

Sostituendo nei primi due integrali al secondo membro della (d) di pag. 138, l'equazione di Castigliano diviene:

$$0 = \int_0^b \frac{X}{E\Omega} dy + \int_0^b \frac{\left(Xz - \frac{pz^2}{2}\right)z}{EJ_1} dz + \int_b^l \frac{[Xz - \frac{pz^2}{2} - P(z-b)]z}{EJ_1} dz + \int_0^l \frac{Xz^2}{EJ_2} dz,$$

che è sostanzialmente la stessa di pag. 77; la sua soluzione, fornita dalla (a) della stessa pagina, osservando che è $2l^3 - 3bl^2 + b^3 = a^2(3l-a)$ e posto $\vartheta = J_1/J_2$ e $\bar{p}^3 = J_1/\Omega$, può mettersi più convenientemente nella forma:

$$(a) \quad X = \frac{4a^2(3l-a)P + 3\vartheta l^3 p}{8[3h\bar{p}^2 + l^3(1+\vartheta)]} = \frac{a^2(3l-a)}{2[3h\bar{p}^2 + l^3(1+\vartheta)]} P + \frac{3\vartheta l^3}{8[3h\bar{p}^2 + l^3(1+\vartheta)]} p.$$

Per determinare ora lo spostamento verticale dello estremo della mensola AB , si deve pensare ancora la X come sdoppiata in due forze opposte, di cui una, quella diretta verso l'alto in fig. 57b), interessante soltanto la mensola inferiore, l'altra il rimanente del sistema, costituito dal pendolo e dalla mensola superiore; la freccia η_B si valuterà perciò tenendo conto della quota di lavoro di deformazione relativa alla prima parte del sistema; per la freccia η_D della mensola superiore invece, il lavoro di deformazione da considerare è soltanto quello relativo alla mensola stessa, in quanto è ovvio che se considerassimo tutta la seconda parte del sistema, troveremmo lo stesso spostamento di prima; la differenza fra le due frecce così determinate, misura poi l'allungamento del tirante BD , ovvero, anche, lo spostamento relativo dei due estremi B e D delle mensole.

È dunque, con l'avvertenza che η_B risulta di segno opposto a quello della X applicata all'estremo B :

$$(b) \quad \eta_B = - \int_0^b \frac{\left(Xz - \frac{pz^2}{2}\right)z}{EJ_1} dz - \int_b^l \frac{[Xz - \frac{pz^2}{2} - P(z-b)]z}{EJ_1} dz = \\ = \frac{1}{EJ_1} \left[\frac{pl^4}{8} + \frac{Pa^2(3l-a)}{6} - \frac{Xl^3}{3} \right].$$

Anche più semplicemente per la mensola superiore è:

$$(c) \quad \eta_D = \int_0^l \frac{Xz^2}{EJ_2} dz = \frac{Xl^3}{3EJ_2}.$$

Sostituendo nelle (b) e (c) l'espressione (a) della X , è facile verificare che la differenza $\eta_B - \eta_D$ misura l'allungamento $\Delta h = Xh/EQ$ del tirante BD .

Esercizio 32 — Tre travi uguali A_1B_1 , A_2B_2 e A_3B_3 , appoggiate agli estremi su appoggi rigidi, sono disposte parallelamente e a ugual distanza sopra uno stesso piano orizzontale (fig 58 a)).

Trasversalmente ad esse, in corrispondenza delle mezzerie, è appoggiata una quarta trave C_1C_3 , gravata al centro da un carico verticale P . Determinare in che misura questo carico si ripartisce fra le tre travi di sostegno e calcolare le inflessioni al centro delle medesime.

—♦—

Per ragioni di simmetria, le due travi di estremità A_1B_1 e A_3B_3 si comportano evidentemente allo stesso modo, vale a dire assorbono una stessa quota di P e si deformano ugualmente; in particolare presentano una stessa inflessione η_1 al centro (fig. 58 b)).

A ben riconoscere il meccanismo della deformazione, si osservi che nel caso limite in cui le dette due travi avessero rigidezza nulla a flessione, il che è quanto dire nel caso che mancassero, il carico P verrebbe sopportato integralmente dalla trave centrale A_2B_2 , e la trasversale C_1C_3 seguirebbe di moto rigido parallelamente a se stessa l'abbassamento del suo punto di mezzo C_2 ; nei confronti di questa trave, data l'identità delle tre longitudinali, avverrebbe in sostanza la stessa cosa, se essa fosse infinitamente rigida; questa volta però il carico P si equiripartirebbe fra le tre longitudinali.

La situazione effettiva è intermedia a queste due situazioni limiti. Stante la sua deformabilità, la traversa C_1C_3 entra in tensione e assorbe, trasmettendolo in parti uguali alle travi longitudinali di riva,

una quota X del carico P ; la trave centrale A_3B_3 prende poi per suo conto la quota residua $P-X$.

Il problema è dunque, in virtù della simmetria, una volta iperstatico, e come incognita può essere scelta la suddetta quota X , coll'evidente significato di azione mutua interna fra le due travi A_2B_2 e C_1C_3 in corrispondenza del loro punto di unione C_2 .

Per veder figurare esplicitamente questa iperstatica, immaginiamo distaccata la trave centrale dalla parte rimanente del sistema; tale parte risulterà al-

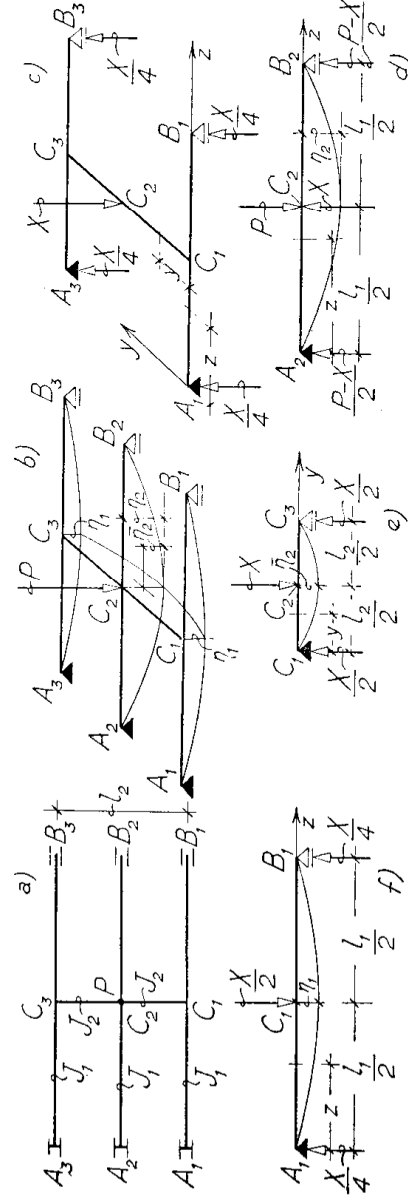


Fig. 58

lora gravata in C_2 dalla forza X (fig. 58 c)), la trave A_2B_2 invece, nello stesso punto, dalla forza $P-X$ (fig. 58 d)).

