frac{\partial \Phi'_1}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{X_1^2 l_1}{2 E \Omega_1} \right) = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\Phi'_1 + \frac{X_1^2 l_1}{2 E \Omega_1} \right) = 0 ;$$

$$\frac{\partial \Phi'_1}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_2} \left(\frac{X_2^2 l_2}{2 E \Omega_2} \right) = \frac{\partial}{\partial X_2} \left(\Phi'_1 + \frac{X_2^2 l_2}{2 E \Omega_2} \right) = 0 ,$$

ovvero anche, aggiungendo nella prima parentesi il

termine $X_2^2 l_1 / 2E\Omega_2$ indipendente da X_1 , nella seconda il termine $X_1^2 l_1 / 2E\Omega_1$ indipendente da X_2 :

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left(\Phi'_1 + \frac{X_1^2 l_1}{2E\Omega_1} + \frac{X_2^2 l_2}{2E\Omega_2} \right) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} = 0 ;$$

$$\frac{\partial}{\partial X_2} \left(\Phi'_2 + \frac{X_1^2 l_1}{2E\Omega_1} + \frac{X_2^2 l_2}{2E\Omega_2} \right) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial X_2} = 0 ,$$

dove, come al solito, si è indicato con $\Phi_1 = \Phi'_1 + \frac{X_1^2 l_1}{2E\Omega_1} + \frac{X_2^2 l_2}{2E\Omega_2}$ il lavoro di deformazione dell'intero sistema.

Ciò prova, come accennavamo a pag. 175, che il Teorema di Menabrea è applicabile anche nel caso di vincoli elastici intermediari fra la struttura fondamentale e il riferimento fisso, a condizione che nel computo del lavoro di deformazione si tenga conto di quella quota che è relativa ai vincoli intermediari.

Esercizio 43 — Risolvere l'arco parabolico di corda l e freccia f di fig. 69 a), incastrato perfettamente ai due estremi, per un carico uniforme p su tutta la luce.

—•—

Per la simmetria della struttura e del carico, e quindi della deformazione, la sezione in chiave C non può nè spostarsi orizzontalmente nè ruotare; d'altronde, in tale sezione si

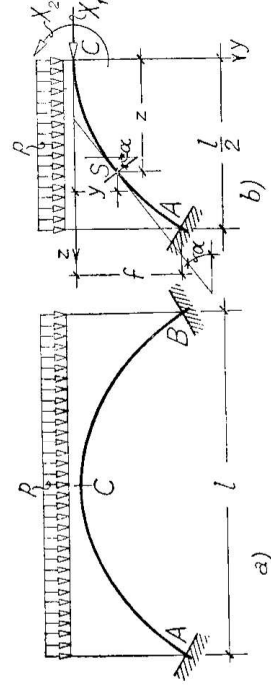


Fig. 69

hanno due sole caratteristiche della sollecitazione diverse da zero: la forza normale e il momento flettente; ciò riduce le incognite staticamente

indeterminate a due, malgrado il sistema sia tre volte iperstatico.

La scelta più conveniente per il sistema principale può essere quindi fatta tagliando l'arco in chiave,

considerando una delle due mensole che così si ottengono, ad es. la $\widehat{AC}$, e riguardandovi come esplicitate le due incognite iperstatiche X_1 e X_2 (fig. 69b)).

L'equazione dell'arco nel riferimento $O(z, y)$ avente per asse z la tangente nel vertice e per asse y l'asse della parabola, ha notoriamente la forma canonica:

$$(a) \quad y = \frac{4f}{l^2} z^2,$$

sicchè l'inclinazione nel punto corrente dell'arco risulta:

$$(b) \quad tg\alpha \equiv y' = \frac{8f}{l^2} z = az$$

avendo posto:

$$(c) \quad a = \frac{8f}{l^2}.$$

Le caratteristiche della sollecitazione nella sezione di ascissa z della mensola sono d'altronde:

$$N_x = -X_1 \cos\alpha - pz \sin\alpha; \quad M_x = X_2 + X_1 y - \frac{pz^2}{2}; \quad T_x = X_1 \sin\alpha - pz \cos\alpha.$$

Per le note espressioni di $\sin\alpha$ e di $\cos\alpha$ in funzione di $tg\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{az}{\sqrt{1+a^2z^2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2z^2}},$$

tali caratteristiche e le loro derivate rispetto a X_1 e a X_2 prendono quindi la forma della Tabella I/43.

