

Applicate ora ai due capi dell'articolazione rimossa due forze opposte unitarie lungo l'asse del tirante, ad es. coi sensi indicati in fig. 31b), le corrispondenti caratteristiche N_1 ed M_1 lungo il contorno del sistema variano con le leggi indicate nella Tabella I/15, alle quali fa riscontro per M_1 il diagramma indicato a tratto punteggiato nella stessa fig. 31b); ne

TABELLA I/15

TRONCO	N_0	M_0	N_1	M_1	$NN_1 =$ $=(N_0 + N_1 X) N_1$	$MM_1 = (M_0 + M_1 X) M_1$
$AE (0 \leq y \leq h)$	$-\frac{pl}{2}$	0	0	0	0	0
$EC (h \leq y \leq H)$	$-\frac{pl}{2}$	0	0	-1.y	0	$1^2.y^2 X$
$CD (0 \leq z \leq l)$	0	$\frac{p^2}{2}(l-z)$	-1	-1.(H-h)	$1^2.X$	$-1 \left[\frac{p^2}{2}(l-z) - 1.(H-h).X \right] (H-h)$
$EF (0 \leq z \leq l)$	0	0	+1	0	$1^2.X$	0

seguono per NN_1 ed MM_1 le leggi raccolte nella medesima Tabella, e quindi per l'equazione dei l. v. la forma semplicissima:

$$0 = \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \right) \int_0^l 1.X dz + \frac{1}{J_1} \int_h^H 1.y^2 X dy - \frac{1}{J} \int_0^l \left[\frac{p^2}{2}(l-z) - 1.(H-h) \right] X (H-h) dz,$$

e la soluzione, di seconda approssimazione:

$$(a) \quad 1.X = \frac{p l^3}{12} (H-h) \cdot \frac{1}{l \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \right) + \frac{1}{3J_1} (H^3 - h^3) + \frac{l}{J} (H-h)^2}.$$

Il segno positivo conferma la facile previsione del funzionamento del pendolo EF come catena.

A meno del contributo della forza normale - ciò che equivale qui a supporre rigidi a tale sollecitazione l'architrave CD e il tirante EF - e posto $\vartheta = J/J_1$, è invece in prima approssimazione:

$$(b) \quad 1.X = \frac{p l^3 (H-h)}{4 [3l(H-h)^2 + \vartheta (H^3 - h^3)]} = \frac{p l^3}{4 [3l(H-h) + \vartheta (H^2 + Hh + h^2)]}.$$

In fig. 31c) è indicato il diagramma dei momenti

quando la catena occupa una posizione qualunque intermedia lungo i ritti.

Posizioni particolari da considerare sono le seguenti:

a) $h = H$; è come dire che l'architrave CD , anziché solidale a flessione con i ritti, è ad essi articolato alle estremità; la soluzione per questo caso si ricaverebbe agevolmente dalla prima forma della (b), al limite per $h \rightarrow H$, e ne risulterebbe una forma indeterminata; ciò è in accordo col fatto che, nelle ora dette condizioni, il sistema risulterebbe labile;

b) $h = H/2$; la relativa soluzione di prima approssimazione, posta in più $\mu = H/h$, diviene:

$$(b') \quad 1.X = \frac{pl^2}{H(6 + 7\mu\vartheta)} = \frac{pl}{\mu(6 + 7\mu\vartheta)} ;$$

c) $h = 0$; cioè il tirante disposto fra le due cerniere al piede A e B (fig. 31d); la corrispondente soluzione è:

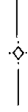
$$(b'') \quad 1.X = \frac{pl^2}{4H[3 + \mu\vartheta]} = \frac{pl}{4\mu(3 + \mu\vartheta)} .$$

Il momento nelle due sezioni di solidarietà C e D avrebbe in questi ultimi due casi rispettivamente i valori:

$$M_C \equiv M_D = X_{(H/2)} \cdot \frac{H}{2} = \frac{pl^2}{2(6 + 7\mu\vartheta)} ; \quad M_C \equiv M_D = X_{(0)} \cdot H = \frac{pl^2}{4(3 + \mu\vartheta)} ,$$

dei quali il secondo sensibilmente maggiore del primo; poichè dal primo al secondo valore si passa ovviamente con continuità attraverso le successive posizioni intermedie, tale risultato ci dice che i ritti vengono mano mano più affaticati abbassando la catena; nel contempo viene però alleviato nella zona centrale l'architrave CD .

Esercizio 16 — Risolvere il sistema ad arco a spinta eliminata di fig. 32a), in cui l'arco $\widehat{AB}$ è circolare di raggio R e freccia f .



Si tratta in fondo dello stesso problema dell'Esercizio 10, con la sola differenza che l'incognita iperstatica, anzichè esterna, è ora interna: la tensione X nel tirante AB fra le cerniere di imposta (fig. 32b)).

Come allora, d'altroonde, queste cerniere possono subire uno spostamento relativo $\bar{\delta}$, pari all'allungamento elastico della catena sotto lo sforzo X , cioè $\bar{\delta} = XI/E\bar{\Omega}$.

Tenendo conto, come allora, anche della forza normale, questa circostanza porta a far figurare al secondo membro dell'equazione dei l.v. — il primo membro è nullo trattandosi di indeterminazione interna — un ulteriore termine, relativo al lavoro di deformazione del tirante: $4\bar{\delta} = 4XI/E\bar{\Omega}$; trasportando allora questo

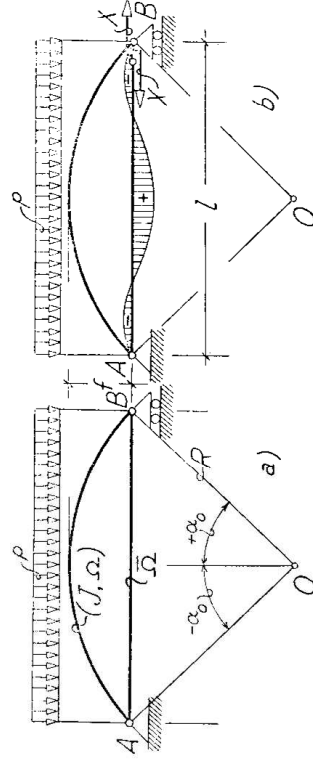


Fig. 32

quanto mentre allora il termine $\hat{\delta}$ era uno spostamento anelastico, indipendente cioè dai carichi, ora è una deformazione elastica legata intimamente all'incognita, vale a dire al carico esterno e alla natura del sistema.

In conseguenza di ciò, la soluzione si modifica rispetto alla (a) di pag. 63 nel seguente modo:

a) al numeratore manca il termine contenente $\hat{\delta}$ (spostamento relativo, ad es., dei due capi dell'articolazione che venga rimossa (fig. 32b)) nella riduzione a sistema principale);

b) al denominatore compare il termine $l/\bar{\Omega}$; adottando pertanto le stesse notazioni seguite nello

stabilire la (b) di pag. 64 per il caso di vincoli perfetti, e posto in più $\bar{p}^2 = J/\bar{Q}$, si riconosce che in definita la soluzione per il caso attuale diviene:

$$(a) \quad 1.X = \frac{R^2 [3\alpha_0 h_0 (2R^2 - l^2) - 3lh_0^2 + l^3] - \rho^2 l^3}{6\rho^2 (2\alpha_0 R^2 + lh_0) + Rl\bar{p}^2 + 6R^2 [2\alpha_0 (3R^2 - 4Rf + 2f^2) - 3lh_0]} p.$$

Confrontando con la detta (b) dell'Esercizio 10, risulta dunque che l'unica variante fra le due soluzioni sta nel termine $Rl\bar{p}^2$ che compare o meno a denominatore; ciò è quanto dire, come d'altronde è intuitivo, che la tensione nella catena elastica AB è solo una parte della spinta dell'arco a due cerniere per il caso di vincoli rigidi.