La condizione geometrica capace di determinare la X può allora essere: o quella che lo spostamento verticale di C_2 sia lo stesso tanto pensando questo punto appartenente alla prima parte del sistema (η'_2) quanto pensandolo appartenente alla seconda (η''_2); ovvero quella che sia nullo lo spostamento relativo dei due punti C_2 così distaccati, considerando il sistema nella sua intera compagine.

Il Teorema di Castigliano può essere utilizzato in ognuno dei due modi di vedere la cosa: una volta per esprimere separatamente nelle due parti del sistema lo spostamento di C_2 - e al proposito si avverta che η'_2 è fornito dalla $\frac{\partial \Phi'_1}{\partial X}$, η''_2 lo è invece dalla $\frac{\partial \Phi''_1}{\partial (P-X)}$, se si indicano con Φ'_1 e Φ''_1 le quote di lavoro di deformazione relative alle due parti ora dette-; l'altra, per espri-

mere lo spostamento relativo; al primo modo l'equazione risolvente nasce a posteriori uguagliando le due espressioni di η ; nel secondo nasce invece automaticamente annullando la derivata rispetto ad X del lavoro di deformazione $\Phi_1 = \Phi'_1 + \Phi''_1$ dell'intero sistema.

Con le notazioni di fig. 58 *c*), *d*), *e*) ed *f*) e limitandoci per simmetria alla metà del sistema, le leggi di M nei vari tronchi e quelle della sua derivata rispetto ad

X , ovvero rispetto a $(P-X)$, sono quelle, facili a riconoscersi, indicate nella Tabella I/32.

Al primo modo di vedere la cosa, estendendo gli integrali a metà del sistema, il che è quanto dire valutando ogni volta metà dello spostamento che si cerca, si ottiene rispettivamente:

TABELLA I/32

TRONCO	M	$\frac{\partial M}{\partial X}$	$\frac{\partial M}{\partial (P-X)}$
$A_1 C_1 \left(0 \leq z \leq \frac{l_1}{2}\right)$ $A_3 C_3$	$\frac{X}{4} z$	$+\frac{z}{4}$	0
$C_1 C_2 \left(0 \leq y \leq \frac{l_2}{2}\right)$	$\frac{X}{2} y$	$+\frac{y}{2}$	0
$A_2 C_2 \left(0 \leq z \leq \frac{l_1}{2}\right)$	$\frac{P-X}{2} z$	$+\frac{z}{2}$	$+\frac{z}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma'_2 &= 2 \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{M}{EJ_1} \frac{\partial M}{\partial X} dz + \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{M}{EJ_2} \frac{\partial M}{\partial X} dy = 2 \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{Xz}{4EJ_1} \cdot \frac{z}{4} dz + \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{Xy}{2EJ_2} \cdot \frac{y}{2} dy = \\ &= \frac{X}{E} \left(\frac{l_1^3}{192 J_1} + \frac{l_2^3}{96 J_2} \right); \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \gamma''_2 = \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{M}{EJ_1} \frac{\partial M}{\partial (P-X)} dz = \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{(P-X)z}{2EJ_1} \cdot \frac{z}{2} dz = \frac{(P-X)l_1^3}{96 EJ_1}.$$

Uguagliando questi due spostamenti e posto $\vartheta = J_1/J_2$, $\mu = l_2/l_1$, si deduce immediatamente la soluzione:

$$(a) \quad X = \frac{\frac{Pl_1^3}{J_1}}{\frac{3}{2} \frac{l_1^3}{J_1} + \frac{l_2^3}{J_2}} = \frac{2P}{3 + 2\vartheta\mu^3}.$$

Al secondo modo, integrando ancora per metà del sistema, è invece:

$$0 = \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{M}{EJ_1} \frac{\partial M}{\partial X} ds = 2 \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{Xz}{4EJ_1} \cdot \frac{z}{4} dz + \int_0^{\frac{l_2}{2}} \frac{Xy}{2EJ_2} \cdot \frac{y}{2} dy + \int_0^{\frac{l_1}{2}} \frac{(P-X)z}{2EJ_2} \left(-\frac{z}{2}\right) dz,$$

che è la stessa equazione che avremmo ottenuto di sopra uguagliando i due spostamenti η'_2 e η''_2 , ancora sotto forma di somma di integrali.

Lo stesso risultato, per controllo, otterremmo rapidamente anche con la teoria elementare delle travi inflesse — dalla quale si ricorda che la freccia di una trave prismatica caricata al centro ha l'espressione $f = \frac{8}{384} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}$ — quando si osservi che lo spostamento η'_2 sopra considerato è la somma della freccia η_1 comune alle travi A_1B_1 e A_3B_3 caricate al centro dalla forza $X/2$ e di quella η_2 della traversa C_1C_3 caricata al centro dalla forza X e supposta appoggiata rigidamente agli estremi, com'è di fatto allorchè si è compiuta la deformazione delle suddette travi di riva; in modo analogo η''_2 è la freccia della trave A_2B_2 caricata al centro dal carico $(P-X)$.

È dunque:

$$\eta'_2 = \eta_1 + \eta_2 = \frac{8}{384} \left[\frac{Xl_1^2}{2EJ_1} + \frac{Xl_2^3}{EJ_2} \right] ; \quad \eta''_2 = \frac{8}{384} \frac{(P-X)l_1^3}{EJ_1} .$$

Uguagliando questi due spostamenti si deduce ancora la (a).

Per valutare ora gli spostamenti effettivi η_1 e η_2 delle mezzerie delle tre travi, non c'è che da sostituire la X così determinata in una delle espressioni che per essi abbiamo dato di sopra.

Nel caso particolare che sia insieme $J_1 = J_2 = J$ ed $l_1 = l_2 = l$, sicchè $\mu = 1$, la (a) fornisce:

$$(a') \quad X = \frac{2P}{3+2} = \frac{2}{5} P .$$

In tali condizioni dunque, le due travi di riva assorbono insieme solo i due quinti del carico, cioè, anche, ognuna di esse assorbe appena un terzo di quella centrale; nello stesso rapporto stanno poi ovviamente anche le frecce η_1 ed η_2 .

Esercizio 33 — Risolvere il sistema di fig. 59 a), costituito da una trave semplice rinforzata al centro da una coppia di tiranti simmetrici, nell'ipotesi che i vincoli siano rigidi, e determinare lo spostamento verticale η_c del punto di unione C .