TABELLA I/43

SEMIARCO $\widehat{AC}$ $(0 \leq z \leq \frac{l}{2})$	Caratteristiche	$\frac{\partial}{\partial X_1}$	$\frac{\partial}{\partial X_2}$
N	$-\frac{X_1}{\sqrt{1+a^2z^2}} - \frac{paz^2}{\sqrt{1+a^2z^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1+a^2z^2}}$	0
M	$X_2 + \frac{aX_1z^2}{2} - \frac{pz^2}{2}$	$+\frac{az^2}{2}$	+ 1
T	$+\frac{X_1az}{\sqrt{1+a^2z^2}} - \frac{pz}{\sqrt{1+a^2z^2}}$	$+\frac{az}{\sqrt{1+a^2z^2}}$	0

Con tali elementi, la condizione di minimo per la funzione Φ si traduce nelle due equazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} 0 = \frac{1}{EA} \int_0^{l/2} \frac{X_1 + pa z^2}{1 + a^2 z^2} dz + \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} \left(X_2 + \frac{aX_1}{2} z^2 - \frac{p z^2}{2} \right) \frac{a z^2}{2} dz + \\ + \frac{\chi}{GA} \int_0^{l/2} \frac{(X_1 a z - p z) a z}{1 + a^2 z^2} dz, \\ 0 = \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} \left(X_2 + \frac{aX_1}{2} z^2 - \frac{p z^2}{2} \right) dz, \end{cases}$$

di cui la prima può scriversi più opportunamente anche così:

$$0 = \frac{1}{EA} \left[X_1 \int_0^{l/2} \frac{1}{1 + a^2 z^2} dz + \frac{p}{a} \int_0^{l/2} \frac{a^2 z^2}{1 + a^2 z^2} dz \right] + \\ + \frac{a}{2EJ} \int_0^{l/2} \left(X_2 z^2 + \frac{aX_1}{2} z^4 - \frac{p}{2} z^4 \right) dz + \frac{\chi}{GA} \left(X_1 - \frac{p}{a} \right) \int_0^{l/2} \frac{a^2 z^2}{1 + a^2 z^2} dz.$$

Ricordando allora che la primitiva della funzione $\frac{1}{1+a^2 z^2}$ è $\frac{1}{a} \operatorname{arctg} az$, e che pertanto risulta:

$$\int_0^{l/2} \frac{1}{1 + a^2 z^2} dz = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2};$$

e, di più, successivamente:

$$\int_0^{l/2} \frac{a^2 z^2}{1 + a^2 z^2} dz = \int_0^{l/2} \frac{(1 + a^2 z^2) - 1}{1 + a^2 z^2} dz = \int_0^{l/2} \left(1 - \frac{1}{1 + a^2 z^2} \right) dz = \frac{l}{2} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2},$$

le due equazioni prendono intanto, integrando e raccogliendo, la forma:

$$(2) \quad \begin{cases} \left[\frac{1}{aEA} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} + \frac{a^2 l^3}{640 EJ} + \frac{\chi}{GA} \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} \right) \right] X_1 + \frac{al^3}{48 EJ} X_2 = \\ = p \left[\frac{al^5}{640 EJ} + \frac{1}{aA} \left(\frac{\chi}{G} - \frac{1}{E} \right) \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} \right) \right], \\ al^2 X_1 + 24 X_2 = pl^2. \end{cases}$$

Moltiplicando per EJ e posto

$$(d) \quad \varphi^2 = \frac{J}{A}, \quad \psi = \frac{\chi E}{G},$$

si perviene poi facilmente a quest'altra:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[1920 \rho^2 \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} + 3a^2 l^5 + 1920 \psi \rho^2 \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} \right) \right] X_1 + 40al^3 X_2 = \\ & = p \left[3al^5 + 1920 \rho^2 \frac{(\psi - 1)}{a} \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} \right) \right], \\ & al^3 X_1 + 24 X_2 = pl^2. \end{aligned} \right.$$

Le radici X_1 e X_2 di questo sistema costituiscono la soluzione completa del problema, quando cioè vi si tenga conto insieme del contributo di tutte e tre le caratteristiche della sollecitazione: forza normale, momento flettente e taglio.

