

e per ordine, la componente orizzontale X_1 in B , il momento X_2 nella stessa sezione e quello X_3 in A .

L'effetto del carico esplicito sul sistema che così si ottiene è, limitandoci al momento, quello indicato in fig. 47a); per comodità separeremo anche qui, come altra volta si è fatto, e li contrassegneremo con uno e due apici rispettivamente, i contributi del carico ripartito e quelli della forza H ; le reazioni dei vincoli sono allora successivamente:

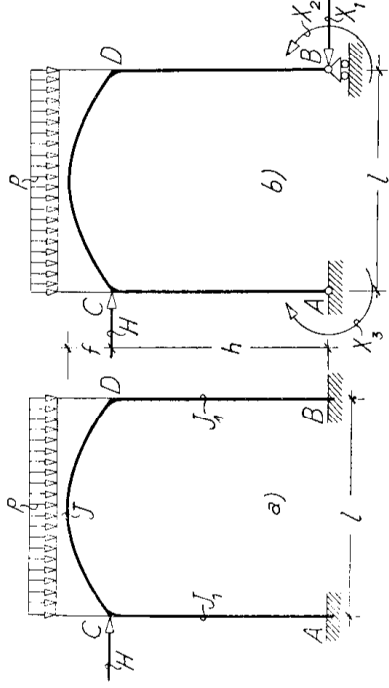


Fig. 46

$$A_0 = A'_0 + A''_0 = \frac{pl}{2} - \frac{hH}{l}, \quad B_0 = B'_0 + B''_0 = \frac{pl}{2} + \frac{hH}{l}, \quad H_0^{(A)} = -H.$$

Con riguardo al riferimento $A(z, y)$ di fig. 47a), si hanno in conseguenza sui vari tronchi del sistema le leggi del momento M_0 indicate nella Tabella I/23, alle quali fa riscontro il diagramma della fig. 47a), dove per il tronco parabolico è stata assunta come fondamentale la corda CD .

Alla condizione isolata $X_1 = 1$ corrispondono poi le leggi, già note dall'Esercizio 11, riportate nella stessa Tabella I/23 e il diagramma di fig. 47b), con la stessa avvertenza di sopra per la fondamentale relativa al tronco intermedio.

TABELLA I/23

TRONCO	M_0	M_1	M_2	M_3
$AC (0 \leq y \leq h)$	$+Hy$	$-1 \cdot y$	0	$+\bar{1}$
$CD (0 \leq z \leq l)$	$+\left(\frac{Hh}{l} + \frac{pz}{2}\right)(l-z)$	$-1 \cdot y$	$+\frac{\bar{1}}{l}z$	$+\frac{\bar{1}}{l}(l-z)$
$BD (0 \leq y \leq h)$	0	$-1 \cdot y$	$+\bar{1}$	0

Per quanto riguarda infine le altre due condizioni unitarie $X_2 = \bar{1}$ e $X_3 = \bar{1}$, le cose vanno in modo perfettamente identico a come già riconosciuto all'Esercizio precedente (fig. 45b)), riprodotto d'altronde in figura 47c) dai due diagrammi simmetrici a tratto pieno

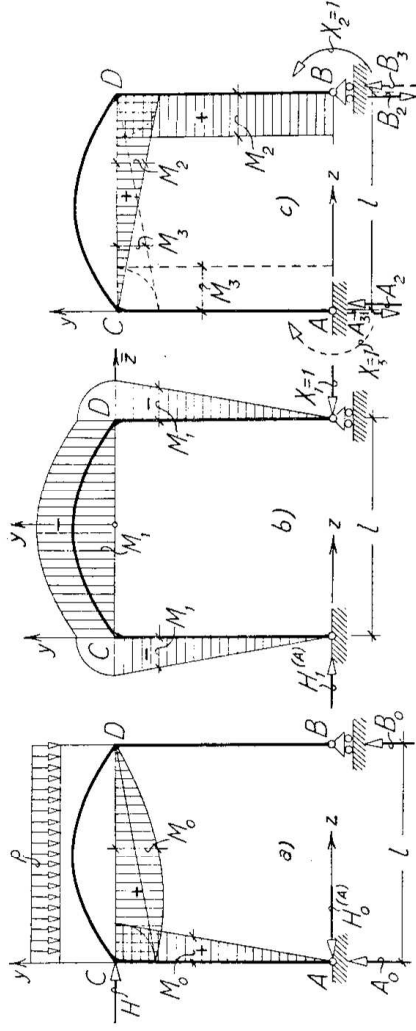


Fig. 47

e punteggiato, e indicato nelle ultime due colonne della Tabella I/23.

Ne seguono per i prodotti MM_i nei singoli tronchi le leggi raccolte nella Tabella II/23, nella quale, per ragioni di ingombro, è stato posto $z' = l - z$, e dove è notoriamente da intendere che $M = M_0 + M_1X_1 + M_2X_2 + M_3X_3$.

TABELLA II/23

TRONCO	$AC (0 \leq y \leq l)$	$CD (0 \leq z \leq b)$	$BD (0 \leq y \leq h)$
MM_1	$-1 \cdot (Hy - 1 \cdot X_1y + 1 \cdot X_3)y$	$-1 \cdot \left[\left(\frac{Hh}{l} + \frac{pz}{2} \right) z' - 1 \cdot X_1y + \frac{1}{l} X_2z + \frac{1 \cdot X_3z'}{l} \right]$	$y - 1 \cdot (-1 \cdot X_1y + 1 \cdot X_2)y$
MM_2	0	$+1 \cdot \left[\left(\frac{Hh}{l} + \frac{pz}{2} \right) z' - 1 \cdot X_1y + \frac{1}{l} X_2z + \frac{1 \cdot X_3z'}{l} \right]$	$\frac{z}{l} + 1 \cdot (-1 \cdot X_1y + 1 \cdot X_2)$
MM_3	$+1 \cdot (Hy - 1 \cdot X_1y + 1 \cdot X_3)$	$-1 \cdot \left[\left(\frac{Hh}{l} + \frac{pz}{2} \right) z' - 1 \cdot X_1y + \frac{1}{l} X_2z + \frac{1 \cdot X_3z'}{l} \right]$	0

Relativamente al tronco parabolico, onde esprimere in modo comodo nelle leggi MM_i la y in funzione di z , conviene passare, per il calcolo, dal riferimento $A(z, y)$ finora utilizzato a quello costituito dalla corda $\bar{z}$ e dall'asse $\bar{y}$ dell'arco (fig. 47b)), riferimento nel

quale l'equazione dell'arco ha notoriamente la forma:

$$\bar{y} = f - \frac{4f}{l^2} \bar{z}^2 = f \left(1 - \frac{4}{l^2} \bar{z}^2\right).$$

Detto passaggio si compie in modo automatico introducendo nelle espressioni MM_i della Tabella le seguenti ovvie relazioni fra le vecchie e le nuove coordinate:

$$(2) \quad y = h + \bar{y} \quad ; \quad z = \frac{l}{2} + \bar{z} \quad \text{e quindi anche} \quad z' = l - z = \frac{l}{2} - \bar{z}.$$

