

CAPITOLO II

IL METODO DEL TEOREMA DI CASTIGLIANO

Come si è richiamato nella Premessa (pag. 4 e 5), il Teorema di Castigliano costituisce un mezzo di calcolo per gli spostamenti dei punti di un solido elastico, in seguito alla deformazione provocata da date forze esterne; precisamente, nella sua forma diretta, esso fornisce lo spostamento del punto di applicazione di una di queste forze, P_i , nella direzione della forza stessa, come derivata del lavoro di deformazione Φ_i , rispetto a quella forza; in simboli:

$$(a) \quad \eta_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial P_i} .$$

Nel caso di un sistema di travi, una espressione perfettamente analoga fornisce la rotazione della sezione in cui è applicata una coppia M_i ; cioè:

$$(b) \quad \vartheta_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial M_i} .$$

La portata del Teorema è anche più vasta di quanto dichiarano le (a) e (b), in quanto esso consente di determinare lo spostamento di un punto qualunque del sistema e in una direzione m qualunque (ovvero la rotazione di una sezione m qualunque) anche se non vi è applicata nessuna forza (nessuna coppia); a tanto basta infatti pensare applicata in quel punto e in quella direzione una forza P_m (in quella sezione una coppia M_m) riguardandola come un parametro arbitrario, esprimere Φ_i *anche* in funzione di questo parametro e procedere quindi formalmente allo stesso modo di prima, salvo a

calcolare poi la derivata per la effettiva condizione di carico, cioè per $P_m=0$ (ovvero per $M_m=0$); in simboli e rispettivamente:

$$(a') \quad \eta_m = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial P_m} \right)_{P_m=0} ; \quad (b') \quad \vartheta_m = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial M_m} \right)_{M_m=0} .$$

Poichè, come si vede, il Teorema si propone di valutare solo spostamenti dovuti espressamente all'azione dei carichi, per la sua validità incondizionata la deformazione dovrebbe rispettare la legge di Hooke e non avere altra causa all'infuori delle forze esterne; quindi niente cedimenti (elastici o anelastici) dei vincoli o altra imperfezione degli stessi, niente difetti di montaggio o di costruzione o variazioni termiche, ecc.; cioè, in breve, niente stati di coazione di qualunque natura e origine.

Di fatto invece il Teorema di Castigliano ha validità più ampia di quanto lascino credere queste restrizioni; così ad es. può essere utilizzato nel caso di vincoli cedevoli elasticamente, bastando solo avere l'accortezza di includere nel sistema, e quindi nel computo del lavoro di deformazione, anche i vincoli; è utilizzabile nel caso di vincoli cedevoli anelastamente, purchè gli si richieda quella sola parte degli spostamenti che è dovuta alla deformazione elastica provocata dalle forze esterne; e ciò senza restrizione nel caso isostatico, con la restrizione invece, nel caso iperstatico, che i cedimenti anelastici, e quindi lo stato di coazione che essi generano nel sistema, abbiano una entità ben determinata e *indipendente* dalle forze esterne; altrettanto si dica nei confronti di uno stato di coazione di qualunque altra natura.

È inteso che, in questi casi, l'altra parte degli spostamenti, quella cioè dovuta ai cedimenti o comunque allo stato di coazione, deve essere calcolata con altri mezzi; per i sistemi isostatici, in particolare, e per il caso di cedimenti anelastici, bastano semplici considerazioni cinematiche.

Malgrado questa maggiore generalità, poichè l'impiego nei casi ora detti richiede sempre qualche cau-

tela, è però preferibile, come avvertivamo nella Pre-messa a pag. 5, limitare l'impiego del Teorema di Castigliano a quel campo in cui non lascia alcuna preoccupazione, cioè a quei casi nei quali l'intero spostamento è dovuto unicamente alla deformazione elastica provocata dalle forze esterne: dunque, precisiamo ancora, per vincoli perfetti, temperatura costante e in assenza di stati di coazione di qualsiasi altra natura.

Molti degli Esercizi risolti al Capitolo precedente col principio dei l.v. rientrano in queste condizioni; alcuni di essi, tanto per confrontare i risultati dei due metodi, saranno perciò risolti nel seguito anche col Teorema di Castigliano; tratteremo inoltre alcuni altri esempi nuovi, in modo da renderne il più possibilmente spedito l'impiego pratico.

* * *

Al riguardo, si ricorda che per una struttura piana costituita da travi — caso che ha per noi particolare interesse — lungo la quale siano M , N e T le caratteristiche effettive della sollecitazione, il lavoro di deformazione Φ_1 ha, in funzione di queste caratteristiche, l'espressione:

$$(c) \quad \Phi_1 = \int_s \frac{M^2}{2EJ} ds + \int_s \frac{N^2}{2EA} ds + \int_s \chi \frac{T^2}{2GA} ds ,$$

dove gli integrali sono estesi a tutto il contorno; per le strutture reticolari, detti S e $\varrho = U/EA$ rispettivamente lo sforzo effettivo e l'estensibilità dell'asta generica, è anche più semplicemente:

$$(c') \quad \Phi_1 = \frac{1}{2} \sum S^2 \varrho ,$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le aste.