Prescindere da quest'ultimo, equivarrebbe a fare nelle (3), in base alla seconda delle (d), $\psi = 0$, per modo che le (3) medesime si ridurrebbero a queste altre:

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[1920 \rho^2 \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} + 3a^2 l^5 \right] X_1 + 40al^3 X_2 = p \left[3al^5 - 1920 \rho^2 \frac{1}{a} \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} \right) \right] \\ & al^3 X_1 + 24 X_2 = pl^2. \end{aligned} \right.$$

Prescindere anche dalla forza normale, equivarrebbe poi a fare ulteriormente in queste $\rho = 0$, pervenendo così al sistema semplicissimo:

$$(3'') \quad \left\{ \begin{aligned} & 3al^2 X_1 + 40 X_2 = 3pl^2 \\ & al^2 X_1 + 24 X_2 = pl^2. \end{aligned} \right.$$

Eliminando da qui volta a volta una incognita e tenendo presente la (c), si ottiene immediatamente la soluzione di prima approssimazione:

$$X_2 = 0 \quad ; \quad X_1 = \frac{pl^2}{8f}.$$

Introdotti questi valori nella legge data sopra per il momento M_x lungo l'arco, risulterebbe inoltre, con riguardo alla equazione (a) della parabola:

$$M_x = \frac{pl^2}{8f} y - \frac{pz^2}{2} = \frac{pl^2}{8f} \cdot \frac{4f}{l^2} z^2 - \frac{pz^2}{2} = 0.$$

Questi risultati dicono che, trascurando la forza normale e il taglio, il momento risulta nullo in chiave ($X_2 = 0$) e lungo tutto l'arco, o, altrimenti, che la cur-

va delle pressioni risulta ovunque addossata all'asse dell'arco; e ciò, si noti, per qualunque arco parabolico.

L'evidente contraddizione sta nell'aver trascurato le due caratteristiche N e I' .

Per avere un'idea di come vadano in effetti le cose, terremo conto qui della forza normale, ricercando la soluzione del sistema (3'), che è da riguardare, per quanto detto, come di seconda approssimazione.

Posto:

$$k_1 = 1920\varphi^2 \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} + 3a^2l^3 \quad ; \quad k_2 = 40al^3 \quad ;$$

$$k_o = p \left[3al^3 - 1920\varphi^2 \frac{1}{a} \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} \right) \right] \quad ;$$

$$k'_1 = al^2 \quad ; \quad k'_2 = 24 \quad ; \quad k'_o = pl^2 \quad ,$$

tale sistema ammette notoriamente la soluzione:

$$X_1 = \frac{k_o k'_2 - k'_o k_2}{k_1 k'_2 - k_2 k'_1} \quad ; \quad X_2 = \frac{k'_o k'_1 - k_o k'_1}{k_1 k'_2 - k_2 k'_1} \quad ;$$

da cui sostituendo:

$$X_1 = \frac{24p \left[3al^3 - 1920\varphi^2 \frac{1}{a} \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} \right) \right] - 40al^3 \times pl^2}{24 \left[1920\varphi^2 \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} + 3a^2l^3 \right] - 40al^3 \times al^2} =$$

$$= \frac{p}{a} \frac{720 pl\varphi^2}{a^3l^3 + 1440\varphi^2 \operatorname{arctg} \frac{al}{2}} = \frac{pl^2}{8f} - \Delta X_1 \quad ;$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{pl^2 (1920\varphi^2 \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} + 3a^2l^3) - pa^2 \left[3al^3 - 1920\varphi^2 \frac{1}{a} \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} \right) \right]}{24 \left[1920\varphi^2 \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{al}{2} + 3a^2l^3 \right] - 40al^3 \times al^2} = \\ &= \frac{30 pa^2 \varphi^2}{a^3l^3 + 1440\varphi^2 \operatorname{arctg} \frac{al}{2}} . \end{aligned}$$

La prima dice che la spinta X_1 viene diminuita dal valore $pl^2/8f$ di prima della quota:

$$\Delta X_1 = \frac{720 pl\varphi^2}{a^3l^3 + 1440\varphi^2 \operatorname{arctg} \frac{al}{2}} \quad ,$$

quota che è pertanto da attribuire alla forza normale.

Il momento in chiave X_2 risulta poi ora diverso da zero, come diverso da zero è anche il momento nella sezione generica dell'arco.

Ciò significa che ora la curva delle pressioni non è più addossata all'asse dell'arco, ma se ne discosta alle varie sezioni per una data eccentricità.

La ragione di tale differenza di risultati va ricercata nel fatto che la forza normale, ovunque negativa, ha per effetto un accorciamento dell'asse dello arco e pertanto, ove le sezioni d'imposta lo consentissero, un accorciamento anche della corda; per la supposta rigidità degli incastri, nasce allora da parte di questi un'azione contraria ΔX_1 , diretta cioè verso l'esterno dell'arco, con tale valore da provocare sulla corda un allungamento pari all'accorciamento impedito.

Questa *spinta addizionale* comporta poi un momento non nullo lungo tutto l'arco.