Le due soluzioni coinciderebbero per $\bar{p}^2 = J/\bar{Q} = 0$, vale a dire per $\bar{Q} = \infty$, ciò che equivarrebbe a impiegare, se possibile, una catena rigida, capace appunto di impedire, alla stregua di due cerniere fisse, ogni spostamento relativo di queste.

In fig. 32b) si è indicato il probabile andamento del diagramma dei momenti lungo l'arco nel caso della catena elastica, assumendo questa come fondamentale; non ci fermiamo in modo più dettagliato sulla cosa, in quanto per la trattazione diretta e per tutte le considerazioni a cui questa può dar luogo si intende rimandare all'Esercizio 10; e ciò, specie per quanto riguarda l'effetto della $X=1$ e la sovrapposizione dei diagrammi M_0 ed $M_1 X$.

Esercizio 17 — Risolvere il sistema chiuso simmetrico di fig. 33a), caricato nei due vertici opposti C e D da due forze P agenti, verso l'esterno, nella direzione della diagonale.



Data la simmetria di schema e di carico, il sistema in esame è riconducibile a due sistemi parziali, simmetricamente uguali, come quello ACB di fig. 33b), avente le sezioni estreme diagonali A e B perfettamente

te incastrate, ma libere d'altronde di spostarsi relativamente di moto piano nella loro giacitura comune.

È ovvio infatti che, nel sistema effettivo, a dette sezioni è consentito un tale movimento, mentre è invece impedito di uscire, ruotando, dal loro piano.

Limitandoci per tale ragione al semiriquadro, la riduzione al sistema principale può essere fatta (fig. 33c)) immobilizzando una delle sezioni estreme, ad es. la A , e lasciando libera l'altra: ciò consente infatti ancora alle due sezioni, di spostarsi relativamente come prima.

Ora, in condizioni generali, rimuovendo un incastro si introducono tre incognite: le componenti finite in

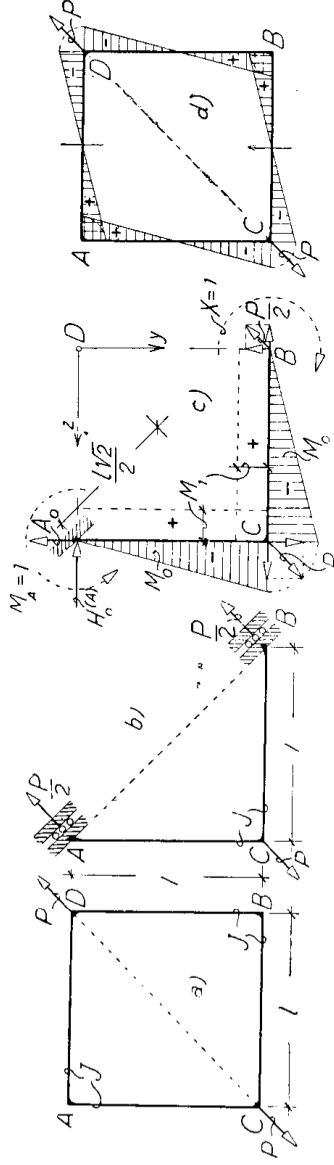


Fig. 33

due direzioni arbitrarie (solitamente fra loro ortogonali) della reazione, e il momento di incastro; ma della reazione finita conosciamo qui a priori la direzione giacchè, per la sopra riconosciuta libertà di movimento delle due sezioni nella direzione della diagonale, deve essere nulla la componente secondo la congiungente AB : la reazione in parola è quindi, intanto, normale a questa congiungente, cioè parallela al carico; d'altronde, ancora per simmetria, tali reazioni delle due sezioni diagonali sono uguali fra loro e, ciascuna, alla metà di P (fig. 33b)); nel sistema principale prescelto (fig. 33c)), la $\frac{P}{2}$ all'estremo B è dunque da riguardarsi come una forza esplicita, alla stessa stregua di P , e non resta, in definitiva, come incognita iperstatica che il momento di incastro X .

Per determinare tale incognita, consideriamo anzitutto l'effetto del carico assegnato P e della forza

$P/2$ all'estremo B ; la reazione all'incastro A possiede ovviamente componenti uguali ed opposte alla somma di quelle di P e di $P/2$, sopra una coppia qualunque di direzioni distinte: in particolare, ciò che risulta conveniente per il calcolo, sull'orizzontale e sulla verticale:

$$H_o^{(A)} = A_o = P \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{P}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = P \frac{\sqrt{2}}{4};$$

il momento d'incastro $M_o^{(A)}$ è poi nullo, tale essendo la somma dei momenti di P e $P/2$ intorno ad A ; il diagramma M_o è cioè formato dai due triangoli uguali tratteggiati di fig. 33 c).

Applicata ora alla sezione B , nel piano di figura, una coppia unitaria $X=\bar{1}$, l'unica reazione all'incastro è un momento $M_{1,1}=\bar{1}$, ed è questa anche l'unica caratteristica di sollecitazione nella sezione corrente sia del tronco AC che di quello CB ; il relativo diagramma M_1 è cioè costituito dai due rettangoli indicati a tratti nella stessa fig. 33 c).

Anche nel sistema effettivo, sovrapponendo gli effetti, l'unica caratteristica di sollecitazione che resta efficace nei confronti della iperstatica, è allora il momento flettente; le leggi di variazione nei due tronchi per il prodotto MM_1 sono quelle indicate nella Tabella I/17.

TABELLA I/17			
TRONCO	M_o	M_1	$MM_1 = (M_o + M_1 X) M_1$
$AC \ (0 \leq y \leq b)$	$-\frac{P\sqrt{2}}{4} \cdot y$	$\bar{1}$	$\bar{1} \cdot (-\frac{P\sqrt{2}}{4} y + \bar{1} \cdot X)$
$BC \ (0 \leq z \leq b)$	$-\frac{P\sqrt{2}}{4} \cdot z$	$\bar{1}$	$\bar{1} \cdot (-\frac{P\sqrt{2}}{4} y + \bar{1} \cdot X)$

Notando la simmetria nelle due espressioni di questo prodotto, e ricordando quanto si è detto in principio, che cioè, nel sistema effettivo, alla sezione B non è consentito di ruotare ($\vartheta=0$), l'equazione dei lavori virtuali prende la forma quanto mai semplice:

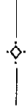
$$0 = \frac{2}{EJ} \int_0^l (-\frac{P\sqrt{2}}{4} y + \bar{1} \cdot X) dy,$$

ed ha per soluzione:

$$(a) \quad \bar{1}.X = \frac{Pl\sqrt{2}}{8},$$

indipendente dalla caratteristica elastica del materiale e dalla sezione resistente del sistema, come se questo fosse isostatico. Il dimensionamento di un tale sistema potrebbe quindi condursi in modo diretto, rifacendoci alle caratteristiche in una delle sezioni più cimentate, che, come avverte la fig. 33 *d*) nella quale è rappresentato il diagramma dei momenti effettivi, sono quelle in angolo.

Esercizio 18 — Risolvere il sistema elastico di fig. 34 *a*), nell'ipotesi che i vincoli siano perfetti.



Si tratta, quanto a schema, dello stesso portale zoppo dell'Esercizio 1, con analoga interpretazione pratica di allora per i carichi p e q .

La differenza sta nei vincoli esterni: in luogo di due cerniere, si hanno ora nelle sezioni di estremità un incastro e una cerniera, ciò che comporta due indeterminazioni statiche.