Con tali sostituzioni, e posto di più:

$$(3) \quad h_0 = h + f \quad ; \quad \lambda = \frac{2\bar{z}}{l},$$

è facile riconoscere che, limitatamente al tronco parabólico, queste leggi diventano rispettivamente:

$$\begin{aligned} MM_1 &= -1 \left[\frac{Hh}{2} (1-\lambda) + \frac{pl^2}{8} (1-\lambda^2) - 1.X_1(h_0 - f\lambda^2) + \frac{1}{2} (\bar{1}.X_2 + \bar{1}.X_3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\bar{1}.X_2 - \bar{1}.X_3)\lambda \right] (h_0 - f\lambda^2); \\ MM_2 &= +1 \left[\frac{Hh}{2} (1-\lambda) + \frac{pl^2}{8} (1-\lambda^2) - 1.X_1(h_0 - f\lambda^2) + \frac{1}{2} (\bar{1}.X_2 + \bar{1}.X_3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\bar{1}.X_2 - \bar{1}.X_3)\lambda \right] \frac{1}{2} (1+\lambda); \\ MM_3 &= +1 \left[\frac{Hh}{2} (1-\lambda) + \frac{pl^2}{8} (1-\lambda^2) - 1.X_1(h_0 - f\lambda^2) + \frac{1}{2} (\bar{1}.X_2 + \bar{1}.X_3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\bar{1}.X_2 - \bar{1}.X_3)\lambda \right] \frac{1}{2} (1-\lambda). \end{aligned}$$

Sulla base di questi elementi e della Tabella II/23, le tre equazioni di elasticità occorrenti a determinare le tre incognite X_1, X_2, X_3 , stante l'ipotesi che gli incastri siano rigidi, e osservando che in virtù della seconda delle posizioni (2) i limiti di integrazione si cambiano da $(0, l)$ per z in $(-\frac{l}{2}, +\frac{l}{2})$ per $\bar{z}$ e, successivamente, per la seconda delle (3), in $(-1, +1)$ per λ , essendo di più $d\bar{z} = \frac{l}{2} d\lambda$, divengono:

$$\begin{aligned}
 1^a) \quad 0 &= \frac{1}{J_1} \int_{-1}^h \left[-(Hy - 1.X_1y + \bar{1}.X_3) \right] y dy - \frac{1}{J_1} \int_0^h [-1.X_1y + \bar{1}.X_2] y dy - \\
 &\quad - \frac{1}{J} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{Hh}{2} (1-\lambda) + \frac{pl^2}{8} (1-\lambda^2) - 1.X_1(h_0-f\lambda^2) + \frac{1}{2} (1.X_2 + \bar{1}.X_3) + \frac{1}{2} (1.X_2 - \bar{1}.X_3) \lambda \right] \times \\
 &\quad \times (h_0 - f\lambda^2) \frac{l}{2} d\lambda ; \\
 2^a) \quad 0 &= \frac{1}{J} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{Hh}{2} (1-\lambda) + \frac{pl^2}{8} (1-\lambda^2) - 1.X_1(h_0-f\lambda^2) + \frac{1}{2} (\bar{1}.X_2 + \bar{1}.X_3) + \frac{1}{2} (\bar{1}.X_2 - \bar{1}.X_3) \lambda \right] \times \\
 &\quad \times \frac{l}{4} (1+\lambda) d\lambda + \frac{1}{J_1} \int_0^h (-1.X_1y + \bar{1}.X_2) dy ; \\
 3^a) \quad 0 &= \frac{1}{J} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{Hh}{2} (1-\lambda) + \frac{pl^2}{8} (1-\lambda^2) - 1.X_1(h_0-f\lambda^2) + \frac{1}{2} (\bar{1}.X_2 + \bar{1}.X_3) + \frac{1}{2} (\bar{1}.X_2 - \bar{1}.X_3) \lambda \right] \times \\
 &\quad \times \frac{l}{4} (1-\lambda) d\lambda + \frac{1}{J_1} \int_0^h (Hy - 1.X_1y + \bar{1}.X_3) dy .
 \end{aligned}$$

Da queste, sviluppando gli integrali e riducendo, si perviene in definitiva al seguente sistema:

$$\begin{aligned}
 1.X_1 \left[\frac{2}{3} \vartheta h^3 + l(h^2 + \frac{4}{3} hf + \frac{8}{15} f^2) \right] - (\bar{1}.X_2 + \bar{1}.X_3) \left[\frac{\vartheta h^2}{2} + l \left(\frac{h}{2} + \frac{f}{3} \right) \right] &= \\
 = H \left[\frac{\vartheta h^3}{3} + hl \left(\frac{h}{2} + \frac{f}{3} \right) \right] + \frac{1}{12} pl^3 (h + \frac{4}{5} f) ; \\
 1.X_1 \left[\frac{1}{2} \vartheta h^2 + l \left(\frac{h}{2} + \frac{f}{3} \right) \right] - \bar{1}.X_2 \left[\vartheta h + \frac{l}{3} \right] - \bar{1}.X_3 \frac{l}{6} &= \frac{Hhl}{6} + \frac{pl^3}{24} ; \\
 1.X_1 \left[\frac{1}{2} \vartheta h^2 + l \left(\frac{h}{2} + \frac{f}{3} \right) \right] - \bar{1}.X_2 \frac{l}{6} - \bar{1}.X_3 \left[\vartheta h + \frac{l}{3} \right] &= H \left[\frac{\vartheta h^2}{2} + \frac{hl}{3} \right] + \frac{pl^3}{24} .
 \end{aligned}$$

Con evidente significato dei simboli, per facilitarne la risoluzione, porremo il sistema nella forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.X_1.k_1 - (\bar{1}.X_2 + \bar{1}.X_3) k_2 = k_{10} \\ 1.X_1.k_1' - \bar{1}.X_2 k_2' - \bar{1}.X_3 k_3' = k_{20} \\ 1.X_1.k_1' - \bar{1}.X_2 k_2'' - \bar{1}.X_3 k_3'' = k_{30} . \end{array} \right.$$

Procedendo in modo del tutto analogo a quello seguito all'Esercizio precedente, se alla 2^a di queste equa-

zioni una volta si toglie una volta si aggiunge la terza e se si fanno, stanti le ovvie relazioni sotto

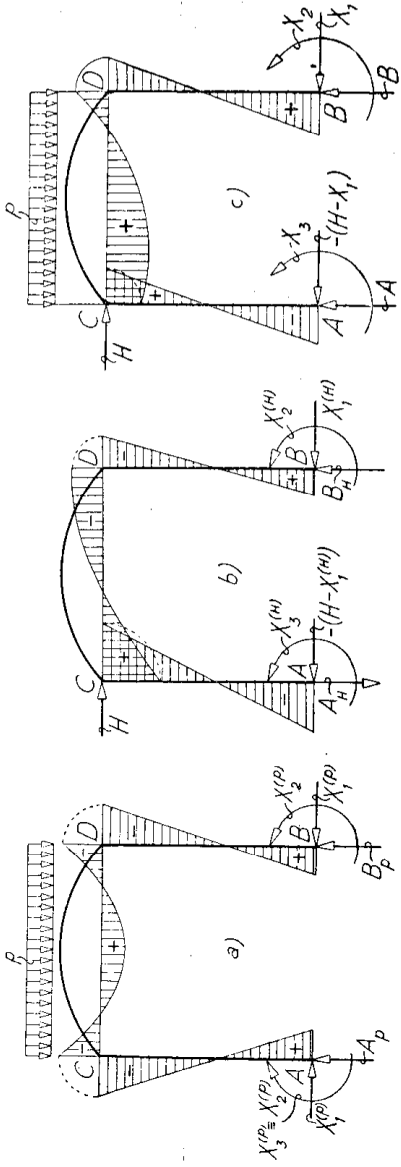


Fig. 48

indicate fra i coefficienti k' e k'' , queste ulteriori posizioni:

$$(a) \quad k'_2 + k''_2 = k'_3 + k''_3 = \mathfrak{H}h + \frac{l}{2} = \bar{k}_2 ;$$