Per riconoscere sinteticamente la distribuzione di tale momento, basta introdurre nelle ultime due l'espressione (c) di a ; con successive riduzioni risulta infatti subito:

$$X_1 = \frac{pl^2}{8f} - \frac{45p\phi^2 l}{32f^3 + 90l\phi^2 \arctg \frac{4f}{l}} \quad ; \quad X_2 = \frac{15p\phi^2 l}{32f^3 + 90l\phi^2 \arctg \frac{4f}{l}} = \Delta X_1 \frac{f}{3} ,$$

e queste dicono che la spinta addizionale ΔX_1 cui è dovuto il momento lungo l'arco, è da riguardarsi in definitiva come una forza parallela alla corda dell'arco con linea d'azione distante dal vertice di $f/3$.

Un contributo analogo troveremmo tenendo ulteriormente conto del taglio, vale a dire risolvendo il sistema completo (3).

Quanto precede prova che in una struttura ad arco, non è lecito prescindere dalla forza normale e dal taglio, a meno di evidenti incongruenze.

Dei due contributi prepondera poi quello di N nel caso di un arco molto ribassato e di notevole rigidità; prepondera invece quello di T nel caso contrario.

Esercizio 44 — Risolvere il sistema di fig. 70 *a*) nell'ipotesi che gli incastri siano perfetti e le mensole di braccio δ ai cui estremi agiscono i due carichi P_1 e P_2 siano rigide.

Il sistema, costituente il riquadro di un impianto per gru a ponte, è tre volte iperstatico; come scelta del sistema principale che meno allontana dalla deformazione effettiva, può essere fatta quella indicata in fig. 70 *b*), che comporta come incognite iperstatiche la spinta X_1 e i due momenti d'incastro al piede X_2 e X_3 .

Riguardando come esplicitate queste tre incognite e riducendo i carichi P_1 e P_2 agli assi dei due ritti nelle sezioni E ed F , col tener conto dei momenti di trasporto:

$$m_1 = P_1 \delta \quad ; \quad m_2 = P_2 \delta \quad ,$$

la condizione di carico completa sul sistema principale risulta quella indicata in fig. 70 *c*).

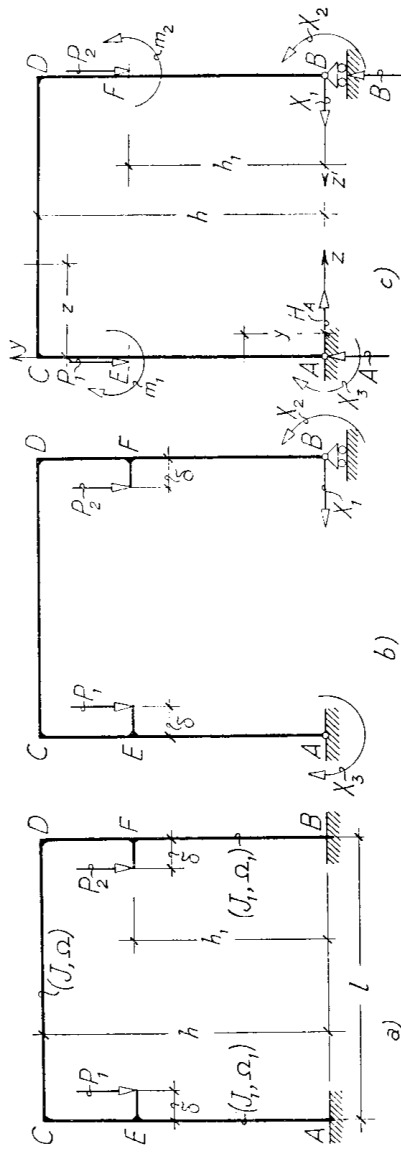


Fig. 70

Le corrispondenti reazioni A, B ed H_1 dei vincoli, come si riconosce dalla condizione di equilibrio alla rotazione intorno a B e ad A e da quella alla traslazione orizzontale, valgono:

$$A = P_1 - \frac{(m_1 - m_2) - (X_2 - X_3)}{l} \quad ; \quad B = P_2 + \frac{(m_1 - m_2) - (X_2 - X_3)}{l} \quad ; \quad H_1 = -X_1 \quad .$$

In conseguenza, le caratteristiche N ed M — si prelevano dal taglio — nei vari tronchi del contorno, e le loro derivate rispetto a X_1, X_2 e X_3 , nel riferimento $A(z, y)$ indicato in fig. 70 *c*), assumono le espressioni della Tabella I/44.