Per simmetria, i due tiranti CD_1 e CD_2 vengono impegnati in ugual misura e si deformano ugualmente; la risultante degli sforzi che essi sopportano è pertanto necessariamente verticale. Tale risultante, sulla cui conoscenza restano subito determinati gli sforzi nei due tiranti, può allora essere presa come incognita iperstatica X del problema, il quale si presenta così come una volta indeterminato.

Per vedere comparire tale incognita come una forza esplicita, basta rimuovere il collegamento in C fra la

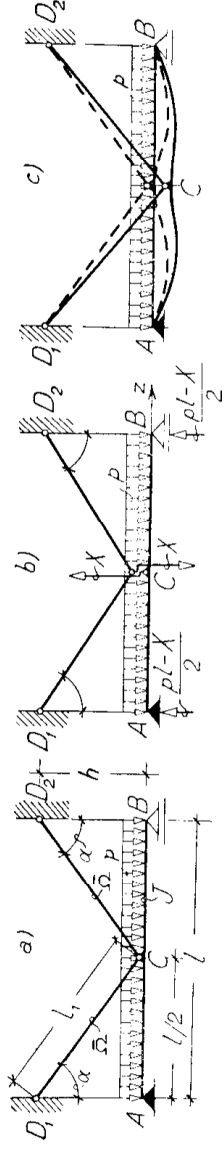


Fig. 59

trave e la bilatera a tre cerniere D_1CD_2 , ed applicare, come al solito, ai due capi dell'articolazione due forze opposte X (fig. 59 b)).

Le caratteristiche della sollecitazione sul sistema, fatta astrazione dal taglio, sono indicate nella Tabella I/33.

TABELLA I/33

TRONCO	N	M	$\frac{\partial N}{\partial X}$	$\frac{\partial M}{\partial X}$
$AC \left(0 \leq z \leq \frac{l}{2} \right)$	0	$\frac{pl-X}{2}z - \frac{pz^2}{2}$	0	$-\frac{z}{2}$
$D_1C' (0 \leq s \leq l_1)$	$\frac{X}{2\cos\alpha}$	0	$+\frac{1}{2\cos\alpha}$	0

Per scrivere l'equazione risolvente, trattandosi di indeterminazione interna, si può utilizzare indifferentemente uno dei due ragionamenti fatti all'Esercizio precedente, il primo dei quali, ricordiamo, pas-

sava attraverso lo spostamento assoluto del punto di unione C in ognuna delle due parti del sistema, vale a dire pensato come mezzeria della trave una volta, come vertice della bilatera articolata D_1CD_2 l'altra; il secondo, invece, annullava lo spostamento relativo dei due capi dell'articolazione rimossa nel sistema completo.

Giacchè a noi interessa fra l'altro di calcolare lo spostamento effettivo η_c , ci varremo qui del primo metodo; nella trave, dove lo diremo η_c' , tale spostamento, applicando il Teorema di Castigliano nella forma diretta, ha in funzione di X l'espressione:

$$(a) \quad \eta_c' = \frac{2}{EJ} \int_0^{l/2} \left[\frac{pl - X}{2} z - \frac{pz^2}{2} \right] \left(-\frac{z}{2} \right) dz = - \left(\frac{5}{384} \cdot \frac{pl^4}{EJ} - \frac{Xl^3}{48 EJ} \right),$$

nella quale il segno meno sta a significare che η_c' è di segno opposto a quello della X applicata alla trave, cioè verso il basso; nella bilatera a tre cerniere, dove lo diremo η_c'' , lo stesso spostamento ha invece l'espressione:

$$(b) \quad \eta_c'' = 2 \int_0^{l_1} \frac{X}{2 E\bar{\Omega} \cos \alpha} \cdot \frac{1}{2 \cos \alpha} ds = \frac{Xl_1}{2 E\bar{\Omega} \cos^2 \alpha}.$$

Dalla condizione $|\eta_c'| = \eta_c''$, risulta allora subito sostituendo:

$$(c) \quad X = \frac{\frac{5}{192} \cdot \frac{pl^4}{J}}{\frac{l_1}{\bar{\Omega} \cos^2 \alpha} + \frac{l^3}{24 J}} = \frac{5}{8} \cdot \frac{pl}{1 + 24 \lambda v^2},$$

nella quale si è posto:

$$\lambda = \frac{l_1}{l}, \quad v^2 = \frac{J}{\bar{\Omega} l^3 \cos^2 \alpha}.$$

Introducendo la X così determinata ad es. nella (b), si ha allora per lo spostamento di C il valore:

$$\eta_c = \frac{l_1}{2 E\bar{\Omega} \cos^2 \alpha} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{pl}{1 + 24 \lambda v^2} = \frac{5}{16} \cdot \frac{pl l_1}{E\bar{\Omega} \cos^2 \alpha (1 + 24 \lambda v^2)}.$$

Nel caso che si intenda prescindere dalla forza nor-

male, e quindi sia nella (c) $\bar{\Omega} = \infty$ ovvero $\nu = 0$, risulterebbe più semplicemente:

$$(c') \quad X = \frac{5}{8} pl ;$$

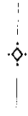
e allora introducendo nella (a) sarebbe anche:

$$\eta_c = \frac{5}{384} \cdot \frac{pl^4}{EJ} - \frac{5}{8} pl \cdot \frac{l^3}{48EJ} = 0 ,$$

ciò che è in accordo con l'ipotesi ora fatta, la quale, non potendo i tiranti, per la supposta rigidezza a forza normale, subire allungamento, equivale appunto a dire che C è fisso.

È ovvio come questo caso limite assimili la trave AB ad una trave continua con due campate su appoggi di livello ⁽¹⁾.

Esercizio 34 — Determinare in che misura la trave AB di fig. 60 a) viene scaricata dal tirante BC , lo spostamento verticale η_B del suo estremo e l'inflessione massima.



Dalla configurazione deformata del sistema (fig. 60 c)) ci si rende conto che la massima inflessione si verifica in una sezione intermedia della trave; potremmo quindi determinare questo massimo, quando conosciamo la legge dell'inflessione η_m per la sezione generica S_m .

A tanto, conforme a come si è fatto all'Esercizio 31, basta supporre che, insieme al carico effettivo uniforme p , agisca verticalmente nella detta sezione generica una forza fittizia P_m , da riguardare come un parametro arbitrario. Una volta risolto formalmente il sistema per la detta condizione di carico ed espresso l'abbassamento η_m in funzione dell'ascissa b_m , sarà

⁽¹⁾ V. MAGINI — Esercizi di Sc. delle Costr., Vol. I, pag. 159.

facile individuare la $\bar{b}_m$ di massimo e questo massimo.