$$(b) \quad k'_2 - k''_2 = -(k'_3 - k''_3) = \mathfrak{H}h + \frac{l}{6} = \bar{k}_3 ;$$

$$(c) \quad k_{30} + k_{30} = H \frac{h}{2} (l + \mathfrak{H}h) + \frac{pl^2}{12} = \bar{k}_{20} ;$$

$$(d) \quad -(k_{20} - k_{30}) = -H \frac{h}{2} \left(\frac{l}{3} + \mathfrak{H}h \right) = \bar{k}_{30} ,$$

si ottiene nella somma e nella differenza delle due incognite X_2 e X_3 il sistema parziale:

$$(e) \quad \bar{1}.X_2 + \bar{1}.X_3 = \frac{1.X_1 \cdot 2k'_1 - \bar{k}_{30}}{k_2} ;$$

$$(f) \quad \bar{1}.X_2 - \bar{1}.X_3 = \frac{\bar{k}_{30}}{\bar{k}_3} .$$

Dalla prima delle stesse equazioni è però anche per la somma delle medesime due incognite:

$$(e') \quad \bar{1}.X_2 + \bar{1}.X_3 = \frac{1.X_1 \cdot k_1 - k_{10}}{k_2} .$$

Uguagliando perciò i secondi membri delle (e) ed (e'), discende intanto per la $1.X_1$ la soluzione:

$$(g_1) \quad 1.X_1 = \frac{\bar{k}_{20} k_2 - k_{10} \bar{k}_2}{2 k_1' k_2 - k_1 \bar{k}_2}.$$

Per sostituzione nella (e), si dispone in definitiva per determinare i due momenti al piede del seguente sistema:

$$\begin{aligned} 1.X_2 + 1.X_3 &= \frac{2 k_1' (\bar{k}_{20} k_2 - k_{10} \bar{k}_2) - \bar{k}_{20} (2 k_1' k_2 - k_1 \bar{k}_2)}{\bar{k}_2 (2 k_1' k_2 - k_1 \bar{k}_2)}; \\ 1.X_2 - 1.X_3 &= \frac{\bar{k}_{30}}{k_3}, \end{aligned}$$

dal quale per somma e differenza si ottengono immediatamente:

$$\begin{aligned} (g_2) \quad 1.X_2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2 k_1' (\bar{k}_{20} k_2 - k_{10} \bar{k}_2) - \bar{k}_{20} (2 k_1' k_2 - k_1 \bar{k}_2)}{\bar{k}_2 (2 k_1' k_2 - k_1 \bar{k}_2)} + \frac{\bar{k}_{30}}{k_3} \right]; \\ (g_3) \quad 1.X_3 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2 k_1' (\bar{k}_{20} k_2 - k_{10} \bar{k}_2) - \bar{k}_{20} (2 k_1' k_2 - k_1 \bar{k}_2)}{\bar{k}_2 (2 k_1' k_2 - k_1 \bar{k}_2)} - \frac{\bar{k}_{30}}{k_3} \right]. \end{aligned}$$

Le (g_1) , (g_2) e (g_3) costituiscono la soluzione del problema; per ottenerla mediante i dati, cioè i carichi p ed H e le caratteristiche geometriche del sistema, basterebbe introdurvi per i k_i , k_i' , $\bar{k}_i$ e $\bar{k}_{i0}$ le posizioni convenute di sopra; lasciamo questo compito a chi legge, come gli lasciamo anche di riconoscere, una volta in possesso della soluzione nella forma definitiva, l'andamento del diagramma dei momenti indicato nella fig. 48 a) b), separatamente per il contributo del carico uniforme p e della forza H , e nella fig. 48 c) che cumula invece gli effetti.

Esercizio 24 — Risolvere la travatura reticolare di fig. 49 a), del tipo Ponceau, con luce l e rialzamento ρ , nell'ipotesi che le cerniere siano rigide.

—♦—

La travatura, internamente isostatica, presenta una indeterminazione esterna: ad es. la componente orizz-

zontale X della reazione della cerniera B (fig. 49b)).

La condizione di carico indicata è quella tipica agente sopra una capriata per copertura: il carico verticale p può infatti tener conto del peso proprio e di un eventuale sovraccarico di neve; i carichi uniformi q e q' normali alle due falde, possono invece assimilare, insieme, l'azione del vento, e propriamente: q l'azione diretta sulla falda di sinistra, q' quella di risucchio sulla falda di destra ⁽¹⁾.

Nei due casi, grazie all'interposizione, fra la capriata e la piccola orditura che sostiene la coperta, di elementi longitudinali (*arcarecci* o *terzere*) posati in corrispondenza dei nodi, la capriata risulta gravata

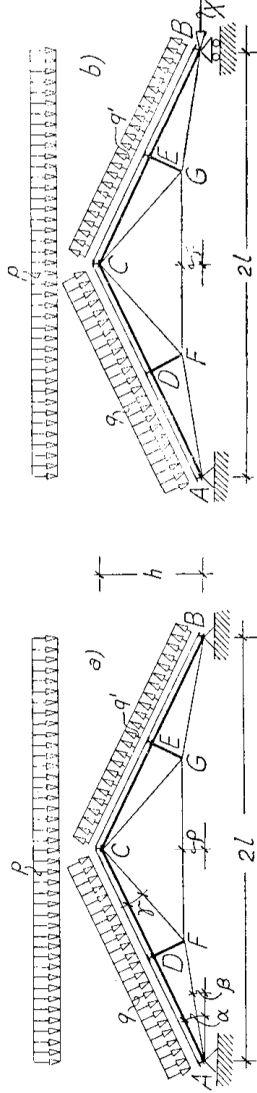


Fig. 49

da carichi concentrati ai nodi; sicchè, separandole per comodità, le due condizioni in parola equivalgono a quelle indicate nello schema di fig. 50a), al quale pertanto ci riferiremo per risolvere la travatura.

In armonia a quanto praticato fino ad ora nei sistemi a parete piena e a quanto suggerisce la (4') di pag. 16, nella quale gli sforzi S — forniti dalla (5') di pag. 17 — hanno per il caso attuale la forma semplice:

$$(a) \quad S = S_0 + S'X,$$

si tratta di determinare preventivamente in tutte le aste della travatura principale gli S_0 che conducono alla condizione effettiva di carico e quelli S' che conducono invece all'unica forza fittizia $X=1$ applicata orizzontalmente in B .

⁽¹⁾ V. quando detto all'Esercizio 2 pag. 25.

Separando gli effetti dei due carichi espliciti, gli S_0 possono porsi nella forma:

$$(b) \quad S_0 = S_0^{(p)} + S_0^{(q,q')},$$

dove è manifesto che il primo addendo è relativo al carico verticale, il secondo invece è relativo al vento.

Avendo qui la ricerca scopo puramente indicativo sulla condotta del calcolo, ci limiteremo, per brevità, a considerare il solo carico verticale.

Tanto gli S_0 che gli S' , trattandosi di travatura a nodi canonici ⁽¹⁾, possono essere determinati nel modo più comodo mediante un cremoniano; quello relativo agli S_0 , per carico verticale, è indicato in fig. 50 a'), e poteva essere costruito per mezza travatura soltanto, grazie alla simmetria; si può non di meno, procurando ci così insieme un controllo delle operazioni grafiche, dare facilmente le espressioni analitiche degli S_0 in funzione del carico P e degli elementi geometrici dello schema, risolvendo a catena, da un nodo all'altro, gli n sistemi di due equazioni in due incognite, nei quali si spezza il sistema generale delle $2n$ equazioni necessarie a determinare le $2n$ incognite del problema, fra cui anche le reazioni dei vincoli ⁽²⁾.