TABELLA I/44

TRONCO	N	M	$\frac{\partial N}{\partial X_1}$	$\frac{\partial N}{\partial X_2}$	$\frac{\partial N}{\partial X_3}$	$\frac{\partial M}{\partial X_1}$	$\frac{\partial M}{\partial X_2}$	$\frac{\partial M}{\partial X_3}$
$\begin{matrix} AE \\ (0 \leq y \leq h_1) \end{matrix}$	$-P_1 + \frac{(m_1 - m_2) - (X_2 - X_3)}{l}$	$X_3 - X_1 y$	0	$-\frac{1}{l}$	$+\frac{1}{l}$	-y	0	1
$\begin{matrix} EC \\ (h_1 \leq y \leq h) \end{matrix}$	$+\frac{(m_1 - m_2) - (X_2 - X_3)}{l}$	$X_3 - X_1 y + m_1$	0	$-\frac{1}{l}$	$+\frac{1}{l}$	-y	0	1
$\begin{matrix} CD \\ (0 \leq z \leq l) \end{matrix}$	$-X_1$	$m_1 - X_1 h - \frac{(m_1 - m_2)}{l} z +$ $+\frac{X_2 z}{l} + X_3 \left(1 - \frac{z}{l}\right)$	-1	0	0	-h	$\frac{z}{l}$	$\left(1 - \frac{z}{l}\right)$
$\begin{matrix} BF \\ (0 \leq y \leq h_1) \end{matrix}$	$-P_2 - \frac{(m_1 - m_2) - (X_2 - X_3)}{l}$	$X_2 - X_1 y$	0	$+\frac{1}{l}$	$-\frac{1}{l}$	-y	1	0
$\begin{matrix} FD \\ (h_1 \leq y \leq h) \end{matrix}$	$-\frac{(m_1 - m_2) - (X_2 - X_3)}{l}$	$X_2 - X_1 y + m_2$	0	$+\frac{1}{l}$	$-\frac{1}{l}$	-y	1	0

Per riconoscere la legge data per M nel tronco AC, basta riferirci alle forze alla sinistra:

$$M_2 = X_3 - X_1 h + m_1 + (A - P_1)z,$$

e introdurvi l'espressione data sopra per A.

Con gli elementi della Tabella, la condizione di minimo per la funzione Φ , cioè insieme:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_1} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial X_3} = 0,$$

tenendo conto corrispondentemente della (a') di pag. 175, si traduce nelle tre equazioni:

$$0 = \frac{1}{\Omega} \int_0^l X_1 dz + \frac{1}{J_1} \left[\int_0^{h_1} (X_3 - 2X_1 y + X_2) (-y) dy + \int_{h_1}^h (X_3 - 2X_1 y + X_2 + m_1 + m_2) (-y) dy \right] +$$

$$+ \frac{1}{J} \int_0^l \left[m_1 - X_1 h - \frac{(m_1 - m_2)}{l} z + \frac{X_2}{l} z + X_3 \left(1 - \frac{z}{l}\right) \right] (-h) dz ;$$

$$0 = \frac{1}{\Omega_1} \left\{ \int_0^{h_1} (-P_1 + 2 \frac{(m_1 - m_2) - (X_2 - X_3)}{l} + P_2) \left(-\frac{1}{l}\right) dy + \int_{h_1}^h \left[2 \frac{(m_1 - m_2) - (X_2 - X_3)}{l} \right] \left(-\frac{1}{l}\right) dy \right\} +$$

$$+ \frac{1}{J_1} \left\{ \int_0^{h_1} (X_2 - X_1 y) dy + \int_{h_1}^h (X_2 - X_1 y + m_2) dy \right\} +$$

$$+ \frac{1}{J} \int_0^l \left[m_1 - X_1 h - \frac{m_1 - m_2}{l} z + \frac{X_2}{l} z + X_3 \left(1 - \frac{z}{l}\right) \right] \frac{z}{l} dz ;$$

$$0 = \frac{1}{\Omega_1} \left\{ \int_0^{h_1} \left(-P_1 + 2 \frac{(m_1 - m_2)(X_2 - X_3)}{l} + P_2 \right) \frac{1}{l} dy + \int_0^{h_1} \left[2 \frac{(m_1 - m_2)(X_2 - X_3)}{l} \right] \frac{1}{l} dy \right\} +$$

$$+ \frac{1}{J_1} \left\{ \int_0^{h_1} (X_3 - X_1 y) dy + \int_0^{h_1} (X_3 - X_1 y + m_1) dy \right\} +$$

$$+ \frac{1}{J} \int_0^l \left[m_1 - X_1 h - \frac{m_1 - m_2}{l} z + \frac{X_2}{l} z + X_3 \left(1 - \frac{z}{l} \right) \right] \left(1 - \frac{z}{l} \right) dz .$$