Per utilizzare queste espressioni di Φ_1 nella (a) e (b) — o nelle analoghe (a') e (b') — basta allora esprimere le caratteristiche M , N e T , ovvero gli sforzi S , in funzione delle forze esterne P_i o, eventualmente, in funzione anche della forza fittizia P_m (o M_m).

In pratica, anzichè seguire la via diretta indicata dalla (c), o dalla (c'), vale a dire di esprimere le caratteristiche o gli sforzi S in funzione delle forze esterne, quadrare e quindi, ai sensi delle (a) o (b) e analoghe, derivare, conviene derivare subito le espressioni di M , N e T o degli sforzi S e quindi integrare i prodotti $M \frac{\partial M}{\partial P}$, ecc. È ovvio infatti, poichè le M , N e T , e così gli sforzi S , sono lineari nelle forze esterne, che per le (c) e (c'), la (a) ad es. diviene più semplicemente:

$$(d) \quad \eta_i = \int_s \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P_i} ds + \int_s \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_i} ds + \int_s \chi \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial P_i} ds ;$$

e in modo analogo per le travature reticolari:

$$(d') \quad \eta_i = \sum \frac{S l}{EA} \frac{\partial S'}{\partial P_i} = \sum S \rho \frac{\partial S}{\partial P_i} .$$

Si viene così a ridurre sensibilmente il lavoro in tutti quei casi in cui le caratteristiche o gli sforzi S non hanno espressione monomia; lavoro che sarebbe d'altronde superfluo, in quanto molti dei termini che nascerebbero negli sviluppi dei quadrati -- e precisamente tutti quelli indipendenti dalla forza rispetto alla quale si deriva -- si eliminerebbero successivamente nella derivazione.

È nell'ordine di questa economia che applicheremo stabilmente nel seguito il Teorema di Castigliano.

Quanto all'uso che se ne può fare, c'è anche qui da rilevare, come già a proposito del principio del l.v., la doppia forma reciproca in cui possono essere impiegate la (d) e (d') o analoghe. Come tali, infatti, queste relazioni forniscono lo spostamento di un punto, o la rotazione di una sezione, quando le quantità M , N e T , o S , che figurano al secondo membro siano tutte quantità note; ciò che, sappiamo, è senz'altro vero e in modo immediato nel caso di un sistema isostatico, mentre richiede la risoluzione preventiva del sistema nel caso di un sistema iperstatico.

Viceversa, invece, può verificarsi che sia noto a priori il valore del primo membro della (d) o analoghe, e che al secondo membro figurino una o più quantità incognite: in tale circostanza la (d) costituisce una condizione per queste incognite.

È esattamente ciò che si verifica in un problema iperstatico, quando sul sistema principale prescelto si pensano agire le incognite iperstatiche come quantità esplicite, e si impone al punto o alla sezione in cui è stata introdotta una di queste incognite di rispettare la deformazione effettiva: è infatti conosciuto in tal caso lo spostamento (lineare o angolare) nel punto, mentre entrano come incognite nella espressione del lavoro di deformazione Φ_1 le iperstatiche.

Le (d) e analoghe assumono dunque in tal caso il ruolo di equazioni di elasticità, e come tali si prestano alla risoluzione dei sistemi iperstatici.

Al proposito, anzi, è opportuno subito osservare che, nel campo ristretto a cui abbiamo consigliato sopra di limitare l'impiego del Teorema di Castigliano, il primo membro di queste equazioni è invariabilmente nullo: e ciò perchè è tale se l'incognita iperstatica è esterna, avendo supposti i vincoli perfetti; è tale anche se l'incognita è interna, in quanto in tal caso detto primo membro acquista il significato di spostamento relativo (lineare o angolare) delle due facce della sezione in cui è stata operata la sconnessione che ha annullato la incognita iperstatica introdotta.

Dopo queste precisazioni, l'impiego pratico del Teorema di Castigliano per la risoluzione dei sistemi iperstatici sarà da condurre nel seguente modo: scelto il sistema principale — ciò che faremo ancora con le accortezze generali di cui dicemmo all'Esercizio 18 — penseremo le incognite iperstatiche X_k come quantità esplicite; esprimeremo nei singoli tronchi del sistema le caratteristiche M, N e T , o gli sforzi S nel caso di travatura reticolare, in funzione *anche* delle X_k ; deriveremo le espressioni ottenute rispetto a ognuna delle X_k medesime, e integreremo quindi secondo la (d) o (d') o analoghe, e per tante volte quante sono le in-

cognite, i prodotti delle stesse caratteristiche per le corrispondenti derivate. Si avverta, come questione formale, che ora la X_k , contrariamente a quanto avveniva nell'applicazione del p. dei l. v. dove aveva il significato di modulo della incognita iperstatica k^{esima} — sicchè la soluzione si presentava nella forma $1.X_k$ o in quella $1.X_k$ —, ha già in se stessa le dimensioni di una forza finita o di un momento; non comparirà perciò più nella soluzione, a moltiplicarla, la forza unitaria o il momento unitario.