Per queste ultime, la simmetria fornisce intanto in modo immediato:

$$(c) \quad A = B = \frac{1}{2} \left(3P + 2 \cdot \frac{P}{2} \right) = 2P.$$

Nel nodo A , gli sforzi nelle aste 8 e 9 devono dunque equilibrare la forza verticale:

$$(c') \quad A_0 = A - \frac{P}{2} = \frac{3}{2} P,$$

risultante delle forze esterne nel nodo stesso.

Se si suppone, come di solito, che le due aste funzionino ambedue da tiranti, con riguardo al riferi-

⁽¹⁾ Cfr. MAGINI - Statica Grafica - Ed. C. Corsi Fisa, 1947, pag. 283.

⁽²⁾ Cfr. " I. c.

mento $A(x, y)$ e alle notazioni di fig. 50a), si ha allora negli sforzi S_8 e S_9 il seguente sistema di equazioni

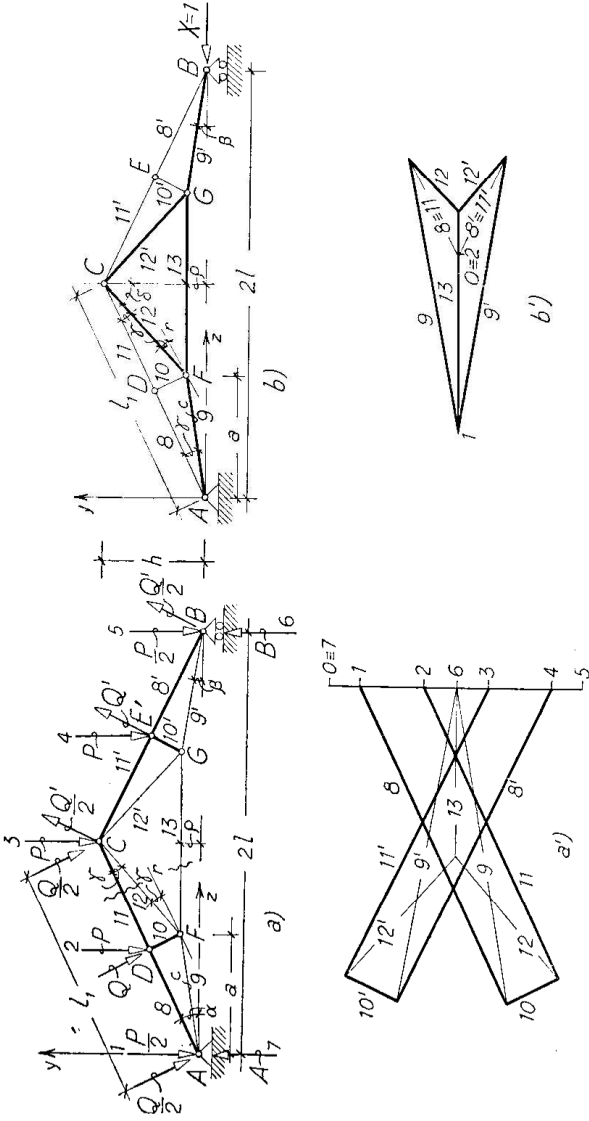


Fig. 50

[esprimenti l'equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale del nodo A]:

$$(1) \quad \begin{cases} S_8 \cos \alpha + S_9 \cos \beta = 0 \\ S_8 \sin \alpha + S_9 \sin \beta + \frac{3}{2} P = 0, \end{cases}$$

dove è:

$$(d) \quad \sin \alpha = \frac{h}{l_1} ; \quad \cos \alpha = \frac{l}{l_1} ; \quad \sin \beta = \frac{\rho}{c} ; \quad \cos \beta = \frac{a}{c} .$$

Con le posizioni:

$$(e) \quad \begin{cases} k_8 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha - \cos \alpha \tan \beta} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a l_1}{a h - \rho l} ; \\ k_9 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cos \beta \tan \alpha - \sin \beta} = \frac{3}{2} \cdot \frac{c l}{a h - \rho l} , \end{cases}$$

è immediato riconoscere che il sistema (1) ammette come soluzione:

$$(f_1) \quad S_8 = -k_8 P ; \quad S_9 = k_9 P ;$$

delle due aste dunque, contrariamente al supposto e

come invece risulta dal cremoniano, la 8 funziona da puntone.

Nel nodo D , dove è già noto lo sforzo S_8 , si scriverebbe ora in modo analogo un sistema di due equazioni nelle incognite S_{10} e S_{11} proiettando sull'orizzontale e sulla verticale. È però più conveniente scegliere come direzioni di proiezione quella della falda AC e la sua ortogonale, cioè quella del contraffisso DF , in quanto così le due equazioni contengono ognuna una sola incognita; si ha infatti in tal modo il sistema:

$$(2) \quad \begin{cases} S_{10} + P \cos \alpha = 0 \\ S_{11} + k_8 P - P \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

che ha per soluzione:

$$(f_2) \quad S_{10} = -P \cos \alpha = -k_{10} P \quad ; \quad S_{11} = -(k_8 - \sin \alpha) P = -k_{11} P ,$$

avendo posto, per uniformità di notazioni:

$$(g) \quad k_{10} = \cos \alpha = \frac{l}{l_1} \quad ; \quad k_{11} = k_8 - \sin \alpha = k_8 - \frac{h}{l_1} .$$

Ai sensi delle (f_2) e ancora in accordo col cremoniano, ambedue le aste 10 e 11 sono dunque puntoni.

Nel nodo F' , dove sono già noti S_9 e S_{10} , lo sforzo nell'asta 13 si può determinare nel modo più rapido praticando una sezione di Ritter che attraversi con essa le aste 11 e 12 (fig. 50a) ed esprimendo l'equilibrio delle forze per es. alla sinistra intorno al nodo C di colmo (polo della stessa asta 13). Supponendo che S_{13} sia di trazione, si ottiene così l'equazione:

$$(3) \quad -S_{13}(h - \varrho) + A_0 l - P \frac{l}{2} = 0 ,$$

da cui, posto come sopra:

$$(h) \quad k_{13} = \frac{l}{h - \varrho} = \frac{l}{tg \alpha - k} , \quad (\text{con } \bar{k} = \varrho/l)$$

la soluzione:

$$(f_3) \quad S_{13} = k_{13} P .$$

Per ottenere S_{12} , conviene infine proiettare gli sforzi agenti sul nodo F nella direzione r della falda,

direzione che fa angolo $\gamma = \alpha - \beta$ con ognuna delle aste 9 e 12, e angolo α con l'asta 13 di catena. L'equazione di equilibrio in tale direzione, con riguardo ai sensi degli sforzi noti e supponendo ancora che la 12 sia tirante, diviene:

$$(4) \quad S_{12} \cos \gamma - S_9 \cos \gamma + S_{13} \cos \alpha = 0 ,$$

dalla quale, osservando che è (fig. 50 b)):

$$\cos \gamma = \frac{l_1}{2c} \quad \text{e} \quad \cos \delta = \frac{h - \rho}{c} ,$$

e posto:

$$(1) \quad k_{12} = \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{cl}{ah - \rho l} - \frac{2c}{h - \rho} \left(\frac{l}{l_1} \right)^2 \right] = \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\cos \beta \operatorname{tg} \alpha - \sin \beta} - \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos \delta} \right] ,$$

risulta:

$$(f.) \quad S_{12} = k_{12} P .$$

Con procedimento del tutto parallelo, si possono determinare gli sforzi S' dovuti a una forza orizzontale $X=1$ in B, diretta ad esempio verso l'interno (fig. 50 b)).