Integrando, moltiplicando per J e fatte le posizioni:

$$\vartheta = J/J_1 \quad ; \quad \varrho^2 = J/\Omega \quad ; \quad \varrho^{*2} = J/\Omega_1 \quad ; \quad \nu = h_1/h \quad ; \quad \Delta = h - h_1 ,$$

e queste altre:

$$Q = P_1 + P_2 \quad ; \quad \Delta P = P_1 - P_2 ,$$

sicchè è anche:

$$m_1 + m_2 = Q \delta \quad ; \quad m_1 - m_2 = \Delta P \delta ,$$

è facile riconoscere per tali equazioni la forma esplicita:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2[3l\varrho^2 + 2\vartheta h^3 + 3lh^2]X_1 - 3h(l + \vartheta h)(X_2 + X_3) = 3Qh\delta[l + \vartheta h(1 - \nu^2)] ; \\ & 3h(l + \vartheta h)X_1 - \frac{2}{l^2}(l^3 + 6h\varrho^{*2} + 3\vartheta h l^2)X_2 - \frac{1}{l^2}(l^3 - 12h\varrho^{*2})X_3 = \\ & \quad = Ql\delta + P_2\delta[l + 6\vartheta h(1 - \nu)] + \Delta P \frac{6h\varrho^{*2}}{l} \left[\nu - \frac{2\delta}{l} \right] ; \\ & 3l(l + \vartheta h)X_1 - \frac{1}{l^2}(l^3 - 12h\varrho^{*2})X_2 - \frac{2}{l^2}(l^3 + 6h\varrho^{*2} + 3\vartheta h l^2)X_3 = \\ & \quad = Ql\delta + P_1\delta[l + 6\vartheta h(1 - \nu)] - \Delta P \frac{6h\varrho^{*2}}{l} \left[\nu - \frac{2\delta}{l} \right] . \end{aligned} \right.$$

Per semplificare un pò, da ora in poi, gli sviluppi formali, ci porremo nella ipotesi $\varrho = \varrho^* = 0$, ciò che, come noto, equivale a trascurare il contributo della forza normale; per altro, resterebbe però invariato il procedimento di calcolo che seguiremo di sotto.

Nella detta ipotesi il sistema (1) si riduce a quest'altro:

$$(1') \quad \left\{ \begin{aligned} & 2h(3l + 2\vartheta h)X_1 - 3(l + \vartheta h)(X_2 + X_3) = 3Q\delta[l + \vartheta h(1 - \nu^2)] \\ & 3h(l + \vartheta h)X_1 - 2(l + 3\vartheta h)X_2 - lX_3 = Ql\delta + P_2\delta[l + 6\vartheta h(1 - \nu)] \\ & 3h(l + \vartheta h)X_1 - lX_3 - 2(l + 3\vartheta h)X_3 = Ql\delta + P_1\delta[l + 6\vartheta h(1 - \nu)] . \end{aligned} \right.$$

Sommando le ultime due, si ottiene subito per la somma

dei momenti d'incastro in funzione della spinta X_1 la espressione:

$$(2) \quad X_2 + X_3 = \frac{2h(l + 3h)X_1 - Q\delta[l + 23h(1 - \nu)]}{l + 23l};$$

ma dalla prima delle stesse (1') è anche per la medesima somma:

$$(2') \quad X_2 + X_3 = \frac{2h(3l + 23h)X_1 - 3Q\delta[l + 3h(1 - \nu^2)]}{3(l + 3l)};$$

Uguagliando e risolvendo per X_1 si ottiene facilmente:

$$(3) \quad X_1 = \frac{3\delta\nu[2(l + 3h) - \nu(l + 23h)]}{2h(2l + 3h)} Q = kQ.$$