La scelta di queste può essere fatta in vari modi diversi; potremmo ad es. scegliere come incognite iperstatiche le due componenti della reazione della cerniera B , assumendo quindi come sistema principale la mensola a squadra ACB ; potremmo invece scegliere una delle componenti di detta reazione, ad es. quella orizzontale — sostituendo quindi intanto alla cerniera B un carrello scorrevole orizzontalmente — e uno dei parametri della reazione in A , ad es. il momento di incastro, sostituendo questo con una cerniera; potremmo infine — per limitarci alla scelta di incognite esterne — annullare due dei parametri della reazione in A , ad es. il momento e la componente orizzontale, sostituendo all'incastro un carrello scorrevole.

È questa terza scelta che abbiamo fatto in fig. 34 *b*);

non, in vero, perchè sia la migliore o la più logica ⁽¹⁾, ma perchè in tal modo ci si riduce allo stesso sistema principale dell'Esercizio 1 (fig. 2a), b) e c); ciò che

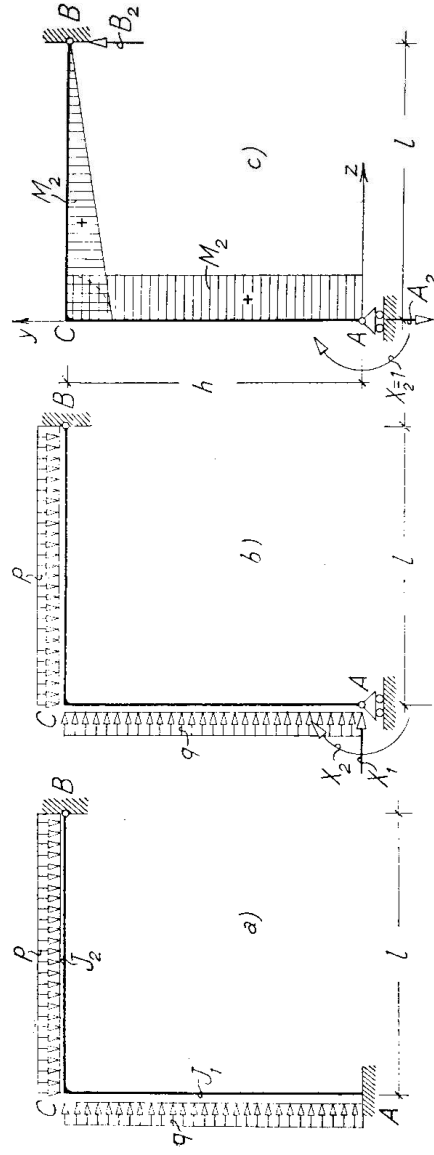


Fig. 34

da un lato abbrevierà sensibilmente le nostre considerazioni, dall'altro renderà possibile un confronto diretto del comportamento dei due sistemi, in riguardo alle diverse condizioni di vincolo.

Per agevolare questo confronto, separeremo anzi, come all'Esercizio 1, gli effetti dei due carichi q e p sul ritto e sull'architrave.

Dette X_1 e X_2 (fig. 34b)) rispettivamente la componente orizzontale della reazione in A e il momento di incastro, e N_1, M_1, T_1 le caratteristiche della sollecitazione nel sistema principale per la condizione isolata $X_1 = 1$, N_2, M_2, T_2 le analoghe caratteristiche per la condizione $X_2 = 1$, le (5') di pag. 19 si semplificano in queste altre:

$$(5'') \quad \begin{cases} M = M_{oq} + M_o X_1 + M_2 X_2 \\ N = N_{oq} + N_o X_1 + N_2 X_2 \\ T = T_{oq} + T_o X_1 + T_2 X_2 \end{cases}$$

Le due equazioni di elasticità occorrenti a determinare le due incognite X_1 e X_2 nascono, al modo gene-

⁽¹⁾ Di norma, la scelta più logica per il sistema principale di un sistema molte volte iperstatico è quella che allontana il meno possibile, sia per il comportamento statico che, soprattutto, per la deformazione, dal sistema effettivo; nel caso nostro la scelta più rispondente a questo requisito, fra le tre suggerite, sarebbe la seconda.

rale richiamato a pag. 15 e seguito in tutti i problemi trattati finora ad una sola incognita, associando alla deformazione effettiva, riguardata come virtuale, una volta il sistema di forze-tensioni equilibrato corrispondente nel sistema principale alla condizione $X_1=1$, l'altra quello corrispondente invece, nello stesso sistema, alla condizione $X_2=\bar{1}$.

Per quanto riguarda i carichi isolati p e q e la prima di queste due condizioni unitarie, la Tabella II/1 (pag. 20) fornisce tutto quanto occorre; per la seconda delle dette condizioni fittizie, si applichi nella sezione A (fig. 34 *c*) un momento unitario $X_2=\bar{1}$, ad es. positivo; i vincoli del sistema principale reagiscono manifestamente con due forze finite verticali, uguali e di senso opposto, capaci di dare, con braccio l , la coppia equilibrante di quella applicata, cioè:

$$A_2 = -B_2 = -\bar{1} \cdot \frac{l}{l};$$

in conseguenza, le caratteristiche N_2, M_2 e T_2 della sollecitazione lungo il contorno sono quelle indicate nella Tabella I/18.

TABELLA I/18

TRONCO	N_2	M_2	T_2
$AC (0 \leq y \leq h)$	$+\bar{1} \cdot \frac{l}{l}$	$+\bar{1}$	0
$CB (0 \leq z \leq l)$	0	$+\bar{1} \cdot \left(1 - \frac{z}{l}\right)$	$-\bar{1} \cdot \frac{l}{l}$

Combinando, ai sensi delle (5''), gli elementi di queste due Tabelle e limitandoci, per semplicità di sviluppi, al solo momento flettente, è immediato verificare che i prodotti MM_1 ed MM_2 variano secondo le leggi indicate nella Tabella II/18.

TABELLA II/18

TRONCO	$MM_1 = (M_{0q} + M_{op} + M_1 X_1 + M_2 X_2) M_1$	$MM_2 = (M_{0q} + M_{op} + M_1 X_1 + M_2 X_2) M_2$
$AC (0 \leq y \leq h)$	$1 \cdot \left[\frac{qy^2}{2} + 1 \cdot y X_1 - \bar{1} \cdot X_2 \right] y$	$-\bar{1} \cdot \left[\frac{qy^2}{2} + 1 \cdot y X_1 - \bar{1} \cdot X_2 \right]$
$CB (0 \leq z \leq l)$	$1 \cdot h \left[\frac{qh^2}{2} - \frac{plz}{2} + 1 \cdot h X_1 - \bar{1} \cdot X_2 \right] \left(1 - \frac{z}{l}\right)$	$\bar{1} \cdot \left[\frac{qh^2}{2} - \frac{plz}{2} + 1 \cdot h X_1 - \bar{1} \cdot X_2 \right] \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2$

Dal confronto con la Tabella III/1 di pag. 21, si riconosce che MM_1 differisce ora sul tronco AC solo per l'aggiunta del termine $-\bar{1}.X_2y$, sul tronco CB invece per l'aggiunta del termine $-\bar{1}.X_2\left(\frac{z}{l}\right)^2$; quanto poi alle due leggi MM_1 ed MM_2 , c'è da osservare che si passa dall'una all'altra scambiando il fattore corrente $1.y$, ovvero quello particolare $1.h$, in $\bar{1}$.

In base a queste osservazioni potremmo con rapidità pervenire dall'equazione dell'Esercizio 1 al sistema delle due occorrenti per il caso attuale; procederemo non di meno in modo diretto, impostando esplicitamente queste due equazioni.