Procedimento formalmente analogo, sarà poi da seguire anche per il calcolo di spostamenti o di rotazioni di sezioni, salvo che le forze in gioco devono ora essere effettivamente note; ciò che, insistiamo, richiede la risoluzione preventiva del sistema nel caso iperstatico.

Gli Esercizi che seguono renderanno d'altronde pratico conto del procedimento nei due diversi tipi di problemi.

Esercizio 27 — Risolvere il portale dell'Esercizio 2, nelle stesse condizioni di carico e di vincolo di allora.

Rimandiamo all'Esercizio 2 per quanto riguarda la descrizione del sistema e la interpretazione delle condizioni di carico p e q (fig. 53a)).

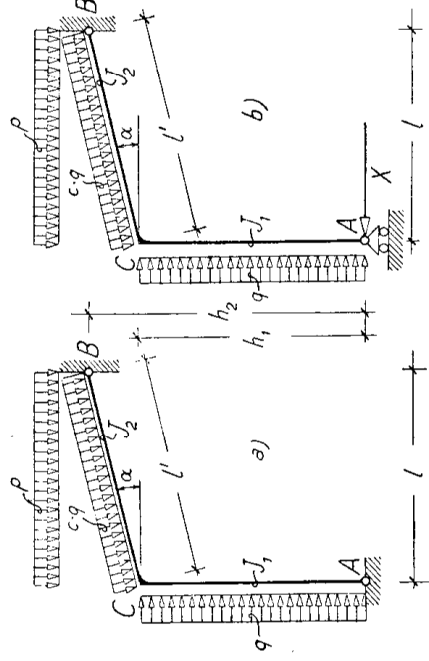


Fig. 53

Scegliendo lo stesso sistema principale di allora (fig. 53b)), le caratteristiche M , N e T effettive che ci interessano nella (d), coincidono con le caratteristiche in tale sistema quando vi si riguarda la ipersta-

tica X come una forza esplicita, alla stessa stregua dei carichi p , q e cq . Di queste caratteristiche ci li-

mitiamo a considerare, come già facemmo all'Esercizio 2, il solo momento flettente.

Con riguardo al riferimento $A(z, y)$ di fig. 5, con asse z orizzontale positivo verso destra e asse y verticale positivo verso l'alto, le reazioni dei vincoli per la condizione completa di carico ora indicata, valendoci dei risultati stabiliti al proposito al citato Esercizio 2 per i contributi dei singoli carichi, valgono:

$$A = A_p + A_q + A_x = \frac{pl}{2} + q \left[\frac{h_1}{l} \left(h_2 - \frac{h_1}{2} \right) + \frac{cl}{2} (1 + tg^2\alpha) \right] - \frac{h_2}{l} X ;$$

$$B = B_p + B_q + B_x = \frac{pl}{2} + q \left[\frac{h_1}{l} \left(h_2 - \frac{h_1}{2} \right) - \frac{cl}{2} (1 - tg^2\alpha) \right] + \frac{h_2}{l} X ;$$

$$H_B = X - q [h_1 + c(h_2 - h_1)] .$$

Il momento flettente nei vari tronchi del sistema, e in conseguenza la sua derivata rispetto ad X , variano allora secondo le leggi indicate nella Tabella I/27.

TABELLA I/27

TRONCO	M	$\frac{\partial M}{\partial X}$
AC ($0 \leq y \leq h_1$)	$+ Xy - \frac{qy^2}{2}$	y
CB ($0 \leq z \leq l$)	$Az + X(h_1 + ztg\alpha) - qh_1 \left(\frac{h_1}{2} + ztg\alpha \right) - \frac{pz^2}{2} - \frac{cqz^2}{2} (1 + tg^2\alpha) =$ $= \frac{pz}{2} (l-z) - \frac{qh_1^2}{2l} (l-z) + \frac{cq(1+tg^2\alpha)}{2} (l-z)z + X \frac{h_1}{l} (l-z)$	$\frac{h_1}{l} (l-z)$

Introdotte queste leggi nella (d) di pag. 138 limitatamente al momento flettente, si ha nella incognita X la seguente equazione:

$$0 = \int_0^{h_1} \frac{\left(Xy - \frac{qy^2}{2} \right) y}{EJ_1} dy + \int_0^l \frac{1}{EJ_2} \left[\left(\frac{pz}{2} - \frac{qh_1^2}{2l} + \frac{cq(1+tg^2\alpha)z}{2} + \frac{h_1}{l} X (l-z) \right) \frac{h_1}{l} (l-z) dz \right]$$

la quale, posto $\vartheta = J_1/J_2$, ha per soluzione:

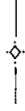
$$X = \frac{h_1^2 (3h_1 + 4\vartheta l) - c\vartheta l^3 (1 + tg^2\alpha)}{8h_1(h_1 + \vartheta l)} q - \frac{\vartheta l^3}{8h_1(h_1 + \vartheta l)} p ,$$

che è la stessa (a) dell'Esercizio 2 a meno del segno;

ciò risulta ovvio osservando che sono opposti i sensi previsti per la X in fig. 53b) e quello per la $X=1$ in fig. 5c).