Il sistema è una volta iperstatico; liberando ad es. la cerniera esterna C , l'incognita, che si identifica anche con la tensione nel tirante, diviene la reazione X di tale vincolo, ed assume così il carattere di incognita esterna; come forza esplicita, tale incognita opera sull'intero sistema.

Con questa scelta, il Teorema di Castigliano dovrà esprimere che sia nullo lo spostamento del punto C ,

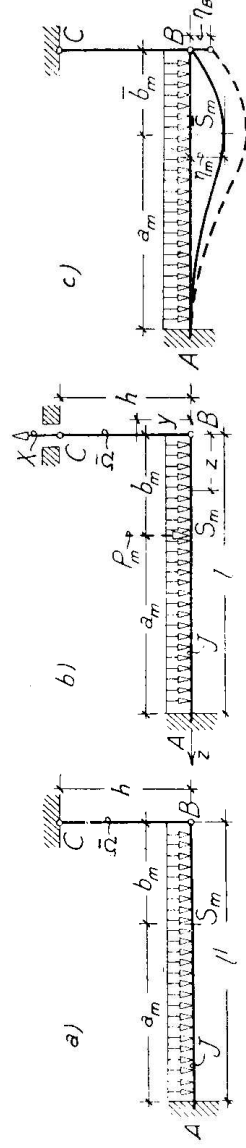


Fig. 60

mettendo in conto il lavoro di deformazione di tutto il sistema.

Le caratteristiche della sollecitazione - taglio escluso - sul sistema così caricato e con riguardo al riferimento $B(y, z)$ (fig. 60b)), risultano per i vari tronchi quelle della Tabella I/34.

TABELLA I/34

TRONCO	N	M	$\frac{\partial N}{\partial X}$	$\frac{\partial M}{\partial X}$
CB ($0 \leq y \leq h$)	+X	0	+1	0
BS _m ($0 \leq z \leq b_m$)	0	$Xz - \frac{pz^2}{2}$	0	+z
S _m A ($b_m \leq z \leq l$)	0	$Xz - \frac{pz^2}{2} - P_m(z - b_m)$	0	+z

L'equazione di elasticità per la condizione completa di carico diviene pertanto:

$$0 = \frac{1}{\Omega} \int_0^h X dy + \frac{1}{J} \int_0^l \left(Xz - \frac{pz^2}{2} \right) z dz - \frac{1}{J} \int_{b_m}^l P_m (z - b_m) z dz ;$$

dalla quale, osservando che è $b_m = l - a_m$, si ricava subito la soluzione fittizia:

$$(a) \quad X_{fit.} = \frac{\frac{1}{J} \left[\frac{pl^4}{8} + \frac{P_m a_m^2 (3l - a_m)}{6} \right]}{\frac{h}{\bar{\Omega}} + \frac{l^3}{3J}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{pl}{1 + 3\mu v^2} + \frac{P_m}{2l^3} \cdot \frac{a_m^2 (3l - a_m)}{1 + 3\mu v^2}$$

avendo posto:

$$\mu = \frac{h}{l} \quad ; \quad v^2 = \frac{J}{\bar{\Omega} l^2}.$$

Nelle condizioni effettive di carico, cioè per $P_m = 0$, la X vale ovviamente solo la prima parte del secondo membro, cioè:

$$(a') \quad X_{eff.} = \frac{3}{8} \cdot \frac{pl}{1 + 3\mu v^2}.$$

Lo spostamento dell'estremo B della trave, si valuta dopo ciò immediatamente come allungamento Δh del tirante per tale valore di X :

$$\eta_B \equiv \Delta h = \frac{Xh}{E\bar{\Omega}} = \frac{3}{8} \frac{E\bar{\Omega}}{l} \cdot \frac{plh}{1 + 3\mu v^2}.$$

Per esprimere ora l'abbassamento η_m della sezione generica S_m della trave, ci si deve invece valere delle caratteristiche della sollecitazione per la condizione complessiva di carico, in cui figura anche la forza fittizia P_m , e quindi della soluzione (a), procedendo per altro al modo seguito all'Esercizio 31.

Dette caratteristiche, sostituendo la $X_{fit.}$ nella Tabella I/24, divengono quelle della Tabella II/34, in funzione esplicitamente di P_m ; indicate nella stessa Tabella sono anche le loro derivate rispetto a P_m .

TABELLA I/34

TRONCO	$CB \ (0 \leq y \leq h)$	$BS_m \ (0 \leq z \leq b_m)$	$S_m A \ (b_m \leq z \leq l)$
N	$\frac{3pl}{8} + \frac{P_m a_m^2 (3l - a_m)}{2l^3}$	0	0
$\frac{\partial N}{\partial P_m}$	$\frac{a_m^2 (3l - a_m)}{2l^3 (1 + 3\mu v^2)}$	0	0
M	0	$\frac{3pl}{8} + \frac{P_m a_m^2 (3l - a_m)}{2l^3} - z \cdot \frac{p z^2}{2}$	$\frac{3pl}{8} + \frac{P_m a_m^2 (3l - a_m)}{2l^3} - \frac{p z^2}{2} - P_m \frac{(z - b_m)}{2l^3 (1 + 3\mu v^2)} z - (z - b_m)$
$\frac{\partial M}{\partial P_m}$	0	$\frac{a_m^2 (3l - a_m)}{2l^3 (1 + 3\mu v^2)} z$	

Applicando su questi elementi la (a') di pag. 136, con l'accortezza di trascurare fin d'ora, per brevità, i termini in cui figura P_m , si ottiene per lo spostamento η_m l'espressione:

$$\eta_m = \frac{1}{E\bar{\Omega}} \int_0^h \frac{3pl}{8(1+3\mu\nu^2)} \cdot \frac{a_m^2(3l-a_m)}{2l^3(1+3\mu\nu^2)} dy + \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(\frac{3pl}{8(1+3\mu\nu^2)} z - \frac{pz^2}{2} \right) \cdot \frac{a_m^2(3l-a_m)}{2l^3(1+3\mu\nu^2)} z dz +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \int_{b_m}^l \left(\frac{3pl}{8(1+3\mu\nu^2)} z - \frac{pz^2}{2} \right) |-(z-b_m)| dz .$$

Sviluppatisi i semplici integrali, col tener presente che è $l-b_m=a_m$, risulta facilmente:

$$(b) \quad \eta_m = \frac{k_p k_m h}{E\bar{\Omega}} + \frac{1}{24 EJ} \left[k_m (8k_p - 3p) - 4k_p a_m^2 (3l-a_m) + p a_m^2 (6l^2 - 4a_m l + a_m^2) \right] ,$$

dove si è posto per brevità:

$$(c) \quad k_p = \frac{3}{8} \cdot \frac{pl}{1+3\mu\nu^2} ; \quad k_m = \frac{1}{2l^3} \cdot \frac{a_m^2(3l-a_m)}{1+3\mu\nu^2} .$$

Per determinare a questo punto la sezione $\bar{S}_m$ di massima inflessione e quindi questo massimo, basterebbe rendere completamente esplicita in funzione di a_m la (b), annullare la derivata di η_m rispetto ad a_m e introdurre quindi la radice $\bar{a}_m$ di questa equazione nella stessa (b).