Per l'ipotesi che i vincoli siano rigidi, esse si scrivono infatti sugli elementi dell'ultima Tabella:

$$0 = -\frac{1}{J_1} \int_0^h \left(\frac{qy^2}{2} + 1.yX_1 - \bar{1}.X_2 \right) y dy + \frac{1}{J_2} \int_0^l \left(\frac{qh^2}{2} - \frac{plz}{2} + 1.hX_1 - \bar{1}.X_2 \right) \left(1 - \frac{z}{l} \right) dz,$$

$$0 = -\frac{1}{J_1} \int_0^l \left(\frac{qy^2}{2} + 1.yX_1 - \bar{1}.X_2 \right) dy + \frac{1}{J_2} \int_0^l \left(\frac{qh^2}{2} - \frac{plz}{2} + 1.hX_1 - \bar{1}.X_2 \right) \left(1 - \frac{z}{l} \right) dz;$$

integrando, riducendo e posto $\vartheta = J_1/J_2$, queste diventano:

$$\begin{cases} 1.X_1 [8h^2(h + \vartheta l)] + \bar{1}.X_2 [-4h(3h + 2\vartheta l)] + h[qh^2(3h + 4\vartheta l) - \vartheta pl^3] = 0 \\ 1.X_1 [4h(-3h + 2\vartheta l)] + \bar{1}.X_2 [4(6h - 2\vartheta l)] + [4qh^2(-h + \vartheta l) - \vartheta pl^3] = 0. \end{cases}$$

Con evidenti posizioni, si tratta dunque di un sistema lineare non omogeneo del tipo:

$$\begin{cases} 1.X_1 k_1 + \bar{1}.X_2 k_2 = k_0 \\ 1.X_1 k'_1 + \bar{1}.X_2 k'_2 = k'_0, \end{cases}$$

la cui soluzione è notoriamente:

$$1.X_1 = \frac{\begin{vmatrix} k_0 & k_2 \\ k'_0 & k'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k'_1 & k'_2 \end{vmatrix}} = \frac{k_0 k'_2 - k'_0 k_2}{k_1 k'_2 - k'_1 k_2}; \quad \bar{1}.X_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_0 \\ k'_1 & k'_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k'_1 & k'_2 \end{vmatrix}} = \frac{k'_0 k_1 - k_0 k'_1}{k_1 k'_2 - k'_1 k_2}.$$

Sostituendo ai simboli k le rispettive posizioni, si

perviene con sviluppi immediati alle forme esplicite:

$$\left\{ \begin{aligned} 1.X_1 &= -\frac{2qh^3(3h+11\vartheta l)-9\vartheta pl^3}{4h(3h+8\vartheta l)} = -\frac{h(3h+11\vartheta l)}{2(3h+8\vartheta l)} q + \frac{9\vartheta l^3}{4h(3h+8\vartheta l)} p = X_{1q} + X_{1p} \\ \bar{1}.X_2 &= -\frac{-qh^2(h+6\vartheta l)-5\vartheta pl^3}{4(3h+8\vartheta l)} = -\frac{h^2(h+6\vartheta l)}{4(3h+8\vartheta l)} q + \frac{5\vartheta l^3}{4(3h+8\vartheta l)} p = X_{2q} + X_{2p}. \end{aligned} \right.$$

In ciascuna delle due incognite, i contributi dei carichi p e q sono dunque di segno opposto; precisamente — intendendo come positiva la $1.X_1$ quando è diretta verso l'interno, com'è stato convenuto in fig. 2c) per la $X=1$ — sono negativi quelli di q , positivi invece quelli di p ; a proposito del segno della $1.X_1$ e della $\bar{1}.X_2$ complessive, valgono perciò considerazioni analoghe a quelle svolte al citato Esercizio 1 per la $1.X$, in relazione sia alle intensità specifiche dei due carichi p e q , sia alle dimensioni geometriche del sistema.

Per date dimensioni di questo, risulta d'altronde subito, in riguardo ai carichi:

$$\begin{aligned} 1.X_1 &\geq 0 \quad \text{secondochè} \quad \frac{p}{q} \geq \frac{2h^2(3h+11\vartheta l)}{9\vartheta h^3} = \rho_0; \\ \bar{1}.X_2 &\geq 0 \quad \text{secondochè} \quad \frac{p}{q} \geq \frac{h^2(h+6\vartheta l)}{5\vartheta h^3} = \bar{\rho}_0. \end{aligned}$$

Poichè, allora, è certamente $\rho_0 > \bar{\rho}_0$, possono in linea teorica presentarsi tre casi, distinti indicativamente nello schema della fig. 35: o le radici sono

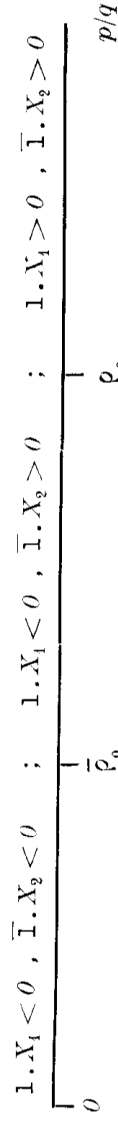
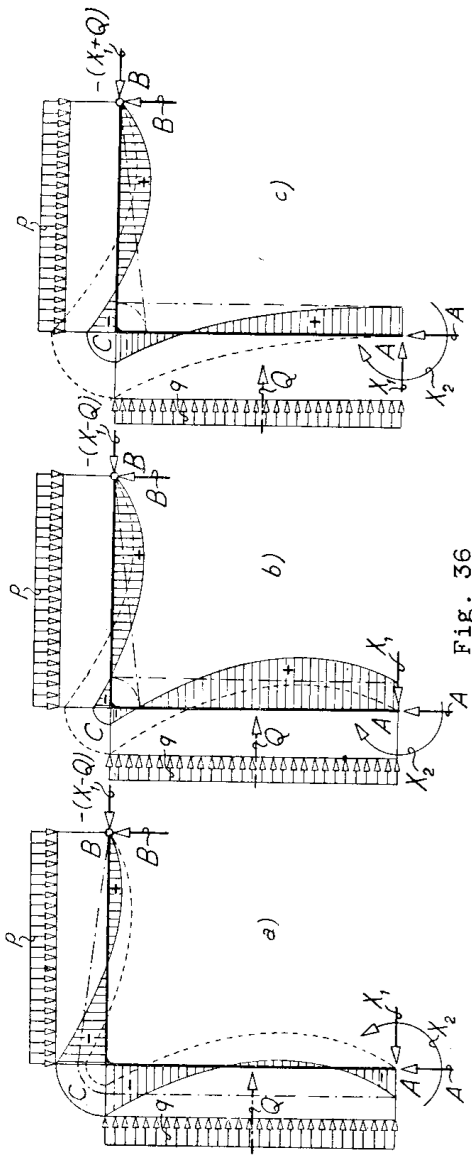


Fig. 35

ambidue negative; o la $1.X_1$ è negativa e la $\bar{1}.X_2$ positiva, o le radici sono ambedue positive. Nella fig. 36a), b) e c) sono rappresentati in modo schematico gli andamenti del diagramma dei momenti per il sistema effettivo, corrispondentemente a questi tre casi; ogni volta il diagramma è stato costruito come sovrapposizione di quelli (punteggiato e a tratto lungo) conseguenti alle due incognite separate.

Oltre ai tre casi esaminati, ci sarebbero inverosimilmente altri due particolari, ciascuno con una delle incognite nulla: ciò che si verifica per la $1.X_1$ al valore



$p/q = \bar{p}_0$, per la $1.X_1$ al valore $p/q = \bar{p}_0$. È facile però vedere — specie dopo aver sopra-distinto gli effetti — come si modificano le cose in ognuna di queste due circostanze; e lasciamo perciò giudicare, come esercizio, a chi legge; come anche gli lasciamo il confronto, accennato in principio, fra il comportamento del sistema a due cerniere dell'Esercizio 15 e del sistema attualmente studiato.