Da questo punto, le conclusioni a riguardo dei singoli contributi che hanno in X i due tipi di carico p e q , e della loro sovrapposizione, sono le stesse dell'Esercizio 2, al quale pertanto si rimanda chi legge.

Esercizio 28 — Risolvere la trave di fig. 54 a) nell'ipotesi che i vincoli siano rigidi, e determinare lo spostamento η_m della sezione S_m di ascisse a_m e b_m dagli estremi.



La trave è notoriamente una volta iperstatica. Scegliamo ad es. come incognita sovrabbondante X la reazione dell'appoggio semplice in B , vale a dire come

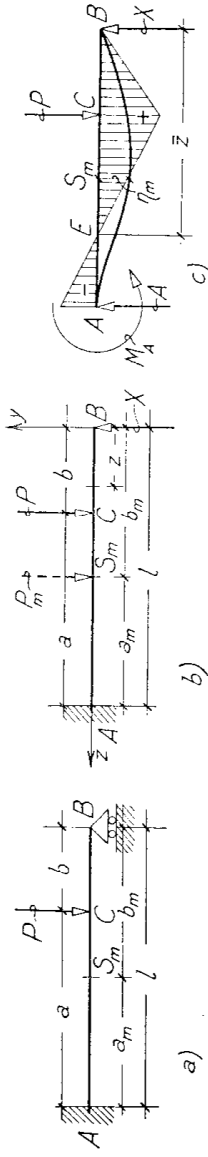


Fig. 54

sistema principale la mensola AB , e riguardiamovi X come una forza esplicita all'estremo libero (fig. 54b)).

Nel riferimento $B(z, y)$ ivi indicato, il momento M nei due tronchi BC e CA in cui il carico P spezza la trave, seguendo per i segni le usuali convenzioni della teoria delle travi inflesse, varia secondo le leggi lineari indicate nella seconda colonna della Tabella I/28; più che mai semplici sono allora anche quelle, indicate nella terza colonna della stessa Tabella, secondo cui varia la $\partial M / \partial X$.

L'equazione di elasticità atta a determinare, a me-

TABELLA I/28

TRONCO	M	$\frac{\partial M}{\partial X}$
$BC \ (0 \leq z \leq b)$	$+Xz$	$+z$
$CA \ (b \leq z \leq l)$	$+Xz - P(z-b)$	$+z$

no del taglio, la X , si deduce immediatamente dalla (d) di pag. 138 introducendovi dette leggi nel secondo integrale; è cioè e di seguito:

$$0 = \int_0^b \frac{Xz^2}{EJ} dz + \int_0^l \frac{[Xz - P(z-b)]z}{EJ} dz = \frac{Xl^3}{3EJ} - \frac{P}{6EJ} (2l^3 - 3bl^2 + b^3) .$$

Osservando che $l-b=a$, si ricava subito la soluzione:

$$(a) \quad X = -\frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3} ,$$

che è una nota formula della teoria delle travi inflesse.

In fig. 54 c) sono rappresentati il diagramma effettivo dei momenti e la deformata della trave. A proposito del diagramma si rilevano i seguenti elementi: il momento sotto il carico vale:

$$M_C = Xb = -\frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3} ;$$

quello all'incastro invece:

$$M_A = Xl - Pa = -\frac{Pa}{2l^2} (2l^2 - 3al + a^2) = -\frac{Pab(3l-a)}{2l^2} ;$$

il punto di passaggio, la sezione E cioè alla quale è:

$$M_E = X\bar{z} - P(\bar{z}-b) = -\frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3} \bar{z} - P(\bar{z}-b) = 0 ,$$

ha per ascissa, com'è immediato riconoscere:

$$\bar{z} = \frac{2l^3}{b(3l-b)} .$$

Se invece di un solo carico concentrato P se ne avessero n di cui quello considerato fosse il generico P_i , sovrapponendo gli effetti troveremo ovviamente:

$$(a') \quad X = -\frac{1}{2l^3} \sum_i^n P_i a_i^2 (3l-a_i) .$$

Ciò posto, per valutare lo spostamento verticale η_m della sezione S_m assegnata, si immagini applicata in essa, come parametro arbitrario, una forza verticale

P_m ; per il principio di sovrapposizione ora invocato, la X in questa nuova condizione di carico assumerebbe l'espressione:

$$(b) \quad X = \frac{1}{2l^3} [Pa^2(3l-a) + P_m a_m^2(3l-a_m)] .$$

In funzione di P_m , oltrechè di P , il momento M nei tre tronchi in cui i due carichi spezzano la trave, varia allora come indicato nella Tabella II/28.