Eseguiamo qui questa ricerca nel caso che si intenda prescindere dalla forza normale, cioè nel caso che nella (b) sia $\bar{\Omega}=\infty$ e quindi $\nu=0$; osservando che la prima delle (c) fornisce in tali condizioni:

$$k_p \equiv X = \frac{3}{8} pl ,$$

sostituendo nella (b) risulta:

$$(b') \quad \eta_m = \frac{p a_m^2}{24 EJ} \left[6l^2 - 4a_m l + a_m^2 - \frac{3}{2} (3l-a_m) \right] = \frac{p a_m^2 (l-a_m) (2l-2a_m)}{48 EJ} .$$

Annullata la derivata di η_m rispetto ad a_m , a parte la soluzione $a_m=0$ - che corrisponde a un minimo di η_m

e precisamente a $\eta_m = 0$ — si ottiene l'equazione di secondo grado in a_m :

$$8a_m^2 - 15la_m + 6l^2 = 0,$$

che ha per radici:

$$a_{1m} = \frac{15 - \sqrt{42}}{16} l \quad ; \quad a_{2m} = \frac{15 + \sqrt{42}}{16} l,$$

delle quali solo la prima, in quanto minore di l , ha per noi significato.

Introdotta il valore a_{1m} nella (b'), si ricava per lo abbassamento massimo $\max \eta_m$ il valore approssimato:

$$\max \eta_m \cong \frac{0,255}{48 EJ} \frac{pl^4}{6} \cdot \frac{pl^4}{8 EJ} = \frac{0,255}{6} f = \frac{3,25}{100} f,$$

dove si è indicata con $f = pl^4/8EJ$ la freccia nella mensola AB in assenza del rinforzo BC .

Esercizio 35 — Risolvere il sistema di fig. 61 a) e determinare lo spostamento orizzontale ξ_B del carrello.

—•—•—

Si tratta del sistema ad arco a spinta eliminata con catena, già studiato sommariamente all'Eserc. 16 (pag. 85); si assume ancora come incognita lo sforzo X

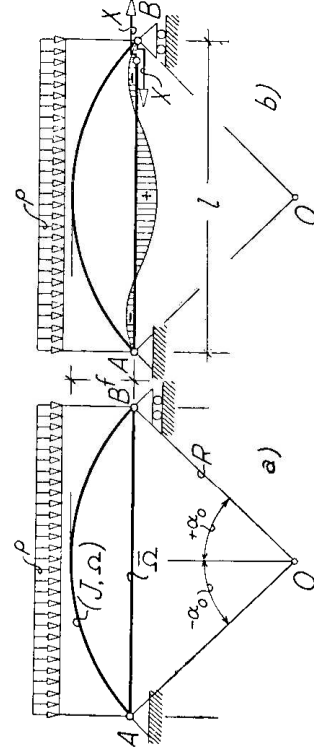


Fig. 61

nella catena, applicando ai due capi dell'articolazione B due forze esplicite opposte X (fig. 61b); trattandosi di indeterminazione in-terna, l'equazione

di elasticità dovrà allora esprimere che è nullo lo spostamento relativo dei due capi ora detti; qualora supponessimo il tirante rigido, la stessa condizione equivarrebbe invece a dire che è nullo lo spostamento

effettivo di B , come se ivi fosse disposta una cerniera fissa.

Ora il tirante verrebbe supposto, come noto, automaticamente rigido, prescindendo dal contributo della forza normale, trascurando cioè la caratteristica N tanto nell'arco quanto nella catena; otterremmo in tal modo per X una soluzione di prima approssimazione, che corrisponderebbe insieme al massimo valore di questa incognita.

Noi ci porremo invece qui in una condizione intermedia: trascureremo cioè N solo nell'arco, tenendone conto nella catena; con ciò otterremo una soluzione di seconda approssimazione, e l'equazione di elasticità esprimerà, come detto, che è nullo lo spostamento relativo dei due estremi arco-catena che fanno capo all'articolazione B .

In tale ipotesi, riferendoci ad es. al sistema cartesiano che ha origine nel punto di mezzo della corda, ha questa come asse z e come asse y l'asse di simmetria dell'arco, sicchè, contando le anomalie da tale asse è notoriamente (cfr. anche la fig. 22):

$$(a) \quad z = R \sin \alpha \quad ; \quad y = R \cos \alpha - (R - f) = R \cos \alpha - h_0 \quad ,$$

il momento lungo l'arco varia secondo la legge:

$$(b) \quad M = \frac{pl}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) - \frac{p}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right)^2 - Xy = \frac{pl^2}{8} - \frac{pR^2}{2} \sin^2 \alpha - X(R \cos \alpha - h_0) ;$$

è quindi anche:

$$(c) \quad \frac{\partial M}{\partial X} = -(R \cos \alpha - h_0) \quad .$$

Nella catena è invece $N \equiv X$ e quindi $\frac{\partial N}{\partial X} = 1$.

L'equazione di Castigliano diviene in conseguenza:

$$0 = \int_0^l \frac{X}{E\Omega} dz - \frac{1}{EJ} \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \left[\frac{pl^2}{8} - \frac{pR^2}{2} \sin^2 \alpha - X(R \cos \alpha - h_0) \right] (R \cos \alpha - h_0) R d\alpha \quad .$$

Con riguardo alle note primitive delle funzioni cir-

colari in gioco (in particolare ricordiamo qui che $\int \sin^2 \alpha \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\sin^3 \alpha}{3} + C$) e alle relazioni:

$$\cos \alpha_0 = \frac{h_0}{R} \quad ; \quad \sin \alpha_0 = \frac{l}{2R} \quad ,$$

è facile riconoscere per tale equazione la forma esplicita:

$$0 = X \left\{ \frac{l}{\bar{\Omega}} + \frac{1}{J} \left[\alpha_0 (R^2 + 2h_0^2) - \frac{3}{2} h_0 \right] \right\} - \frac{p}{4J} \left[\frac{l^3}{3} + \alpha_0 h_0 (2R^2 - l^2) - h_0^2 \right] \quad ,$$

da cui, posto di più $\rho^{*2} = J/\bar{\Omega}$, la soluzione:

$$(d) \quad X = \frac{3\alpha_0 h_0 (2R^2 - l^2) - 3lh_0^2 + l^3}{6[2l\rho^{*2} + 2\alpha_0 (R^2 + 2h_0^2) - 3lh_0]} \cdot p \quad .$$

Nel caso particolare di catena rigida, cioè $\bar{\Omega} = \infty$ e quindi $\rho^* = 0$, tale soluzione coincide con la (c) dello Esercizio 10, bastando al proposito osservare che è $h_0 = R - f$.