Esercizio 19 — Studiare il sistema elastico di fig. 37 a), per carico p uniforme sull'architrave, nell'ipotesi che i vincoli siano rigidi.



È lo stesso sistema dell'Esercizio 15, con aggiunta una condizione sovrabbondante di vincolo al piede; presenta perciò due incognite iperstatiche: una interna — la tensione X_1 nel tirante EF — una esterna, che è spontanea identificare con la spinta X_2 al piede. La prima di queste due incognite può essere introdotta ad es., come all'Esercizio 15, rimuovendo l'articolazione a uno dei capi del tirante; la seconda sostituendo per es. in B alla cerniera un carrello scorrevole orizzontalmente (fig. 37 b).

L'effetto del carico esterno e quello della $X_1 = 1$ sul sistema principale che così si ottiene, sono già stati considerati all'Esercizio 15, e al riguardo ba-

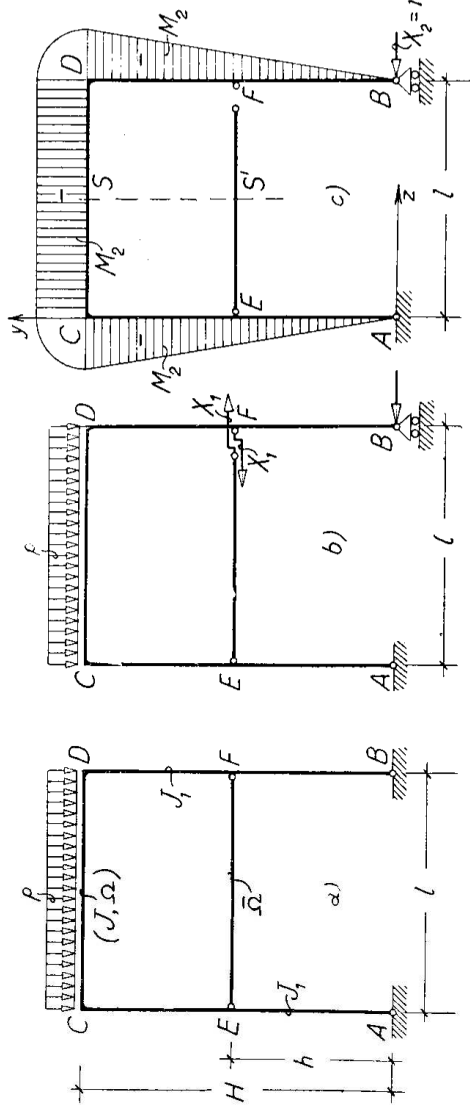


Fig. 37

sta rifarci alla relativa Tabella e alla fig. 31 b) e c).

Per giudicare della seconda incognita, si applichi in B una forza $X_2 = 1$, rivolta ad es. verso l'interno (fig. 37 c)).

Come all'Esercizio 15, terremo conto anche qui, oltrechè del momento, anche della forza normale; per la ora detta condizione di carico, tali caratteristiche variano allora manifestamente — limitandoci per simmetria al mezzo riquadro — secondo le leggi semplicissime della Tabella I/19.

TABELLA I/19

TRONCO	N_2	M_2
AE e BF ($0 \leq y \leq h$)	0	$-1 \cdot y$
EC e FD ($h \leq y \leq H$)	0	$-1 \cdot y$
CS ($0 \leq z \leq l/2$)	-1	$-1 \cdot H$
ES' ($0 \leq z \leq l/2$)	0	0

Combinando questi elementi con quelli della Tabella I/15, si hanno in conseguenza per i prodotti NN_1 ed NN_2 , MM_1 ed MM_2 — scritte ancora per il mezzo riquadro — le leggi indicate nella Tabella II/19, facili a riconoscersi; in esse è stato posto per semplicità $h_0 = H - h$.

Le due equazioni di elasticità occorrenti prendono pertanto — i primi membri essendo nulli, perchè la X_1 è una incognita interna e, per quanto riguarda la X_2 , i

TABELLA II/19

TRONCO	NN ₁	NN ₂	MM ₁ = (M ₀ + M ₁ X ₁ + M ₂ X ₂)M ₁	MM ₂ = (M ₀ + M ₁ X ₁ + M ₂ X ₂)M ₂
AE e BF (0 ≤ y ≤ h)	0	0	0	1 ² .y ³ X ₂
EC e FD (h ≤ y ≤ H)	0	0	1 ² .(y - h) X ₁ + yX ₂ (y - h)	1 ² .(y - h) X ₁ + y X ₂ y
CS (0 ≤ z ≤ l/2)	1 ² .(X ₁ + + X ₂)	1 ² .(X ₁ + + X ₂)	-1. [$\frac{pz}{2}$ (l-z) - 1.h ₀ X ₁ - 1.HX ₂].h ₀	-1. [$\frac{pz}{2}$ (l-z) - 1.h ₀ X ₁ - 1.HX ₂].H
FS' (0 ≤ z ≤ l/2)	1 ² .X ₁	0	0	0

vincoli sono supposti rigidi - le forme seguenti:

$$0 = \frac{1}{\Omega} \int_0^{l/2} 1.(X_1 + X_2) dz + \frac{1}{\Omega} \int_0^{l/2} 1.X_1 dz + \frac{1}{J_1} \int_0^H 1. [(y-h)X_1 - yX_2] (y-h) dy -$$

$$- \frac{1}{J} \int_0^{l/2} \left[\frac{pz}{2} (l-z) - 1.h_0X_1 - 1.HX_2 \right] h_0 dz,$$

$$0 = \frac{1}{\Omega} \int_0^{l/2} 1.(X_1 + X_2) dz + \frac{1}{J_1} \int_0^h 1.y^2 X_2 dz + \frac{1}{J_1} \int_0^H 1. [(y-h)X_1 + yX_2] y dy -$$

$$- \frac{1}{J} \int_0^{l/2} \left[\frac{pz}{2} (l-z) - 1.h_0X_1 - 1.HX_2 \right] H dz.$$

Integrando e riducendo si perviene al sistema:

$$1.X_1 \left\{ 3l \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \right) + h_0^2 \left(\frac{2h_0}{J_1} + \frac{3l}{J} \right) \right\} + 1.X_2 \left\{ \frac{3l}{\Omega} + h_0 \left[\frac{h_0(2H+h)}{J_1} + \frac{3lH}{J} \right] \right\} = \frac{ph_0 l^3}{4J}$$

$$1.X_1 \left\{ \frac{3l}{\Omega} + h_0 \left[\frac{h_0(2H+h)}{J_1} + \frac{3lH}{J} \right] \right\} + 1.X_2 \left\{ \frac{3l}{\Omega} + H^2 \left(\frac{2H}{J_1} + \frac{3l}{J} \right) \right\} = \frac{pH l^3}{4J},$$

il quale, con gli analoghi simboli k adottati all'Esercizio precedente e con l'accortezza che risulta ora $k'_1 \equiv k_2$, si riconosce che ha per soluzione:

$$(a) \left\{ \begin{aligned} 1.X_1 &= \frac{\frac{ph_0 l^3}{4J} \left\{ \frac{3l}{\Omega} + H^2 \left(\frac{2H}{J_1} + \frac{3l}{J} \right) \right\} - \frac{pH l^3}{4J} \left\{ \frac{3l}{\Omega} + h_0 \left[\frac{h_0(2H+h)}{J_1} + \frac{3lH}{J} \right] \right\}}{\left\{ 3l \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \right) + h_0^2 \left(\frac{2h_0}{J_1} + \frac{3l}{J} \right) \right\} \left\{ \frac{3l}{\Omega} + H^2 \left(\frac{2H}{J_1} + \frac{3l}{J} \right) \right\} - \left\{ \frac{3l}{\Omega} + h_0 \left[\frac{h_0(2H+h)}{J_1} + \frac{3lH}{J} \right] \right\}^2} \\ 1.X_2 &= \frac{\frac{pH l^3}{4} \left\{ 3l \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \right) + h_0^2 \left(\frac{2h_0}{J_1} + \frac{3l}{J} \right) \right\} - \frac{ph_0 l^3}{4} \left\{ \frac{3l}{\Omega} + h_0 \left[\frac{h_0(2H+h)}{J_1} + \frac{3lH}{J} \right] \right\}}{\left\{ 3l \left(\frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \right) + h_0^2 \left(\frac{2h_0}{J_1} + \frac{3l}{J} \right) \right\} \left\{ \frac{3l}{\Omega} + H^2 \left(\frac{2H}{J_1} + \frac{3l}{J} \right) \right\} - \left\{ \frac{3l}{\Omega} + h_0 \left[\frac{h_0(2H+h)}{J_1} + \frac{3lH}{J} \right] \right\}^2} \end{aligned} \right.$$

Ci limitiamo a trasformare queste due espressioni — già notevolmente semplificabili dalla forma diretta attuale — per il caso in cui si trascuri il contributo della forza normale, ciò che, come avvertito all'Esercizio 15, equivale in sostanza a ritenere rigidi a tale sollecitazione il tirante EF e l'architrave CD , in quanto lungo i ritti (cfr. la Tabella II/19) i pro-dotti NN_1 ed NN_2 sono identicamente nulli.

Nella ipotesi ora detta — la quale, formalmente, equivale a ritenere $\Omega = \bar{\Omega} = \infty$ — la soluzione si riduce con qualche piccolo accorgimento, posto come al solito $\delta = J/J_1$, alla seguente forma semplice:

$$(b) \quad 1.X_1 = \frac{p H (H + h) l^3}{4 h h_0 [\delta h_0 (3H + h) + 6lH]} ; \quad 1.X_2 = - \frac{p h_0 l^3}{4 h [\delta h_0 (3H + h) + 6lH]} .$$

Sarebbe senza dubbio interessante un confronto approfondito diretto di queste soluzioni con le (a), che tengono conto anche del contributo della forza normale, e, in un secondo tempo, con le analoghe soluzioni che si avrebbero nel caso che le due cerniere di imposta potessero subire uno spostamento orizzontale relativo δ , di tipo ad es. anelastico.

La forma complessa delle (a), e più ancora, poi quella delle soluzioni relative all'ultimo caso detto, ci adatterebbe però in sviluppi complessi e renderebbe involuto e poco snello il confronto; ci varremo invece di semplici considerazioni intuitive, facili d'altronde a sostituirsi sull'esame diretto delle (b).

Al riguardo è infatti sufficiente osservare che l'aver supposti i vincoli fissi, equivale in definitiva ad aver collegato le due cerniere con un pendolo rigido, alla stregua di quello EF ; sicchè si può dire che le soluzioni (b) ora trovate corrispondono al caso di un architrave rigido a forza normale, ma libero per altro di inflettersi, e di due pendoli rigidi AB ed EF ;

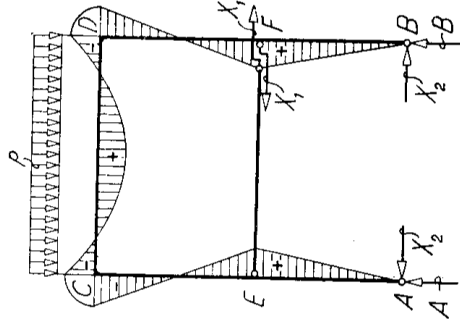


Fig. 38

i segni delle $1.X_1$ ed $1.X_2$ ci dicono allora che in tali condizioni il pendolo EF funziona da tirante, quello AB al piede funziona da puntone; in fig. 38 si è indicato il corrispondente andamento del diagramma dei momenti.

È facile ora intuire come si modificherebbero le cose supponendo intanto elastico, com'è in pratica, il tirante EF , e conservando per altro invariata l'ipotesi che le cerniere A e B al piede siano rigide.

Ciò equivarrebbe infatti a tenere in conto uno spostamento relativo dei punti E ed F' , pari all'allungamento elastico del tirante, e comporterebbe quindi una diminuzione del valore della tensione X_1 in esso e, nel contempo, di quello della spinta X_2 .

Supponendo di più che la rigidezza a forza normale del tirante EF possa essere diminuita gradatamente fino a zero (cioè $\bar{Q} \rightarrow 0$) la spinta X_2 si annullerebbe prima e quindi si invertirebbe di senso, riportando il problema nelle condizioni ad es. dell'Esercizio 11.

Per mettere in conto finalmente il modo di influire di uno spostamento relativo anelastico, ad es. di avvicinamento, delle due cerniere al piede, basterebbe immaginare applicate, alla stregua di forze esplicite, (cfr. gli Esercizi 1 e 4) nei punti A e B due determinate forze orizzontali dirette verso l'interno, le quali andrebbero pertanto a modificare, in senso inverso, i valori delle due incognite X_1 e X_2 ; con tale modello, sarebbe allora facile trattare i due casi di tirante EF rigido e di tirante elastico.

Esercizio 20 — Risolvere il sistema elastico simmetrico di fig. 39 a) nell'ipotesi che gli incastrî siano perfetti.

—♦—

Come nel caso del sistema chiuso dell'Esercizio 17, la simmetria dello schema e del carico vale anche qui a ridurre il numero delle incognite iperstatiche: in virtù di essa infatti le componenti verticali delle

reazioni degli incastri non possono che essere uguali fra loro e alla metà del carico P ; sicchè possiamo riguardare questa componente come una forza esplicita.

Scegliendo il sistema principale ad es. al modo della fig. 39b), eliminando cioè l'incastro in $B^{(1)}$, dei tre parametri della relativa reazione uno è così già noto a priori; a

differenza del caso sopra ricordato, in cui della reazione finita si conosceva già la direzione, in quanto la possibilità

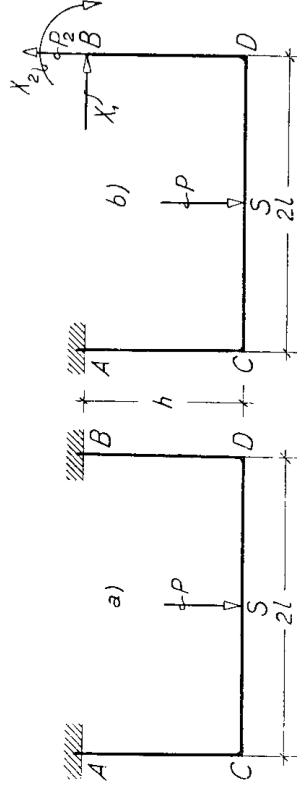


Fig. 39

del moto relativo delle due sezioni diagonali di estremità del semiriquadro portava l'annullarsi della componente di essa normale al carico, qui, per la rigidezza degli incastri, non si può più dire altrettanto e restano in conseguenza due incognite iperstatiche effettive: la componente orizzontale X_1 - spinta - della reazione finita e il momento di incastro X_2 .