TABELLA II/28

TRONCO	M	$\frac{\partial M}{\partial P_m}$
$BC \quad (0 \leq z \leq b)$	$\frac{1}{2l^3} \left[Pa^2(3l-a) + P_m a_m^2(3l-a_m) \right] z$	$\frac{a_m^2(3l-a_m)}{2l^3} z$
$CS_m \quad (b \leq z \leq b_m)$	$\frac{1}{2l^3} \left[Pa^2(3l-a) + P_m a_m^2(3l-a_m) \right] z - P(z-b)$	$\frac{a_m^2(3l-a_m)}{2l^3} z$
$S_mA \quad (b_m \leq z \leq l)$	$\frac{1}{2l^3} \left[Pa^2(3l-a) + P_m a_m^2(3l-a_m) \right] z - P(z-b) - P_m(z-b_m)$	$\frac{a_m^2(3l-a_m)}{2l^3} z - (z-b_m)$

Per il calcolo di η_m , giacchè nella sezione S_m non è di fatto applicato alcun carico, si tratta di impiegare la (a') di pag. 136, il che è quanto dire di calcolare sui tre tronchi gli integrali dei prodotti $M \frac{\partial M}{\partial P_m}$ valutati per $P_m=0$; con questa accortezza, stanti le espressioni di $\partial M / \partial P_m$ di cui all'ultima colonna della stessa Tabella II/28 e la evidente ricorrenza di termini nei tre tronchi, la detta (a') prende la forma esplicita:

$$\eta_m = \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3} \cdot \frac{a_m^2(3l-a_m)}{2l^3} z^2 dz - \int_b^l \frac{Pa_m^2(3l-a_m)}{2l^3} (z-b) z dz - \int_{b_m}^l \left[\frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3} z - P(z-b) \right] (z-b_m) dz .$$

A calcoli fatti risulta per η_m l'espressione:

$$(c) \quad \eta_m = \frac{Pa_m^2}{12EJl^3} [2l^3(3a-a_m) - a^2(3l-a)(3l-a_m)] .$$

Per $a_m=a$ questa fornisce lo spostamento della sezione sotto al carico P ; precisamente:

$$(c') \quad \eta_P = \frac{Pa^3}{12EJl^3} [4l^3 - a(3l-a)^2] .$$

In particolare se il carico P è in mezzeria, sicchè $a = \frac{l}{2}$, risulta da questa:

$$(c'') \quad \eta_{l/2} = \frac{7}{768} \cdot \frac{P l^3}{EJ},$$

che è anche una vecchia conoscenza della teoria delle travi inflesse.

Nel caso, già accennato di sopra, che sulla trave agiscano n carichi concentrati $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_n$, la (c) fornirebbe il contributo $\eta_m^{(i)}$ che ha nello spostamento di S_m il generico di essi, P_i , quando vi si introduca a_i in luogo di a ; lo spostamento complessivo η_m della sezione sarebbe dunque, sovrapponendo gli effetti:

$$(d) \quad \eta_m = \frac{a_m^3}{12 EJ^3} \sum_i^n P_i [2l^3 (3a_i - a_m) - a_i^2 (3l - a_i) (3l - a_m)] .$$

Esercizio 29 — Risolvere il portale zoppo studiato all'Esercizio 3, per la stessa condizione di carico di allora (fig. 55 a)) e nell'ipotesi che i vincoli siano rigidi.

—♦—

Scelto lo stesso sistema principale di allora (fig. 55 b)), si riguardi, come al solito, la incognita iperstatica X come una forza esplicita.

Nel riferimento $A(s, y)$ utilizzato in figura 9, con l'asse s orizzontale rivolto verso destra e quello y positivo verso l'alto, le reazioni dei vincoli in tale sistema per la

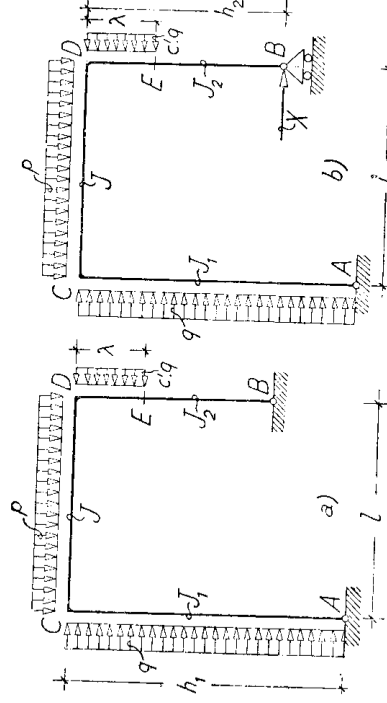


Fig. 55

condizione globale di carico assumono allora in modo immediato le espressioni:

$$A = \frac{pl}{2} - \frac{1}{l} \left[\frac{qh_1^2}{2} - c'q\lambda \left(h_1 - \frac{\lambda}{2} \right) + X(h_1 - h_2) \right] ;$$

$$B = \frac{pl}{2} + \frac{1}{l} \left[\frac{qh_1^2}{2} - c'q\lambda \left(h_1 - \frac{\lambda}{2} \right) + X(h_1 - h_2) \right] ;$$

$$H_A = -X - q(h_1 - c'\lambda) .$$

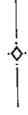
Utilizzando ancora, per comodità, sul ritto di destra il riferimento $D(z, y')$ con l'asse y' positivo verso il basso, si riconoscono in modo immediato per M e la sua derivata rispetto ad X nei vari tronchi del sistema, le leggi raccolte nella Tabella I/29.

TABELLA I/29

TRONCO	M	$\frac{\partial M}{\partial X}$
$AC (0 \leq y \leq h_1)$	$H_A y - \frac{qy^2}{2} = q \left(h_1 - c'\lambda - \frac{y}{2} \right) y + Xy$	y
$CD (0 \leq z \leq l)$	$Az + H_A h_1 - \frac{qh_1^2}{2} - \frac{pz^2}{2} = \left(\frac{pz}{2} + \frac{qh_1^2}{2l} - \frac{c'q\lambda h_1}{l} \right) (l-z) - \frac{c'q\lambda^2}{2l} z + \frac{1}{l} [h_1(l-z) + h_2z] X$	$\frac{1}{l} [h_1(l-z) + h_2z]$
$DE (0 \leq y' \leq \lambda)$	$X(h_2 - y') - \frac{c'q(\lambda - y')^2}{2}$	$h_2 - y'$
$EB (\lambda \leq y' \leq h_2)$	$X(h_2 - y')$	$h_2 - y'$

Introducendo nella (d) di pag. 138, si può riconoscere che si ottiene la stessa equazione di pag. 36 e quindi la stessa soluzione data allora per X ; per l'analisi di questa soluzione rimandiamo all'Esercizio 3.

Esercizio 30 — Risolvere il sistema di fig. 56a), costituito di una trave rinforzata da un puntone, nell'ipotesi che i vincoli siano rigidi, e determinare gli abbassamenti dell'estremo libero B e del punto C .



Scelto il sistema principale rimuovendo l'articolazione del vincolo D (fig. 56b)), l'incognita iperstatica X , coincidente con lo sforzo nel puntone, ac-

quista il carattere di forza esterna, avente come punto di applicazione l'estremo D del puntone stesso e interessante perciò l'intero sistema trave-puntone.

Si noti che, come si è praticato altre volte applicando il principio dei l.v. (cfr. gli Ess. 13, 14, ecc.), avremmo anche potuto rimuovere il collegamento in C ; ciò sarebbe equivale a riguardare come sistema la tra-

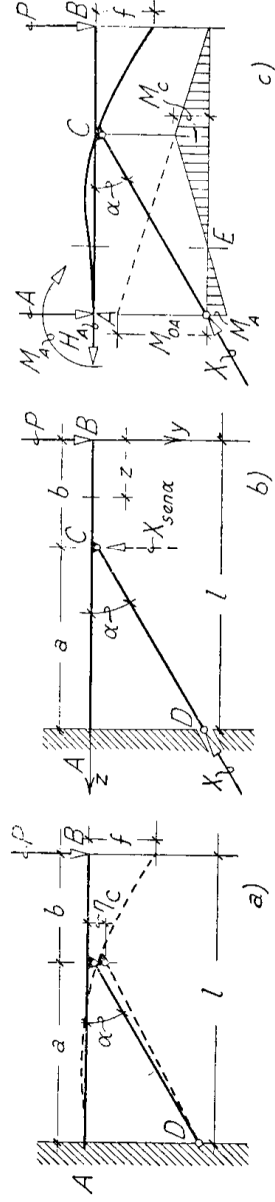


Fig. 56

ve AB e il puntone CD invece come un vincolo elastico; secondo quanto avvertimmo alla pag. 136, avremmo potuto anche con questa seconda scelta applicare il Teorema di Castigliano, salvo però l'accortezza di tener conto in modo esplicito della elasticità del puntone — la quale comporta uno spostamento del punto di unione C — e quindi della relativa quota di lavoro di deformazione; con la scelta che si è fatto, questo compito viene invece fatto in modo automatico, in quanto, come detto, il sistema è così il complesso trave-puntone; d'altra parte il primo membro della (d) acquista il significato di spostamento secondo l'asse del pun-

TABELLA I/30

TRONCO	N	M	$\frac{\partial N}{\partial X}$	$\frac{\partial M}{\partial X}$
BC ($0 \leq z \leq b$)	0	$-Pz$	0	0
CA ($b \leq z \leq l$)	$+X \cos \alpha$	$-Pz + X \sin \alpha (z-b)$	$+ \cos \alpha$	$\sin \alpha (z-b)$
CD ($0 \leq s \leq \frac{a}{\cos \alpha}$)	$-X$	0	-1	0

tone del punto di vincolo D in cui si sviluppa la reazione X , spostamento che è nullo per la supposta rigidità del vincolo.