Il relativo cremoniano è quello di fig. 50 b'), limitabile ancora, per simmetria, a mezza travatura. Analiticamente questi sforzi si determinano allo stesso modo di sopra.

Nel nodo A, dove la reazione del vincolo vale $H_1^{(A)}=1$, si ha il sistema:

$$(e') \quad \begin{cases} S'_8 \cos \alpha + S'_9 \cos \beta + 1 = 0 \\ S'_8 \sin \alpha + S'_9 \sin \beta = 0 , \end{cases}$$

che ammette per soluzione:

$$(f'_1) \quad \begin{cases} S'_8 = 1 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 1 \cdot \frac{\rho}{d} = 1 \cdot k'_8 ; \\ S'_9 = 1 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = 1 \cdot \frac{ch}{l_1 d} = 1 \cdot k'_9 . \end{cases}$$

Nel nodo D, scarico, dalle stesse equazioni di equilibrio utilizzate per il calcolo degli S_0 , risulta ora più semplicemente:

$$(f'_2) \quad S'_{10} = 0 \quad , \quad S'_{11} \equiv S'_8 = 1 \cdot k'_8 .$$

Nel nodo F , utilizzando ancora la sezione di Ritter per le aste 11 , 12 e 13 , è ora anche più rapidamente:

$$(f'_3) \quad S'_{13} = -1 \cdot \frac{h}{h-\rho} = -1 \cdot K'_{13};$$

proiettando poi tutti gli sforzi nella direzione r della falda, risulta per S'_{12} l'equazione:

$$S'_{12} \cos \gamma + 1 \cdot K'_{13} \cos \gamma - 1 \cdot K'_{13} \cos \alpha = 0,$$

che ha come soluzione:

$$(f'_4) \quad S'_{12} = 1 \cdot \left[\frac{h}{h-\rho} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} - \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right] = 1 \cdot \left[\frac{2c}{h-\rho} \cdot \frac{lh}{l_1^2} - \frac{ch}{l_1 d} \right] = 1 \cdot K'_{12}.$$

Tutti gli elementi determinati sono raccolti nelle prime due colonne della Tabella I/24; non sarà male osservare al riguardo come, in conseguenza del senso previsto per la $X=1$, tutti gli sforzi S'' risultino di segno opposto ai corrispondenti S_0 .

Per procedere ora oltre nel calcolo della X , è necessario, secondo la (4') di pag. 16, conoscere le *estensibilità* ρ di tutte le aste della travatura, vale a dire avere prefissato le dimensioni delle aste medesime.

È su questo punto che si richiama l'attenzione, avvertendo che quanto diremo costituisce una norma generale per la risoluzione delle travature iperstatiche.

Se, per chi non abbia la debita esperienza in calcoli del genere, lascia perplessi, in mancanza di dati riferimenti, il predimensionamento di una struttura a parete piena, tanto più perplessi lascia quello di una travatura iperstatica, al punto da richiedere molti e faticosi tentativi; qualche considerazione comparativa sugli elementi fissati di sopra, vale invece a orientare verso un procedimento speditivo che, mentre riduce notevolmente il lavoro, porta insieme a un proporzionamento soddisfacente.

Dalla Tabella, o dai cremoniani, si riconosce intanto che, nel sistema principale, le aste di un corrente funzionano o tutte da puntoni o tutte da tiranti; le aste di parete invece (le 10 e $10'$, 12 e $12'$) hanno di

solito funzione mista; d'altra parte, uno sguardo anche sommario alle espressioni dei coefficienti k_i , mostra che per queste ultime aste tali coefficienti hanno valore notevolmente inferiore a quelli per le aste di contorno, quando non sono addirittura nulli; nella somma dei prodotti $S_0 S'$ e in quella dei quadrati S'^2 che figurano nella (4') di pag. 16, le aste di parete portano quindi un contributo modestissimo o addirittura nullo; questo dice che il valore della iperstatica dipende preponderantemente dalle aste di contorno e autorizza quindi a prescindere, in un calcolo di prima approssimazione, dalla presenza delle aste di parete, limitando il predimensionamento a quelle di contorno.

Al proposito, per procedere con rigore ed economia, data la diversa funzione statica delle aste dei due correnti e, in generale, la diversa entità dello sfor-

TABELLA I/24

ASTA N°	S_0	S'	$S_0 S'$	S'^2	$\rho^* = \frac{l}{A}$	$S_0 S' \rho^*$	S'^2
8 e 8'	$-k_8 P$	$+1.k'_8$	$-1.k_8 k'_8 P$	$+1^2.k'^2_8$	$l_i/2A_s$	$-1.\frac{k'_8 k'_8 l_i}{2A_s} P$	$1^2.\frac{k'^2_8 l_i}{2A_s}$
9 e 9'	$+k_9 P$	$-1.k'_9$	$-1.k_9 k'_9 P$	$+1^2.k'^2_9$	c/A_i	$-1.\frac{k'_9 k'_9 c}{A_i} P$	$1^2.\frac{k'^2_9 c}{A_i}$
10 e 10'	$-k_{10} P$	0	0	0	—	0	0
11 e 11'	$-k_{11} P$	$+1.k'_s$	$-1.k_{11} k'_s P$	$+1^2.k'^2_s$	$l_i/2A_s$	$-1.\frac{k'_s k'_s l_i}{2A_s} P$	$1^2.\frac{k'^2_s l_i}{2A_s}$
12 e 12'	$+k_{12} P$	$-1.k'_{12}$	$-1.k_{12} k'_{12} P$	$+1^2.k'^2_{12}$	c/A_i	$-1.\frac{k'_{12} k'_{12} c}{A_i} P$	$1^2.\frac{k'^2_{12} c}{A_i}$
13	$+k_{13} P$	$-1.k'_{13}$	$-1.k_{13} k'_{13} P$	$+1^2.k'^2_{13}$	$(l-a)/A_i$	$-1.\frac{k_{13} k'_{13} (l-a)}{A_i} P$	$1^2.\frac{k'^2_{13} (l-a)}{A_i}$

zo da asta ad asta in uno stesso corrente, le dimensioni dovrebbero essere differenziate; ciò che comporterebbe ugualmente un lavoro lungo e non poche difficoltà. Per snellire il calcolo, si può invece convenire in un primo tempo di assegnare una sezione unica per ognuno dei correnti, in modo da far dipendere la soluzione dal rapporto delle due sezioni.