Supponendo in un primo tempo il sistema principale gravato dalle sole forze esplicite, fra cui la suddetta componente nota $P/2$ della reazione in B (fig. 40a), all'incastro A si sviluppa ovviamente solo l'altra reazione verticale pari ancora a $P/2$, essendo nulla rispetto ad A la somma algebrica dei momenti di dette forze; tenendo conto della sola sollecitazione di flessione, si ha pertanto nell'architrave CD una distribuzione simmetrica lineare dei momenti M_0 che, dal valore zero nei due estremi C e D , raggiunge il massimo valore assoluto in mezzeria, cioè sotto il carico P ; per il mezzo architrave CS è dunque:

$$M_0 = -\frac{P}{2}z.$$

Rimosse ora le forze esplicite, si suppongano agire

⁽¹⁾ A norma dell'avvertenza fatta a piè di pag. 90, non appare questa a tutta prima la scelta più conveniente; nondimeno le considerazioni che seguono la rendono bene giustificata.

di seguito separatamente nella sezione B dello stesso sistema principale (fig. 40b)), una forza orizzontale $X_1=1$ diretta ad es. verso l'esterno, e una coppia di momento unitario $X_2=\bar{1}$ ad es. positivo. Non v'è difficoltà a riconoscere - limitandoci ancora, per la simmetria, al mezzo riquadro - per le caratteristiche M_1

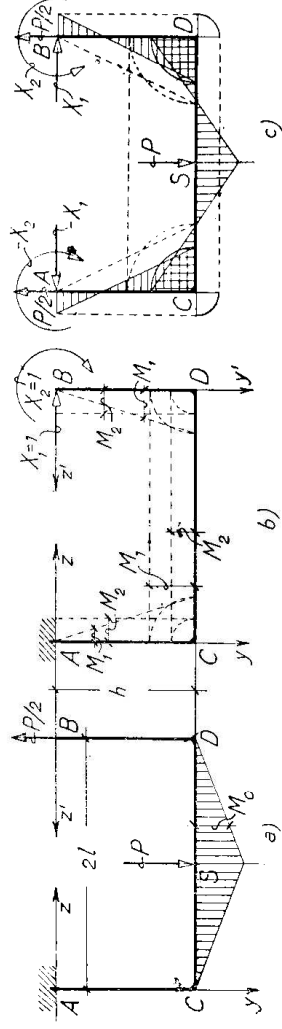


Fig. 40

ed M_2 , e quindi per il momento M nel sistema effettivo, le leggi indicate nella Tabella I/20.

TABELLA I/20

TRONCO	M_0	M_1	M_2	$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$
AC ($0 \leq y \leq h$)	0	$+1 \cdot y$	$+\bar{1}$	$0 + 1 \cdot X_1 y + \bar{1} \cdot X_2$
CS ($0 \leq z \leq l$)	$-\frac{P}{2} z$	$+1 \cdot h$	$+\bar{1}$	$-\frac{P}{2} z + 1 \cdot X_1 h + \bar{1} \cdot X_2$

Nella fig. 40a) è rappresentato il diagramma dei momenti M_0 ; in fig. 40b) lo sono, sovrapposti e segnati a tratto punteggiato, i diagrammi dei momenti M_1 ed M_2 .

Con gli elementi della Tabella I/20, le due equazioni di elasticità occorrenti a determinare X_1 ed X_2 , divengono successivamente:

$$0 = \int_0^h \frac{MM_1}{EJ_1} dy + \int_0^l \frac{MM_1}{EJ} dz = \int_0^h \frac{(1 \cdot X_1 y + \bar{1} \cdot X_2) y}{EJ_1} dy + \int_0^l \frac{(-\frac{P}{2} z + 1 \cdot X_1 h + \bar{1} \cdot X_2) h}{EJ} dz;$$

$$0 = \int_0^h \frac{MM_2}{EJ_1} dy + \int_0^l \frac{MM_2}{EJ} dz = \int_0^h \frac{(1 \cdot X_1 y + \bar{1} \cdot X_2)}{EJ_1} dy + \int_0^l \frac{(-\frac{P}{2} z + 1 \cdot X_1 h + \bar{1} \cdot X_2)}{EJ} dz.$$

Queste, integrando e riducendo, prendono la forma esplicita:

$$(a) \quad \begin{cases} 1.X_1 \left[h \left(\frac{h}{3J_1} + \frac{l}{J} \right) \right] + 1.X_2 \left[\frac{h}{2J_1} + \frac{l}{J} \right] = \frac{Pl^2}{4J} \\ 1.X_1 \left[h \left(\frac{h}{2J_1} + \frac{l}{J} \right) \right] + 1.X_2 \left[\frac{h}{J_1} + \frac{l}{J} \right] = \frac{Pl^2}{4J} \end{cases}$$

Sottraendo ad es. dalla seconda la prima, risulta subito per $1.X_1$ l'espressione:

$$(b) \quad 1.X_1 = - \frac{3}{4} \frac{Pl^2}{h},$$

la quale, sostituita ad es. nella seconda delle (a) e posto $\vartheta = J/J_1$, $\mu = h/l$, fornisce:

$$(c) \quad 1.X_2 = - \frac{1}{2} \frac{l}{4 + \mu\vartheta} P,$$

e per sostituzione nella (b):

$$(d) \quad 1.X_1 = \frac{3}{2} \frac{1}{\mu(4 + \mu\vartheta)} P.$$

Delle due incognite, la X_1 è dunque stata prevista col giusto segno, la X_2 invece col segno scambiato; nella fig. 40c) è rappresentato l'andamento del diagramma dei momenti effettivi nel sistema liberato dai vincoli; per una giustificazione intuitiva di questo andamento, si osservi che, con riguardo alla (b), il momento nei vertici C e D del riquadro sta con quello X_2 agli incastri nella relazione:

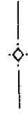
$$M_C = M_D = X_1 h = - 3X_2;$$

e, per quanto riguarda i valori assoluti, con quello M_S sotto al carico in quest'altra:

$$|M_S| = |M_{os}| - |M_C| = \left| \frac{Pl}{2} \right| - |X_1 h| = |(4 + \mu\vartheta) X_2| - |3X_2| > 0,$$

ciò che rende ragione della zona di momento negativo nelle adiacenze del carico.

Esercizio 21 — Determinare lo stato di tensione che nasce nell'arco circolare di corda l e freccia f di fig. 41 *a*), per un aumento uniforme di temperatura di Δt gradi, nell'ipotesi che gli incastri siano perfetti.



Per riconoscere come influisca un aumento (e inversamente una diminuzione) di temperatura, si osservi che se l'arco fosse completamente liberato dai vincoli, subirebbe una variazione uniforme di tutte le sue dimensioni, assumendo una forma affine a quella iniziale, senza peraltro entrare in tensione; gli incastri, impedendo questa dilatazione libera, costringono invece l'arco in un determinato stato di tensione.

A giudicare di tale stato, si avverta che la stessa libertà di movimento, per assumere in conseguenza la stessa forma omotetica suddetta, l'arco la godrebbe ancora se, anzichè tutti e due, rimuovessimo uno solo degli inca-

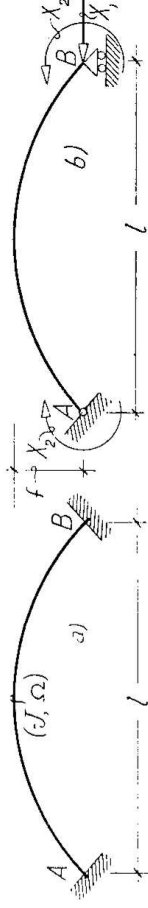


Fig. 41

in fig. 41 *b*), se sostituissimo in luogo dell'incastro di sinistra una cerniera e in luogo di quello di destra un carrello scorrevole orizzontalmente.

Sul sistema che così si ottiene — che è quello stesso di fig. 22 *b*) dell'Esercizio 10 — è facile valutare l'effetto delle incognite iperstatiche introdotte.