Pensata dunque la X alla stregua di forza esplicita, avuto riguardo al riferimento $B(z, y)$ indicato in fig. 56b), e trascurando il taglio, si hanno lungo il sistema per il momento e per la forza normale, e quindi anche per le loro derivate rispetto ad X , le leggi della Tabella I/30.

La (d) di pag. 138, sostituendovi questi elementi nei primi due integrali a secondo membro, diviene:

$$0 = \frac{1}{\Omega} \int_b^l X \cos^2 \alpha \, dz + \frac{1}{\Omega} \int_0^{a/\cos \alpha} X \, ds + \frac{1}{J} \int_b^l [-Pz + X \sin \alpha (z-b)] (z-b) \sin \alpha \, dz ;$$

osservando che $l-b=a$ e posto $\bar{\rho}^2 = J/\Omega$, $\bar{\rho}^2 = J/\bar{\Omega}$, si riconosce facilmente la soluzione:

$$(a) \quad X = \frac{a(3l-a) \sin \alpha \cos \alpha}{2[3\bar{\rho}^2 \cos^3 \alpha + 3\bar{\rho}^2 + a^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha]} P = kP .$$

Il segno positivo di X assicura che questa è del senso previsto, che cioè il rinforzo CD funziona da puntone.

Determinata così l'iperstatica, è immediato tracciare il diagramma dei momenti (fig. 56c), dal quale è palese la modifica che vi apporta il rinforzo nei confronti di quello per la mensola libera; in particolare il momento d'incastro passa dal valore negativo $M_A = -Pl$ in assenza di rinforzo, al valore:

$$M_A = -Pl + Xa \sin \alpha = -P(l - ka \sin \alpha) ,$$

il quale può essere o ancora negativo, o nullo, ovvero positivo in dipendenza del valore che ha il coefficiente k , vale a dire, in definitiva, in relazione alla rigidezza $E\bar{\Omega}$ del puntone CD .

Ci poniamo qui, come caso particolare, nell'ipotesi limite che tale rigidezza sia infinita, vale a dire che nella (a) sia $\bar{\rho} = 0$; trascurando allora ulteriormente anche il modesto contributo della forza normale nel tronco AC della trave, cioè facendo nella stessa (a) anche $\rho = 0$, per modo che l'incognita iperstatica assume la forma più semplice:

$$(a') \quad X = \frac{Pa(3l-a) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha} = \frac{P(3l-a)}{2a \operatorname{sen} \alpha},$$

- questo essendo anche il massimo valore che l'incongnita stessa può assumere - risulterebbe:

$$M_A = -Pl + \frac{P(3l-a)}{2a \operatorname{sen} \alpha} \cdot a \operatorname{sen} \alpha = \frac{P(l-a)}{2} = \frac{Pb}{2} = -\frac{Mc}{2} > 0.$$

Il diagramma di fig. 56c) è relativo a questa ipotesi limite. Nella stessa figura è anche indicata la corrispondente deformata della trave, a giustificazione della quale è forse opportuno osservare che la ipotesi di rigidezza a forza normale per il puntone e per il tronco AC, equivale a supporre fisso il punto C; nella fig. 56a) è invece indicata, per confronto, la deformata nel caso che sia messa in conto la deformabilità del puntone, ciò che comporta un abbassamento η_c di detto punto; è ovvio che a questa deformata fa riscontro per il diagramma dei momenti una configurazione intermedia fra le due limiti indicate in fig. 56c).

TABELLA II/30

TRONCO	N	M	$\frac{\partial N}{\partial P}$	$\frac{\partial N}{\partial X'}$	$\frac{\partial M}{\partial P}$	$\frac{\partial M}{\partial X'}$
BC ($0 \leq z \leq b$)	0	$-Pz$	0	0	$-z$	0
CA ($b \leq z \leq l$)	$kP \cos \alpha$	$-P[z-k(z-b) \operatorname{sen} \alpha]$	$k \cdot \cos \alpha$	0	$-[z-k(z-b) \operatorname{sen} \alpha]$	$z-b$
CD ($0 \leq s \leq \frac{a}{\cos \alpha}$)	$-kP$	0	$-k$	0	0	0

Ci proponiamo di esprimere per questa situazione intermedia la freccia f all'estremo della trave e lo spostamento verticale η_c del punto C.

Per quanto riguarda f , giacchè all'estremo B si ha il carico esplicito P , basta applicare direttamente la (d) introducendovi la legge di M nei due tronchi BC e CA e quella della sua derivata rapporto a P ; questi elementi si deducono dalla Tabella II/30, in cui le ca-

ratteristiche N ed M sono state rese esplicite mediante la soluzione (a) del problema.