Lo spostamento ξ_B del carrello si ottiene ora nel modo più immediato come allungamento Δl della catena, cioè:

$$\xi_B \equiv \Delta l = \frac{Xl}{E\bar{\Omega}} = \frac{l}{E\bar{\Omega}} \cdot \frac{3\alpha_0 h_0 (2R^2 - l^2) - 3lh_0^2 + l^3}{6[2l\rho^{*2} + 2\alpha_0 (R^2 + 2h_0^2) - 3lh_0]} p \quad ,$$

e una volta di più si riconosce che per $\bar{\Omega} = \infty$ tale spostamento è nullo.

Esercizio 36 — Determinare lo spostamento η_P sotto al carico P nel sistema simmetrico di fig. 62a), ammesso che i vincoli siano rigidi.

—♦—

È il sistema che abbiamo risolto al n° 20 col principio dei l.v.. Riconoscemmo allora che era due volte iperstatico e trovammo per le incognite X_1 e X_2 — identificate con la componente orizzontale della reazione e col momento di incastro in B (fig. 62b)) — le espres-

sioni (c) e (d) di pag. 101, che qui riportiamo sotto la seguente forma più adatta per il calcolo:

$$(a) \quad X_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{\mu(4 + \mu\vartheta)} = k_1 P \quad ; \quad X_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{4 + \mu\vartheta} = -k_2 Pl \quad ;$$

avendo posto:

$$(b) \quad k_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\mu(4 + \mu\vartheta)} \quad ; \quad k_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 + \mu\vartheta} \quad ,$$

e dove ricordiamo che significano:

$$(c) \quad \vartheta = \frac{J}{J_1} \quad ; \quad \mu = \frac{h}{l} \quad .$$

Utilizzando questi elementi e con l'avvertenza che, come riconosciamo allora per simmetria, la componente verticale della reazione in B vale $P/2$, si tratta di determinare lo

spostamento η_P sotto al carico.

A tanto è ovvio che basta applicare direttamente la (d) di pagina 138, dopo di avere espresso,

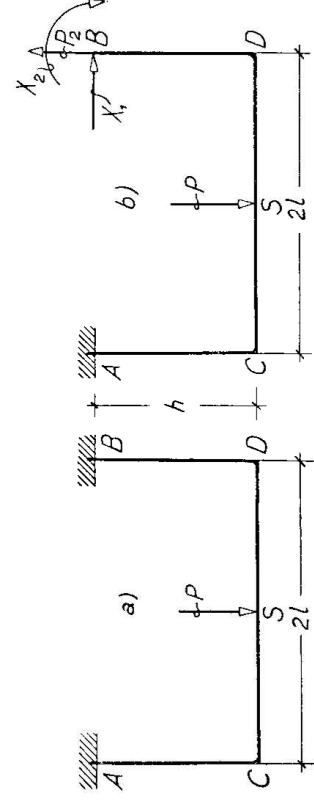


Fig. 62

attraverso le su riportate soluzioni del problema, il momento M lungo il contorno del sistema in funzione di P .

Ancora per simmetria, possiamo limitarci a mezzo sistema; nel riferimento $B(z, y)$ con asse z positivo ver-

TABELLA I/36

TRONCO	M	$\frac{\partial M}{\partial P}$
$BD \ (0 \leq y \leq h)$	$X_1 y + X_2 = P(k_1 y - k_2 l)$	$k_1 y - k_2 l$
$DS \ (0 \leq z \leq l)$	$X_1 h + X_2 - \frac{P}{2} z = P(k_1 h - k_2 l - \frac{z}{2})$	$k_1 h - k_2 l - \frac{z}{2}$

so sinistra, y positivo verso il basso, nei due tronchi BD e DS il momento e la sua derivata rapporto a P variano secondo le leggi della Tabella I/36.

Introducendo questi elementi nella citata (d) di pag. 138, con l'accortezza di raddoppiare gli integrali, risulta:

$$\eta_P = \int_s^h \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P} ds = \frac{2}{EJ_1} \int_0^h P(k_1 y - k_2 l)^2 dy + \frac{2}{EJ} \int_0^l P(k_1 h - k_2 l - \frac{z^2}{2}) dz.$$

Sviluppati gli integrali e tenute presenti le posizioni (c), si ottiene in definitiva:

$$(d) \quad \eta_P = \frac{Pl^3}{6EJ} \left\{ 4\mu^3 k_1^2 - 3\mu k_1 k_2 + 3k_2^3 \right\} + 12(\mu k_1 - k_2)^2 + (1 - 6\mu k_1 + 6k_2) \left\{ \right.$$

Questo spostamento potrebbe anche essere espresso unicamente in funzione dei due rapporti μ e ϑ , introducendovi per k_1 e k_2 le (b) che abbiamo sopra riportate.

È agevole esaminare sulla (d) i vari casi particolari corrispondenti a determinati valori dei rapporti μ e ϑ .

Ad es. per $\mu = \vartheta = 1$, risulterebbero:

$$k_1 = \frac{3}{10} \quad ; \quad k_2 = \frac{1}{10},$$

e quindi anche dalla (d):

$$(d') \quad \eta_P = \frac{Pl^3}{15 EJ}.$$

Questo caso particolare, per precisarlo dal punto di vista geometrico, è quello di un riquadro con steli ed architrave della stessa lunghezza e ugualmente porzionati.

Esercizio 37 — Risolvere il sistema di fig. 63 a), costituito dalla trave a mensola AB rinforzata da un puntone intermedio e da un tirante all'estremità.

—♦—

Il sistema è due volte iperstatico; si scelgono come incognite X_1 e X_2 le reazioni nei punti di vincolo O e D , rimuovendo ivi le due cerniere di collegamento esterno; in tal modo queste incognite, che sono in fondo

gli sforzi nei due pendoli BC e DE , acquistano il carattere di incognite esterne; pensandole come forze esplicite applicate nei due estremi C e D , le caratteristiche della sollecitazione — almeno del taglio — nei vari tronchi del sistema e le loro derivate parziali rispetto alle incognite medesime, hanno le leggi indicate nella Tabella I/37.