Questa ci dice che la spinta dipende unicamente dalla portata totale $Q = P_1 + P_2$ e non dai singoli valori dei carichi P_1 e P_2 , cioè dalla posizione del carrello della gru sul ponte fra i due ritti. Sostituendo ad es. nella (2), la somma $X_2 + X_3$ dei due momenti d'incastro prende ora forma esplicita; d'altra parte, se si sottrae ad es. dall'ultima delle (1') la seconda, si ha anche subito in forma esplicita la differenza $X_2 - X_3$; propriamente, si ha nei due momenti incogniti il sistema parziale:

$$\begin{cases} X_2 + X_3 = \frac{2hk(l + 3h) - \delta[l + 23h(1 - \nu)]}{l + 23h} Q; \\ X_2 - X_3 = \frac{\delta[l + 63h(1 - \nu)]}{l + 63h} \Delta P, \end{cases}$$

dal quale, per somma e differenza, si deducono in modo immediato le due incognite:

$$(4) \quad \begin{cases} X_2 = \frac{2hk(l + 3h) - \delta[l + 23h(1 - \nu)]}{2(l + 23h)} Q + \frac{\delta[l + 63h(1 - \nu)]}{2(l + 63h)} \Delta P; \\ X_3 = \frac{2hk(l + 3h) - \delta[l + 23h(1 - \nu)]}{2(l + 23h)} Q + \frac{\delta[l + 63h(1 - \nu)]}{2(l + 63h)} \Delta P. \end{cases}$$

A differenza della spinta, dunque, i due momenti al piede dipendono anche dalle singole intensità dei carichi P_1 e P_2 agli estremi delle due mensole del piano di scorrimento, in quanto dipendono dalla somma e dalla differenza di questi carichi.

tizio reagisce con due parametri noti: la componente orizzontale $(X_1 + X_2)$ e il momento:

$$(a) \quad M_E = + \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{2} - X_1 h_1 - X_2 f - \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{pl^2}{8} - X_1 h_1 - X_2 f .$$

Nel riferimento $E(z, y)$ indicato in fig. 71b), l'arco ha d'altronde l'equazione nota ⁽¹⁾:

$$(b) \quad y = \frac{4f}{l^2} z .$$

Con riferimento alle forze alla destra, nella sezione corrente dell'arco è dunque di seguito:

$$M_x = M_E + (X_1 + X_2)y - \frac{pz^2}{2} = \frac{p}{2} \left(\frac{l^2}{4} - z^2 \right) - h_1 X_1 - f X_2 + \frac{4f}{l^2} (X_1 + X_2) z^2 .$$

Nel riferimento più comodo $A(y')$, si ha poi sul ritto: $M_{y'} = -X_1 y'$.

Tenendo conto, per semplicità, della forza normale solo nella catena, si hanno dunque per M ed N lungo il contorno e per le loro derivate rispetto ad X_1 e ad X_2 le leggi raccolte nella Tabella I/45.

TABELLA I/45

TRONCO	N	M	$\frac{\partial N}{\partial X_1}$	$\frac{\partial N}{\partial X_2}$	$\frac{\partial M}{\partial X_1}$	$\frac{\partial M}{\partial X_2}$
EC $(0 \leq z \leq l/2)$	-	$\frac{p}{2} \left(\frac{l^2}{4} - z^2 \right) - h_1 X_1 - f X_2 + \frac{4f}{l^2} (X_1 + X_2) z^2$	-	-	$-h_1 + \frac{4f}{l^2} z^2$	$-f + \frac{4f}{l^2} z^2$
AC $(0 \leq y' \leq h)$	-	$-X_1 y'$	-	-	$-y'$	0
FC $(0 \leq z \leq l/2)$	$+X_2$		0	+1	0	0

Le due equazioni di elasticità del problema diventano con ciò:

$$0 = \frac{1}{J} \int_0^{l/2} \left[\frac{p}{2} \left(\frac{l^2}{4} - z^2 \right) - h_1 X_1 - f X_2 + \frac{4f}{l^2} (X_1 + X_2) z^2 \right] (-h_1 + \frac{4f}{l^2} z^2) dz + \frac{1}{J_{1,0}} \int_0^h (-X_1 y') (-y') dy'$$

$$0 = \frac{1}{\Omega} \int_0^{l/2} X_2 dz + \frac{1}{J} \int_0^{l/2} \left[\frac{p}{2} \left(\frac{l^2}{4} - z^2 \right) - h_1 X_1 - f X_2 + \frac{4f}{l^2} (X_1 + X_2) z^2 \right] \left(-f + \frac{4f}{l^2} z^2 \right) dz .$$

⁽¹⁾ Cfr. l'Esercizio 43.