Risulta dunque:

$$f = \frac{1}{E\Omega} \int_b^l P k^2 \cos^2 \alpha \, dz + \frac{1}{E\bar{\Omega}} \int_0^{a/\cos \alpha} P k^2 \, ds + \frac{1}{EJ} \int_0^b P z^2 \, dz + \frac{1}{EJ} \int_b^l P [z-k(z-b) \operatorname{senz}]^2 \, dz,$$

da cui, ricordando che $l-b=a$, si ricava:

$$(b) \quad f = \frac{P a k^2}{E} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\Omega} + \frac{1}{\bar{\Omega} \cos \alpha} \right) + \frac{P l^3}{3 EJ} - \frac{P k a^2 \operatorname{senz}}{3 EJ} [(3l-a) - a k \operatorname{senz}].$$

Nell'ipotesi della soluzione (a'), in cui è $k=(3l-a)/2a \operatorname{senz}$, risulta invece più semplicemente:

$$(b') \quad f = \frac{P l^3}{3 EJ} - \frac{P a (3l-a)^2}{12 EJ}.$$

In modo analogo per valutare η_c , cioè a dire lo spostamento del punto C in cui è applicata la X nella direzione della componente $X' = X \operatorname{senz} = k P \operatorname{senz}$, basta associare alle stesse leggi di N ed M sopra utilizzate quelle delle derivate di M rispetto a tale componente, derivate che figurano pure nella Tabella II/30; con riguardo a questa Tabella e al fatto che lo spostamento è certamente di senso opposto alla componente X' , è dunque in modo quanto mai semplice:

$$(c) \quad \eta_c = - \int_b^l \frac{-P[z-k(z-b) \operatorname{senz}](z-b)}{EJ} \, dz = \frac{P a^2 (3l-a)}{6 EJ} - \frac{P k a^3 \operatorname{senz}}{3 EJ}.$$

Per k col particolare valore che risulta dalla (a') è invece:

$$\eta_c = \frac{P a^2 (3l-a)}{6 EJ} - \frac{P a^3 \operatorname{senz}}{3 EJ} \cdot \frac{3l-a}{2 a \operatorname{senz}} = 0,$$

che è il risultato anticipato più sopra, interpretando nei confronti dello spostamento di C l'ipotesi della rigidità a forza normale della trave e del puntone (fig. 56 c)).

Esercizio 31 — Risolvere il sistema di fig. 57 a) e determinare gli spostamenti verticali η_B e η_D degli estremi delle due mensole AB e CD collegate dal tirante BD .

—•—

Si tratta dello stesso sistema studiato all'Esercizio 13 (pag. 75), con la stessa scelta di allora per il sistema principale (fig. 57b)); l'incognita iperstatica, a differenza dei casi finora trattati col Teorema di Castigliano, è dunque interna, e perciò costituita di due forze opposte applicate ai due capi della articolazione rimossa in B ; il primo membro della (d) di pag. 138 ha in questo caso il significato di spostamento relativo dei due capi dell'articolazione stessa, e pertanto è ancora nullo, come quando si trattava, per vincoli perfetti, di una indeterminazione esterna.

Seppure in un ordine di idee sostanzialmente diverso dalla forma diretta, il Teorema di Castigliano è ancora applicabile senza accorgimenti particolari, semprechè, beninteso, i vincoli siano perfetti o comunque non si abbiano cause di coazione nel sistema.

Nel riferimento $B(z, y)$ utilizzato in fig. 28, con l'asse z positivo verso sinistra, si hanno nei vari tronchi, in funzione anche della iperstatica X come

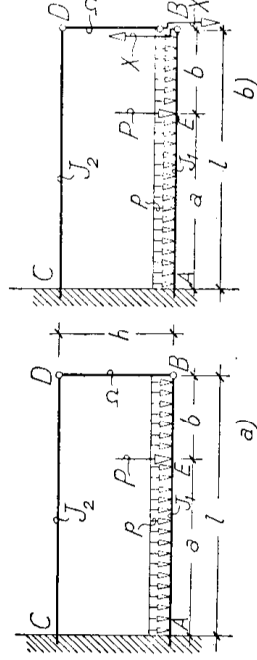


Fig. 57

TABELLA I/31

TRONCO	N	M	$\frac{\partial N}{\partial X}$	$\frac{\partial M}{\partial X}$
BE ($0 \leq z \leq b$)	0	$-Xz + \frac{pz^2}{2}$	0	$-z$
EA ($b \leq z \leq l$)	0	$-Xz + \frac{pz^2}{2} + P(z-b)$	0	$-z$
BD ($0 \leq y \leq h$)	$+X$	0	1	0
DC ($0 \leq z \leq l$)	0	$-Xz$	0	$-z$

forza esplicita, per M ed N , e quindi per le loro derivate rispetto ad X , le leggi indicate nella Tabella I/31.