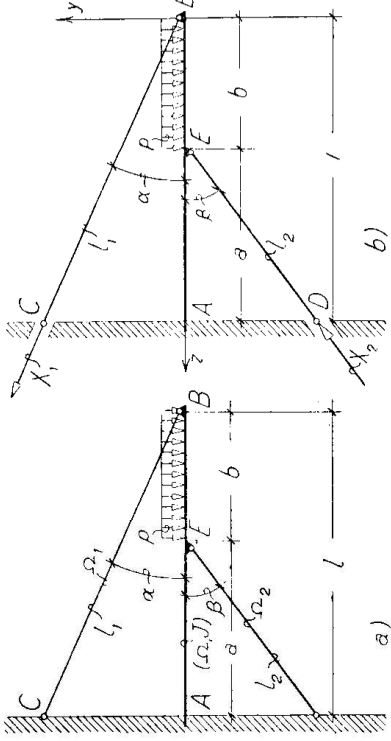


Fig. 63

TABELLA I/37

TRONCO	N	$\frac{\partial N}{\partial X_1}$	$\frac{\partial N}{\partial X_2}$	M	$\frac{\partial M}{\partial X_1}$	$\frac{\partial M}{\partial X_2}$
$BC \ (l_1)$	$+X_1$	$+1$	0	0	0	0
$BE \ (0 \leq z \leq b)$	$-X_1 \cos \alpha$	$-\cos \alpha$	0	$X_1 \text{sen} \alpha \cdot z - \frac{pz^2}{2}$	$\text{sen} \alpha \cdot z$	0
$EA \ (b \leq z \leq l)$	$-X_1 \cos \alpha + X_2 \cos \beta$	$-\cos \alpha$	$+\cos \beta$	$X_1 \text{sen} \alpha \cdot z + X_2 \text{sen} \beta \cdot (z-b) - pb \left(z - \frac{b}{2} \right)$	$\text{sen} \alpha \cdot z$	$+\text{sen} \beta \cdot (z-b)$
$ED \ (l_2)$	$-X_2$	0	-1	0	0	0

Le due equazioni di elasticità del problema, per vincoli rigidi, sono in forma sintetica:

$$1^a) \quad 0 = \int_s^N \frac{N}{EA} \cdot \frac{\partial N}{\partial X_1} ds + \int_s^M \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_1} ds ;$$

$$2^a) \quad 0 = \int_s^N \frac{N}{EA} \cdot \frac{\partial N}{\partial X_2} ds + \int_s^M \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_2} ds .$$

Introducendovi i dati della Tabella, tali equazioni prendono la forma esplicita:

$$1^a) \quad 0 = \frac{1}{\Omega_1} \int_0^{l_1} X_1 dl_1 + \frac{1}{\Omega} \int_0^b (-X_1 \cos \alpha) (-\cos \alpha) dz + \\ + \frac{1}{\Omega} \int_b^l (-X_1 \cos \alpha + X_2 \cos \beta) (-\cos \alpha) dz + \frac{1}{J} \int_0^b \left(X_1 \text{sen} \alpha \cdot z - \frac{pz^2}{2} \right) \text{sen} \alpha \cdot z dz + \\ + \frac{1}{J} \int_b^l \left[X_1 \text{sen} \alpha \cdot z + X_2 \text{sen} \beta \cdot (z-b) - pb \left(z - \frac{b}{2} \right) \right] \text{sen} \alpha \cdot z dz ;$$

$$2^a) \quad 0 = \frac{1}{\Omega} \int_b^l (-X_1 \cos \alpha + X_2 \cos \beta) \cos \beta \, dz + \frac{1}{\Omega_2} \int_0^{l_2} (-X_2) (-I) \, dl_2 + \\ + \frac{1}{J} \int_b^l [X_1 \operatorname{sen} \alpha \cdot z + X_2 \operatorname{sen} \beta (z-b) - pb \left(z - \frac{b}{2}\right)] \operatorname{sen} \beta (z-b) \, dz .$$

Sviluppando gli integrali, riducendo e tenuto presente che è $b=l-a$, risulta facilmente:

$$(a) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{l_1}{\Omega_1} + \frac{l \cos^2 \alpha}{\Omega} + \frac{l^3 \operatorname{sen}^2 \alpha}{3J} \right] X_1 - \left[\frac{a \cos \alpha \cos \beta}{\Omega} - \frac{a^2 (3l-a) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{6J} \right] X_2 = \\ & = \frac{p \operatorname{sen} \alpha (3l^4 - 4a^3 l + a^4)}{24J} \\ & - \left[\frac{a \cos \alpha \cos \beta}{\Omega} - \frac{a^2 (3l-a) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{6J} \right] X_1 + \left[\frac{l_2}{\Omega_2} + \frac{a \cos^2 \beta}{\Omega} + \frac{a^3 \operatorname{sen}^2 \beta}{3J} \right] X_2 = \\ & = \frac{p \operatorname{sen} \beta a^2 (3l^2 - 2al - a^2)}{12J} \end{aligned} \right.$$

ovvero anche, con ovvio significato dei simboli:

$$(a') \quad \left\{ \begin{aligned} & k_1 X_1 + k_2 X_2 = k_o \\ & k_2 X_1 + k_2' X_2 = k_o' \end{aligned} \right. ,$$

sistema che, com'è noto, ammette la soluzione:

$$(b) \quad X_1 = \frac{k_o k_2' - k_o' k_2}{k_1 k_2' - k_2^2} ; \quad X_2 = \frac{k_o' k_1 - k_o k_2}{k_1 k_2' - k_2^2} .$$

Nel caso che si intenda prescindere anche dal contributo della forza normale, che si ritengono cioè rigide a questa sollecitazione le tre membrature del sistema ($\Omega = \Omega_1 = \Omega_2 = \infty$), i coefficienti k assumono le forme ridotte:

$$k_1 = l^3 \operatorname{sen}^2 \alpha ; \quad k_2 = \frac{a^2 (3l-a) \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{2} ; \quad k_o = \frac{p \operatorname{sen} \alpha (3l^4 - 4a^3 l + a^4)}{8} , \\ k_1' = k_2 ; \quad k_2' = a^3 \operatorname{sen}^2 \beta ; \quad k_o' = \frac{p \operatorname{sen} \beta a^2 (3l^2 - 2al - a^2)}{4} .$$

Introdotte tali espressioni nelle (b), si ha per il caso particolare ora detto, la soluzione:

$$(b') \quad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{pl(l-a)}{(4l-a) \operatorname{sen} \alpha} = \frac{3}{2} \cdot \frac{pbl}{(3l+b) \operatorname{sen} \alpha} ; \\ X_2 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{p(l-a)(3l^2 + 4al - a^2)}{a(4l-a) \operatorname{sen} \beta} = \frac{1}{4} \cdot \frac{pb(6l^2 - 2lb - b^2)}{(l-b)(3l+b) \operatorname{sen} \beta} . \end{aligned} \right.$$

Le due forme, in funzione di l e di a , ovvero di l e di b , scendono immediatamente l'una dall'altra tenendo presente la relazione fra a , b ed l già utilizzata di sopra.