Tutti gli elementi per il calcolo e la procedura di questo si rilevano, senza bisogno di commenti, dalla Tabella I/24; ivi sono state indicate con A_s e A_i ri-

spettivamente le aree del corrente superiore e inferiore; nel caso del nostro schema, si hanno tre soli valori dell'estensibilità *ridotta* $\rho^* = \rho E = l/A$ per le aste di contorno, avendo valutato, in virtù della simmetria, per metà della lunghezza quella dell'asta 13 di catena. L'equazione (4') di pag. 16, stante l'ipotesi fatta sui vincoli, diviene:

$$0 = \sum SS'\rho^* = \sum S_0 S'\rho^* + 1.X \sum S'^2 \rho^*,$$

ed ha per soluzione:

$$(1) \quad 1.X = - \frac{\sum S_0 S'\rho^*}{\sum S'^2 \rho^*}.$$

Limitandoci a mezza travatura, le due sommatorie contengono ciascuna solo quattro termini; propriamente è per disteso:

$$(1') \quad 1.X = \frac{\frac{1}{A_s}(k_8 + k_{11}) \frac{k'_8 l_1}{2} + \frac{1}{A_i} [k_9 k'_9 c + k_{13} k'_{13} (l-a)]}{\frac{k'^2_8 l_1}{A_s} + \frac{1}{A_i} [k'^2_9 c + k'^2_{13} (l-a)]} = \frac{\nu(k_8 + k_{11}) \frac{k'_8 l_1}{2} + [k_9 k'_9 c + k_{13} k'_{13} (l-a)]}{\nu k'^2_8 l_1 + k'^2_9 c + k'^2_{13} (l-a)} \cdot \left[\nu = \frac{A_i}{A_s} \right]$$

Per un primo tentativo, potremmo ad es. assumere $\nu = 1$, cioè supporre per tutto il contorno un'unica sezione; anche a parte le entità specifiche degli sforzi, poichè il proporzionamento a carico di punta richiede notoriamente una miglioramento delle dimensioni nei confronti della semplice sollecitazione assiale, è però prevedibile una sezione maggiore per il corrente compresso rispetto a quello teso; sicchè è di solito opportuno che il rapporto $\nu = A_i : A_s$ fra le sezioni dei due correnti sia minore dell'unità; per es. si può assumere $\nu = 1/3$ o $\nu = 1/2$.

Calcolata la X per il valore scelto di ν e introdotta nella espressione (a) degli sforzi S effettivi, si può dimensionare a carico di punta l'asta del corrente compresso in cui si verifica la massima compressione; stando al valore fissato per ν , al corrente teso

competerebbe allora automaticamente una sezione *netta* ⁽¹⁾ pari a vA_s ; in generale però tale sezione risulterà o esuberante o insufficiente; rinunciando al valore prefissato per v , se ne potrà fare in ognuno dei due casi un dimensionamento diretto in base allo sforzo massimo che il calcolo di sopra indicava per il corrente teso; alle due sezioni A_s ed A_s' così determinate corrisponde ora un diverso valore di v e quindi, per la (l'), un nuovo valore di X , come anche corrispondono nuovi valori per gli sforzi massimi nei due correnti.

Se rispetto a questi due nuovi massimi sono soddisfatte le condizioni di stabilità per le due aste relative, potremmo anche passare in un secondo tempo, per successiva approssimazione, a differenziare le sezioni lungo i due correnti da asta ad asta.

Naturalmente dovrebbe dopo ciò essere ripetuto il calcolo di X e quello degli sforzi S effettivi, e ricollata la stabilità una ad una per le aste del contorno. Una volta soddisfatte tutte le verifiche si può assumere l'ultimo valore di X come definitivo e passare finalmente al proporzionamento delle aste di parete, sulla base degli sforzi S effettivi che il detto valore di X vi induce ai sensi della (a).

Esercizio 25 — Determinare in che misura la trave semplice AB di luce l viene scaricata dal sistema simmetrico di rinforzo indicato in fig. 51a), e determinare gli abbassamenti della mezzeria e delle sezioni a un quarto della luce dagli appoggi. —♦—

Si tratta qui per la prima volta di utilizzare il principio dei lavori virtuali nel calcolo di spostamenti di punti, di applicarlo cioè, come avvertimmo al secondo capoverso di pag. 17, in modo reciproco a come

⁽¹⁾ Costruttivamente, il collegamento di un'asta ai nodi viene realizzato, ad es. nelle strutture metalliche, a mezzo di chiodatura o di saldatura; per sezione *netta* si deve perciò intendere quella depurata dagli indebolimenti dei fori ovvero quella efficiente della saldatura.

si è finora praticato per la risoluzione dei sistemi iperstatici.

Ancora viene associato alla deformazione effettiva, riguardata come virtuale, un particolare sistema di forze-tensioni equilibrato quanto mai semplice, precisamente quello che nasce nel sistema principale (o anche in una sua parte soltanto) per effetto di una forza unitaria applicata nel punto e nella direzione dello spostamento voluto; non già però per legare, come si è fatto finora, in una equazione di elasticità le incognite iperstatiche, imponendo localmente il rispetto della deformazione, cioè la congruenza di questa, ma per determinare, assicurata a priori la congruenza, un elemento della deformazione stessa.

Come avvertimmo al passo citato, ciò equivale formalmente a introdurre negli integrali che figurano al secondo membro della (4) di pag. 16, per M , N e T le caratteristiche della sollecitazione nel sistema effettivo, come *primi elementi noti*, e in luogo di M_k , N_k e T_k le caratteristiche nel sistema principale per la suddetta condizione semplice di carico. Per parte loro gli M , N e T avranno poi una determinazione immediata se il sistema in esame è isostatico, mediata invece, previa risoluzione del sistema, se questo è iperstatico.

È questo secondo il caso nostro, in quanto il sistema è una volta iperstatico internamente, l'incognita sovrabbondante identificandosi con lo sforzo X nel puntone CD ; occorre perciò determinare preventivamente tale incognita.

Col procedimento già seguito altrove (cfr. gli Esercizi 13 ÷ 16) si svincolerà ad es. l'articolazione in C , riducendoci così, come sistema principale, all'insieme della trave semplice e del sistema di rinforzo, collegati mutuamente in corrispondenza dei vincoli esterni A e B attraverso le articolazioni di estremità (fig. 51 *b*). In siffatto sistema, il carico uniforme p interessa unicamente la trave, con un momento M_0 variabile secondo la nota legge parabolica simmetrica (fig. 51 *b*):

$$(a) \quad M_0 = \frac{pl}{2}z - \frac{pz^2}{2} = \frac{pz}{2}(l-z).$$

Rimosso ora dalla trave il carico ripartito, si ap-
plichino ai due capi dell'articolazione C svincolata,
secondo l'asse del pendolo e ad es. coi sensi indicati
in fig. 51c), due forze opposte $X=1$; trattandosi di
indeterminazione interna, i vincoli esterni risultano

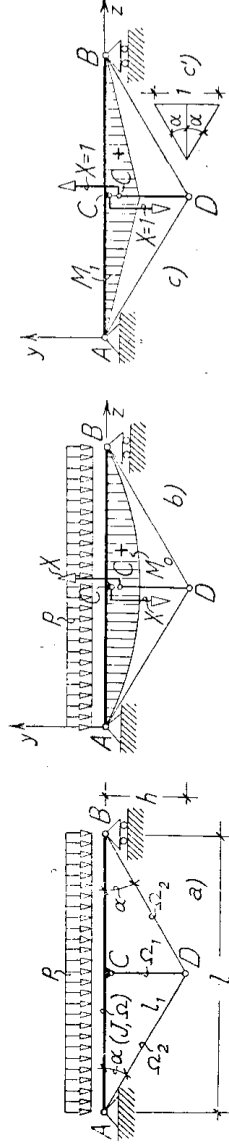


Fig. 51

notoriamente scarichi, mentre nascono nelle due parti
del sistema le ovvie caratteristiche indicate nella
Tabella I/25; a giustificazione, si osservi comunque
che delle due forze unitarie, quella direttamente ap-
plicata alla trave non interessa che la trave stessa,
con un momento M_1 ad andamento lineare simmetrico sui
due tronchi AC e BC :

$$(b) \quad M_1 = \frac{1}{2} z ;$$

quella applicata all'estremità del pendolo CD , impe-
gna invece unicamente a forza normale tutte le membra-
ture delle due parti del sistema, e cioè a trazione con
valore $N_1=1$ il pendolo CD , a compressione i due pen-
doli simmetrici DA e DB in misura di $1/2 \operatorname{sen} \alpha$, a trazione
ancora la trave AB in misura di $1/2 \operatorname{tg} \alpha$, come indica la
decomposizione eseguita in fig. 51c').