Eseguendo le facili integrazioni e ricordando che è $h_1 = h + f$, tali equazioni prendono la forma esplicita:

$$(c) \quad \begin{cases} X_1 [15 \mu h^2 + 20 h f l + 8 l f^2 + 10 \frac{J}{J_1} h^3] + X_2 l f (10 h + 8 f) = \frac{p l^3}{8} (10 h - 8 f) \\ X_1 [8 l f^2 + 10 h f l] + X_2 l \left[8 f^2 + 15 \frac{J}{\Omega} \right] = p f l^3, \end{cases}$$

ovvero, con le posizioni:

$$(d) \quad \vartheta = \frac{J}{J_1} \quad ; \quad \varrho^{*2} = \frac{J}{\Omega} \quad ; \quad \mu = \frac{h}{l} \quad ; \quad \nu = \frac{f}{l} \quad ; \quad \lambda = \frac{\varrho^*}{l},$$

quest'altra più semplice:

$$(c') \quad \begin{cases} 8 [15 \mu^2 + 20 \mu \nu + 8 \nu^2 + 10 \vartheta \mu^3] X_1 + 16 \nu [5 \mu + 4 \nu] X_2 = (10 \mu - 8 \nu) p l \\ 2 \nu [5 \mu + 4 \nu] X_1 + [8 \nu^2 + 15 \lambda^2] X_2 = \nu p l. \end{cases}$$

Posto ulteriormente, per comodità di calcolo:

$$k_1 = 8 [15 \mu^2 + 20 \mu \nu + 8 \nu^2 + 10 \vartheta \mu^3] \quad ; \quad k_2 = 16 \nu [5 \mu + 4 \nu] \quad ; \quad k_o = (10 \mu - 8 \nu) p l ; \\ k_1' = 2 \nu [5 \mu + 4 \nu] \quad ; \quad k_2' = [8 \nu^2 + 15 \lambda^2] \quad ; \quad k_o' = \nu p l \quad ,$$

il sistema (c') ammette, come noto, la soluzione:

$$(e) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{k_o k_2' - k_2 k_o'}{k_1 k_2' - k_2 k_1'} = \frac{p l [(10 \mu - 8 \nu) (8 \nu^2 + 15 \lambda^2) - 16 \nu^2 (5 \mu + 4 \nu)]}{8 (8 \nu^2 + 15 \lambda^2) (15 \mu^2 + 20 \mu \nu + 8 \nu^2 + 10 \vartheta \mu^3) - 32 \nu^2 (5 \mu + 4 \nu)^2} \\ X_2 = \frac{k_o' k_1 - k_o k_1'}{k_1 k_2' - k_2 k_1'} = \frac{p l [8 \nu (15 \mu^2 + 20 \mu \nu + 8 \nu^2 + 10 \vartheta \mu^3) - 2 \nu (5 \mu + 4 \nu) (10 \mu - 8 \nu)]}{8 (8 \nu^2 + 15 \lambda^2) (15 \mu^2 + 20 \mu \nu + 8 \nu^2 + 10 \vartheta \mu^3) - 32 \nu^2 (5 \mu + 4 \nu)^2}. \end{cases}$$

A riduzioni fatte, risulta in ultima analisi:

$$(e') \quad \begin{cases} X_1 = - \frac{p l [64 \nu^3 + \lambda^2 (60 \nu - 75 \mu)]}{4 [20 \nu^2 \mu^2 + 5 \lambda^2 (45 \mu^2 + 60 \mu \nu + 24 \nu^2) + 10 \vartheta \mu^3 (8 \nu^2 + 15 \lambda^2)]} ; \\ X_2 = \frac{p l [5 \nu \mu^2 (1 + 4 \vartheta \mu) + 8 \nu^2 (5 \mu + 4 \nu)]}{2 [20 \nu^2 \mu^2 + 5 \lambda^2 (45 \mu^2 + 60 \mu \nu + 24 \nu^2) + 10 \vartheta \mu^3 (8 \nu^2 + 15 \lambda^2)]}. \end{cases}$$

Queste dicono che delle due incognite, la X_1 può risultare di segno opposto a quello previsto; e ciò in dipendenza dei valori specifici delle posizioni (d), in particolare del valore di λ .

Un caso limite è quello $\lambda=0$, cioè anche $\varrho^*=0$, che corrisponde a supporre rigida a forza normale la catena CD .

In tale ipotesi, le (e') prendono i seguenti altri valori:

$$(e'') \quad X_1 = -\frac{4\nu pl}{5\mu^2(1+4\mu\vartheta)} \quad ; \quad X_2 = \frac{pl[5\mu^2(1+4\mu\vartheta)+8\nu(5\mu+4\nu)]}{40\nu\mu^2(1+4\mu\vartheta)} \quad ,$$

e siamo appunto nelle condizioni suddette per quanto riguarda i segni.

Per alcune utili considerazioni intuitive sul comportamento del sistema in queste condizioni limiti e in condizioni intermedie, rimandiamo all'ultima parte dell'Esercizio 19.