Si avverta che i segni positivi per le due incognite confermano i sensi per esse previsti in fig. 63b) nella riduzione al sistema principale.

Esercizio 38 — Risolvere il sistema reticolare di fig. 64a) e determinare lo spostamento del nodo centrale E del corrente inferiore provocato dai due carichi P simmetrici nei nodi del corrente superiore.

La travatura presenta una incognita iperstatica esterna: la componente orizzontale X della reazione in B , che introduciamo sostituendo alla cerniera un carrello scorrevole orizzontalmente (fig. 64b)).

La risoluzione è quanto mai semplice, in quanto tale incognita, per il fatto che il corrente inferiore è orizzontale, non interessa altro che le aste 7 e 7' di

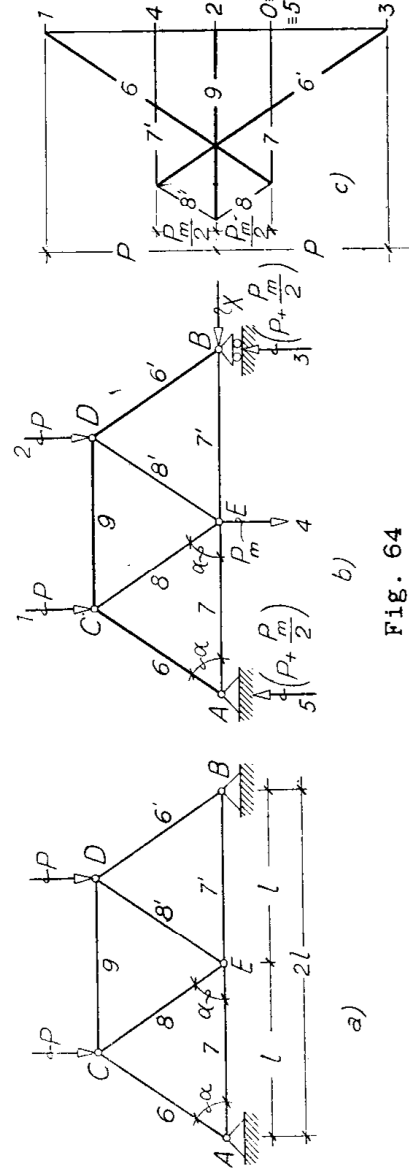


Fig. 64

tale corrente; gli sforzi effettivi S nelle altre aste coincidono quindi con gli S_0 che si hanno nel sistema principale per effetto delle sole forze esplicitate P .

In vista di determinare lo spostamento verticale del nodo E , facciamo figurare fin d'ora, come parametro arbitrario, in questo nodo una forza verticale P_m , esprimendo l'incognita X anche in funzione di essa; mentre è ovvio che il valore effettivo di X si ottiene ponendo nella soluzione completa $P_m = 0$, si ha così il

vantaggio di esprimere immediatamente lo spostamento voluto.

Poichè, per simmetria, le reazioni dei vincoli nel sistema principale per parte dei carichi espliciti P e P_m valgono: $A=B=P+\frac{P_m}{2}$, dalla condizione di equilibrio del nodo A risultano subito per gli sforzi S_{os} e S_{or} le espressioni:

$$S_{os} = -\left(P + \frac{P_m}{2}\right) / \operatorname{sen} \alpha \quad ; \quad S_{or} = \left(P + \frac{P_m}{2}\right) / \operatorname{tg} \alpha .$$

Nel nodo C , risulta in modo analogo:

$$S_{os} = P_m / 2 \operatorname{sen} \alpha \quad ; \quad S_{or} = -(P + P_m) / \operatorname{tg} \alpha ,$$

Gli stessi sforzi sono stati determinati mediante il cremoniano (fig. 64 c).

Per la simmetria e mettendo in conto l'incognita X , si hanno dunque nella travatura gli sforzi effettivi indicati nella Tabella I/38.

TABELLA I/38

A S T A N°	6 e 6'	7 e 7'	8 e 8'	9
S	$-\frac{2P + P_m}{2 \operatorname{sen} \alpha}$	$\frac{2P + P_m}{2 \operatorname{tg} \alpha} - X$	$\frac{P_m}{2 \operatorname{sen} \alpha}$	$\frac{P + P_m}{\operatorname{tg} \alpha}$
$\frac{\partial S}{\partial X}$	0	-1	0	0
$\frac{\partial S}{\partial P_m}$	$-\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha}$	$\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha}$	$\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha}$	$-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$

Ivi sono anche indicate le derivate di tali sforzi rispetto ad X e rispetto a P_m , delle quali le prime entrano, secondo la (d) di pag. 138, nella equazione di elasticità che determina la incognita, le seconde entrano nella stessa (d) di pag. 138 per esprimere lo spostamento verticale η_F del nodo E .

La detta equazione diviene semplicemente:

$$0 = 2 \rho_r S_r \frac{\partial S_r}{\partial X} = 2 \left[\frac{2P + P_m}{2 \operatorname{tg} \alpha} - X \right] \frac{l}{2 EA_c} (-1) ,$$

dalla quale:

$$(a) \quad X = \frac{2P + P_m}{2 \operatorname{tg} \alpha} .$$

Il valore effettivo dell'incognita, cioè quello per $P_m=0$, è dunque:

$$(a') \quad X = \frac{P}{tg\alpha}.$$

Lo spostamento η_E assume poi la forma:

$$\eta_E = \left(\sum S \varrho \frac{\partial S}{\partial P_m} \right)_{P_m=0} = \left[2 \left\{ \left(-\frac{2P+P_m}{2 \operatorname{sen} \alpha} \right) \left(-\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha} \right) \varrho_6 + \left(\frac{2P+P_m}{2 tg \alpha} - X \right) \frac{1}{2 tg \alpha} \varrho_7 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{P_m}{2 \operatorname{sen} \alpha} \cdot \frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha} \cdot \varrho_8 \right\} + \left(-\frac{P+P_m}{tg \alpha} \right) \left(-\frac{1}{tg \alpha} \right) \varrho_9 \right]_{P_m=0}.$$

Sostituendovi per X la (a') e notando che è:

$$l_6 = l/4 \cos \alpha \quad ; \quad l_9 = l/2 \quad ,$$

supposto di più per il contorno superiore della trave una stessa sezione A_s , cioè $A_6 \equiv A_9 = A_s$, risulta subito:

$$(b) \quad \eta_E = \frac{Pl(1+2 \cos^3 \alpha)}{4EA_s \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha}.$$