TABELLA I/25

TRONCO	M_0	N_1	M_1	NN_1	MM_1
$AC \left(0 \leq z \leq \frac{l}{2} \right)$	$-\frac{pz}{2} (l-z)$	$+1 \cdot \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha}$	$+1 \cdot \frac{z}{2}$	$1^2 \cdot X \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha} \right)^2$	$1 \cdot \left[\frac{pz}{2} (l-z) + 1 \cdot X \frac{z}{2} \right] \frac{z}{2}$
$BC \left(0 \leq z' \leq \frac{l}{2} \right)$	$\frac{pz'}{2} (l-z')$		$+1 \cdot \frac{z'}{2}$		$1 \cdot \left[\frac{pz'}{2} (l-z') + 1 \cdot X \frac{z'}{2} \right] \frac{z'}{2}$
$CD \left(0 \leq y \leq \frac{l}{2} \operatorname{tg} \alpha \right)$	0	+1	0	$1^2 \cdot X$	0
$DA \left(0 \leq s \leq \frac{l}{2 \cos \alpha} \right)$	0	$-1 \cdot \frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha}$	0	$1^2 \cdot X \left(\frac{1}{2 \operatorname{sen} \alpha} \right)^2$	0
DB					

Sugli elementi della Tabella, l'equazione dei lavori virtuali prende la forma:

$$0 = \frac{2}{\Omega} \int_0^{l/2} (1.X/4tg^2\alpha) dz + \frac{1}{\Omega_1} \int_0^{l/2} 1.X dy + \frac{2}{\Omega_2} \int_0^{l/2} (1.X/4sen^2\alpha) ds + \\ + \frac{2}{J} \int_0^{l/2} \left[\frac{pz}{2} (l-z) + 1.X \frac{z}{2} \right] \frac{z}{2} dz .$$

Notando che è:

$$tg\alpha = \frac{2h}{l} ; \quad sen\alpha = \frac{h}{l_1} ; \quad cosa = \frac{l}{2l_1} ,$$

e posto:

$$(c) \quad \lambda^2 = \frac{J}{\Omega h^2} ; \quad \lambda_1^2 = \frac{J}{\Omega_1 h^2} ; \quad \lambda_2^2 = \frac{J}{\Omega_2 h^2} ; \quad \frac{h}{l} = \mu ; \quad \frac{l_1}{l} = \nu ,$$

è facile riconoscere per tale equazione la soluzione.

$$(d) \quad 1.X = -\frac{5}{8} \cdot \frac{pl}{l + 3\lambda^2 + 24(2\lambda_1^2\mu^3 + \lambda_2^2\nu^3)} .$$

Risolto così il sistema iperstatico, per determinare lo spostamento verticale η_C della mezzeria si deve associare, come detto di sopra, la deformazione effettiva, cioè quella per cui il momento M sulla trave ha la legge esplicita simmetrica:

$$(e) \quad M = M_0 + \frac{1.X}{2} z = \frac{pz}{2} (l-z) - \frac{5}{16} \cdot \frac{pl}{l + 3\lambda^2 + 24(2\lambda_1^2\mu^3 + \lambda_2^2\nu^3)} z ,$$

con il sistema di forze-tensioni che consegue nel sistema principale alla forza verticale $P=1$ applicata in C ; ora tale condizione di carico si è già considerata per la risoluzione del sistema: precisamente, delle due forze $X=1$, quella applicata alla trave, e si è riconosciuto che del sistema principale tale forza interessava unicamente la trave; il sistema forze-tensioni equilibrato in parola è dunque quello caratterizzato dal diagramma simmetrico dei momenti M_i di cui alla legge (b).

Sostituendo al secondo membro della (4) di pag. 16 per M e per M_i le (e) e (b) rispettivamente, e raddop-

piando, per la simmetria, il valore dell'integrale, si ha dunque successivamente:

$$(f) \quad \eta_c = 2 \int_0^{l/2} \left[\frac{p^2}{2} (l-z) - \frac{5}{16} \cdot \frac{pl}{1+3\lambda^2+24(2\lambda_1^2\mu^3+\lambda_2^2\nu^3)} z \right] \cdot \frac{z}{2} dz = \\ = \frac{5}{384} \cdot \frac{pl^4}{EJ} \left[1 - \frac{1}{1+3\lambda^2+24(2\lambda_1^2\mu^3+\lambda_2^2\nu^3)} \right].$$

Nella trave isostatica, il momento M effettivo coinciderebbe con $M_0 = \frac{p^2}{2}(l-z)$; associando allora, con lo stesso procedimento, questa legge di M_0 con quella di M_1 già utilizzata, risulterebbe:

$$(f') \quad \eta_c = 2 \int_0^{l/2} \frac{M_0 M_1}{EJ} dz = 2 \int_0^{l/2} \frac{\frac{p^2}{2}(l-z) \cdot \frac{z}{2}}{EJ} dz = \frac{5}{384} \cdot \frac{pl^4}{EJ},$$

che è l'espressione nota fin dalla teoria elementare delle travi inflesse, per la freccia di una trave semplice caricata uniformemente.

Dal confronto con la (f), risulta che η_c differisce da η_c per il termine:

$$\eta_c = \frac{5}{384} \cdot \frac{pl^4}{EJ} \cdot \frac{1}{1+3\lambda^2+24(2\lambda_1^2\mu^3+\lambda_2^2\nu^3)},$$

vale a dire, successivamente, in virtù della (d):

$$\eta_c = \frac{8}{384} \cdot \frac{l^3}{EJ} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{pl}{1+3\lambda^2+24(2\lambda_1^2\mu^3+\lambda_2^2\nu^3)} = \frac{8}{384} \cdot \frac{1 \cdot X l^3}{EJ} = \frac{1 \cdot X l^3}{48 EJ},$$

termine che, dalla stessa teoria elementare delle travi inflesse, si riconosce per la freccia della trave semplice soggetta a una forza $1 \cdot X$ in mezzeria.

Questi riscontri stanno a conferma dei risultati ottenuti col principio dei l.v..

Nessuna difficoltà a questo punto, procedendo in modo perfettamente identico, per determinare lo spostamento verticale η_s delle sezioni S a un quarto della luce dagli appoggi. Basterebbe infatti associare alla stessa legge (e) di M utilizzata di sopra, quella di M_1

che desta nella trave semplice la forza verticale $P=1$ applicata in S ; legge che, essendo le reazioni dei vincoli:

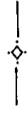
$$A_1 = 1 \cdot \frac{3}{4} \quad ; \quad B_1 = 1 \cdot \frac{1}{4} ,$$

è per i due tronchi AS e BS rispettivamente:

$$M_1 = 1 \cdot \frac{3}{4} z \quad \left(0 \leq z \leq \frac{l}{4} \right) \quad ; \quad M_1 = 1 \cdot \frac{1}{4} z' \quad \left(0 \leq z' \leq \frac{3}{4} l \right) .$$

L'unica avvertenza da avere è quella che, cambiando la legge di M al passaggio del punto C —dove in sostanza è applicata una forza concentrata $1X$ — l'integrale $\int_s^{\overline{MM}} \frac{1}{EJ} ds$ va ora eseguito sui tre tronchi distinti $\overline{AS}$, $\overline{SC}$, $\overline{CB}$ in cui i due carichi P e $1X$ spezzano la trave.

Esercizio 26 — Determinare in che misura il carico P si ripartisce fra la trave AB e il tirante di rinforzo CD di fig. 52 a), e l'abbassamento η_C del punto di unione C .



È problema analogo al precedente, di soluzione però anche più immediata.

Il sistema è ancora una volta indeterminato internamente, l'iperstatica essendo la tensione X nel puntone CD ; corrispondentemente il sistema principale, quale si ottiene rimuovendo ad es. l'articolazione in C (fig. 52 b)), è costituito dalla trave semplice AB e dal tirante pensile CD .

Di queste due parti, il carico P interessa unicamente la trave, provocandovi il noto diagramma triangolare simmetrico dei momenti:

$$(a) \quad M_0 = \frac{P}{2} z .$$

D'altra parte, applicate ai due capi dell'articolazione rimossa due forze unitarie opposte $X=1$, ad

es. coi sensi indicati in fig. 52c), sulla trave nasce il diagramma M_1 affine al precedente:

(b)
$$M_1 = -\frac{1}{2}z;$$

nel tirante si ha invece uno sforzo di trazione $N_1=1$.

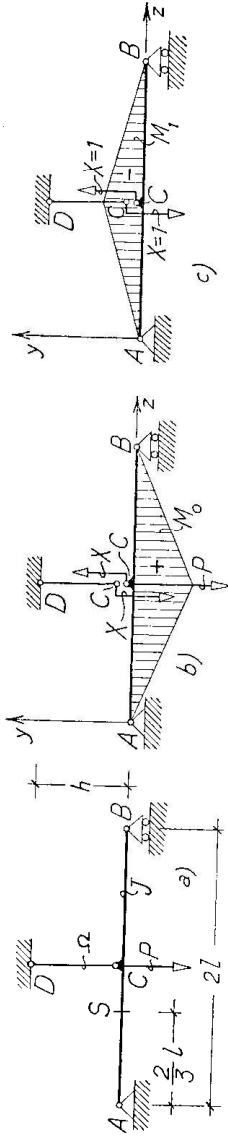


Fig. 52

Tenendo conto della forza normale e del momento, si hanno dunque nel sistema assegnato le caratteristiche

TABELLA I/26

TRONCO	N	M	NN ₁	MM ₁
AD e BD ($0 \leq z \leq l/2$)	0	$\frac{1}{2}(P-1.X)z$	0	$-1.(P-1.X)\frac{z^2}{4}$
CD ($0 \leq y \leq h$)	1.X	0	1 ² .X	0

effettive della Tabella I/26, e l'equazione dei l. v. diviene semplicemente:

$$0 = \int_0^h \frac{1.X}{\Omega} dy + 2 \int_0^l \frac{-(P-1.X)z^2}{4J} dz = 1.X \frac{h}{\Omega} - \frac{(P-1.X)l^3}{6J},$$

con soluzione:

(c)
$$1.X = \frac{P}{1-6\mu\nu^2},$$

dove si è posto:

(d)
$$\mu = \frac{h}{l}, \quad \nu^2 = \frac{J}{\Omega l^2}.$$

Sostituendo questa soluzione nella seconda colonna della Tabella, la legge esplicita del momento M effettivo - sempre simmetrica - è:

(e)
$$M = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{1}{1+6\mu\nu^2} \right) z.$$

Secondo il procedimento descritto all'Esercizio precedente, per determinare η_C dovremmo ora associare a questa legge quella (b) di M_1 già utilizzata di sopra, e risulterebbe di seguito:

$$(f) \quad \eta_C = 2 \int_0^l \frac{MM_1}{EJ} dz = \frac{2}{EJ} \int_0^l \frac{P}{2} \left(1 - \frac{1}{1+6\mu v^2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) z^2 dz = -\frac{P^3}{6 EJ} \left(1 - \frac{1}{1+6\mu v^2}\right),$$

dove si noti, come avvertimmo già esplicitamente alla fine del secondo capoverso di pag. 17, il segno negativo sta ad indicare che lo spostamento η_C è di senso opposto a quello previsto in fig. 52 c) per la $X=1$ applicata alla trave, vale a dire verso il basso.

Anzi ch  per questa via — che abbiamo seguito solo per meglio illustrarla e per avere insieme un controllo del risultato — si arriva per  qui pi  rapidamente allo scopo osservando che lo spostamento η_C , per la solidariet  delle due parti del sistema in corrispondenza del punto di unione C , altro non   che l'allungamento provocato nel tirante CD dallo sforzo $1.X$.   per  di  direttamente, tenuto conto della (c):

$$(f') \quad \eta_C = \frac{1.Xh}{E\Omega} = \frac{Ph}{E\Omega(1+6\mu v^2)};$$

con riguardo alle posizioni (d),   immediato riconoscere che tale espressione coincide con la (f).

L'associazione alla legge (e) di M di quella del momento M_1 destato dalla condizione di carico unitario $P=1$ nel punto e nella direzione in cui si vuole lo spostamento, sarebbe stata invece pi  conveniente se, anzich  della mezzeria C , si fosse trattato dello spostamento di un altro punto della trave, ad es. della sezione S a un terzo della luce da A (fig. 52 a)).

Applicando una forza verticale $P=1$ in tale sezione sarebbe:

$$\begin{aligned} \text{in } AS: \quad M_1 &= A_1 z = 1 \cdot \frac{2}{3} z & (0 \leq z \leq \frac{2}{3} l) \\ \gg \quad SD: \quad M_1 &= A_1 z - 1 \cdot (z - \frac{2}{3} l) = 1 \cdot \frac{1}{3} (2l - z) & (\frac{2}{3} l \leq z \leq l) \\ \gg \quad BS: \quad M_1 &= B_1 z' = 1 \cdot \frac{1}{3} z' & (0 \leq z' \leq \frac{4}{3} l). \end{aligned}$$

Spezzando l'integrazione del prodotto MM_1 ai tre tronchi $\overline{AS}$, $\overline{SD}$ e $\overline{BD}$, si otterrebbe in conseguenza:

$$\eta_S = \frac{1}{EJ} \int_0^{2l/3} 1 \cdot \frac{P}{2} \left(1 - \frac{1}{1+6\mu\nu^2}\right) \cdot \frac{2}{3} z^2 dz + \frac{1}{EJ} \int_{2l/3}^l 1 \cdot \frac{P}{2} \left(1 - \frac{1}{1+6\mu\nu^2}\right) \cdot \frac{1}{3} (2l-z) z dz + \\ + \frac{1}{EJ} \int_0^l 1 \cdot \frac{P}{2} \left(1 - \frac{1}{6\mu\nu^2}\right) \cdot \frac{1}{3} z'^2 dz' ,$$

e con facili sviluppi:

$$(g) \quad \eta_S = \frac{23}{162} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} \left(1 - \frac{1}{6\mu\nu^2}\right) .$$

Ricorrendo alla teoria elementare delle travi inflesse, lo stesso spostamento si determinerebbe come inflessione, in corrispondenza della sezione S , nella trave semplice gravata in mezzzeria dal carico concentrato $P - 1.X = P \left(1 - \frac{1}{1+6\mu\nu^2}\right)$.

L'equazione in termini finiti della linea elastica della trave in tali condizioni, detta $L=2l$ la luce, è infatti notoriamente:

$$\eta = \frac{(P - 1.X) L^3}{48 EJ} \left[3 \cdot \frac{z}{L} - 4 \left(\frac{z}{L} \right)^3 \right] ,$$

e basta introdurvi per z il valore $z = \frac{L}{3} = \frac{2}{3}l$, per ritrovare immediatamente l'espressione (g) di η_S .