Queste, contro le tre condizioni semplici di vincolo effettivamente rimosse, sono di fatto, in virtù della specifica causa dello stato di tensione che stiamo ricercando, soltanto due: giacchè infatti, per ragioni di simmetria, gli incastri dovrebbero essere impegnati verticalmente con due reazioni uguali e concordi, le quali quindi, mancando le forze esplicite, non potrebbero trovare l'equilibrio, si conclude che tali componenti di reazione sono necessariamente nulle, e che quindi i due incastri reagiscono, sempre per simmetria, con due forze finite orizzontali X_1 e con due momenti X_2 uguali ed opposti (fig. 41 *b*)).

Immaginando per un momento che l'arco abbia raggiunta la configurazione deformata, è ovvio che questi due parametri devono avere tali valori da riportare le imposte al rispetto dei vincoli.

Ora la configurazione deformata è caratterizzata dai seguenti due elementi per noi essenziali: da un lato, detto α il coefficiente di dilatazione termica del materiale, l'allungamento $\Delta l = \alpha l \Delta t$ che subisce la corda, dall'altro il fatto che le sezioni di imposta rimangono parallele alla giacitura iniziale; nel ritorno alla configurazione effettiva, le due forze $X_1 = 1$ lavorano quindi per lo spostamento relativo $\alpha l \Delta t$ dei loro punti di applicazione, i due momenti $X_2 = 1$ fanno lavoro nullo.

Si avverte che in questo ragionamento il principio dei l.v. viene applicato come a ritroso, riguardando la configurazione deformata come configurazione di

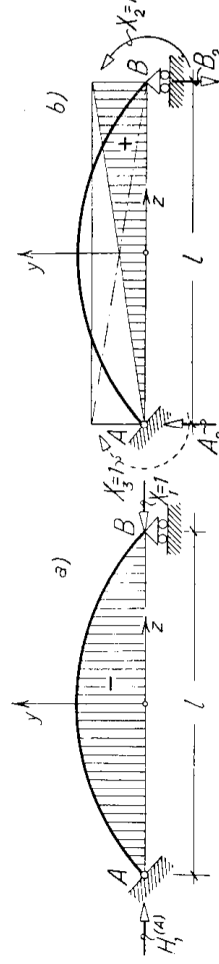


Fig. 42

partenza e considerando come virtuale la deformazione che riporta il sistema nella effettiva condizione richiesta dai vincoli; è perciò questa la deformazione che deve essere associata, come virtuale, ai due stati equilibrati di forze-tensioni provocati separatamente nel sistema principale di fig. 41 b) dalla forza $X_1 = 1$ in B e dall'insieme dei due momenti $X_2 = 1$ agli estremi A e B.

Tenendo conto della forza normale e del momento flettente, per la prima di queste due condizioni di carico, supposta ad es. la $X_1 = 1$ rivolta verso l'interno, si hanno lungo l'arco le seguenti caratteristiche di sollecitazione:

$$N_1 = -1 \cos \alpha \quad ; \quad M_1 = -1 y = -1 (R \cos \alpha - h_0) .$$

Per la seconda condizione, supposti i due momenti

$X_2 = \bar{1}$ ad es. positivi, si hanno invece manifestamente queste altre caratteristiche:

$$N_2 = 0 \quad ; \quad M_2 = + \bar{1} .$$

Sovrapponendo gli effetti, si hanno dunque lungo l'arco le caratteristiche effettive:

$$N = N_1 X_1 + N_2 X_2 = -1 \cdot \cos \alpha X_1 \quad ; \quad M = M_1 X_1 + M_2 X_2 = -1 (R \cos \alpha - h_0) X_1 + \bar{1} \cdot X_2 .$$

Con questi elementi, le due equazioni di elasticità atte a determinare le incognite, divengono successivamente:

$$\left\{ \begin{aligned} 1. \alpha l \Delta t &= \int_s \frac{NN_1}{E\Omega} ds + \int_s \frac{MM_1}{EJ} ds = \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \frac{1^2 \cos^2 \alpha X_1}{E\Omega} R d\alpha + \\ &+ \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \frac{[(1 \cdot R \cos \alpha - h_0) X_1 - \bar{1} \cdot X_2][1 \cdot (R \cos \alpha - h_0)]}{EJ} R d\alpha \quad ; \\ 0 &= \int_s \frac{NN_2}{E\Omega} ds + \int_s \frac{MM_2}{EJ} ds = \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \frac{\bar{1} \cdot [-1 (R \cos \alpha - h_0) X_1 + \bar{1} \cdot X_2]}{EJ} R d\alpha . \end{aligned} \right.$$

Integrando, con riguardo alle posizioni (cfr. anche l'Esercizio 10):

$$\operatorname{sen} \alpha_0 = \frac{l}{2R} \quad ; \quad \cos \alpha_0 = \frac{h_0}{R} \quad ; \quad \rho^2 = \frac{J}{\Omega} \quad ,$$

tali equazioni prendono la forma esplicita:

$$\left\{ \begin{aligned} 1. X_1 \left[(\rho^2 + R^2) \left(\alpha_0 + \frac{l h_0}{2R^2} \right) - 2h_0(l - \alpha_0 h_0) \right] + \bar{1} \cdot X_2 (2\alpha_0 h_0 - l) &= -\frac{\alpha l \Delta t EJ}{R} \\ 1. X_1 (2\alpha_0 h_0 - l) + 2\alpha_0 \bar{1} \cdot X_2 &= 0 \quad , \end{aligned} \right.$$

ovvero, con queste ulteriori posizioni:

$$\lambda = \frac{h_0}{l} \quad ; \quad \mu = \frac{R}{l} \quad ; \quad \nu = \frac{\rho}{R} \quad ,$$

quest'altra:

$$\left\{ \begin{aligned} 1. X_1 \left[(1 + \nu^2) (\lambda + 2\alpha_0 \mu^2) - 4\lambda(1 - \alpha_0 \lambda) \right] + \bar{1} \cdot X_2 \frac{2}{l} (2\alpha_0 \lambda - 1) &= \frac{2\alpha \Delta t EJ}{lR} \\ 1. X_1 l (2\alpha_0 \lambda - 1) + \bar{1} \cdot X_2 2\alpha_0 &= 0 \quad . \end{aligned} \right.$$

Dalla seconda si ricava ad es.:

$$(*) \quad \bar{1}.X_2 = 1.X_1 \frac{l(1-2\alpha_0\lambda)}{2\alpha_0}.$$

Sostituendo nella prima, è allora con facili calcoli:

$$(a) \quad 1.X_1 = \frac{2\alpha_0 \Delta t E J}{l R [\alpha_0 (1 + \nu^2) (\lambda + 2\alpha_0 \mu^2) - 1]}$$

e tornando alla (*) anche:

$$(b) \quad \bar{1}.X_2 = \frac{\alpha (1 - 2\alpha_0 \lambda) \Delta t E J}{R [\alpha_0 (1 + \nu^2) (\lambda + 2\alpha_0 \mu^2) - 1]}.$$

Voler prescindere dal contributo della forza normale, equivarrebbe a ritenere l'arco rigido a questa sollecitazione, cioè, teoricamente, $\Omega = \infty$ e per conseguenza $\varphi = \nu = 0$; in tal caso le (a) e (b) diverrebbero:

$$(a') \quad 1.X_1 = \frac{2\alpha_0 \Delta t E J}{l R [\alpha_0 (\lambda + 2\alpha_0 \mu^2) - 1]} \quad ; \quad (b') \quad \bar{1}.X_2 = \frac{\alpha (1 - 2\alpha_0 \lambda) \Delta t E J}{R [\alpha_0 (\lambda + 2\alpha_0 \mu^2) - 1]}.$$

Nell'uno e nell'altro caso può essere interessante osservare come ambedue le incognite siano proporzio-

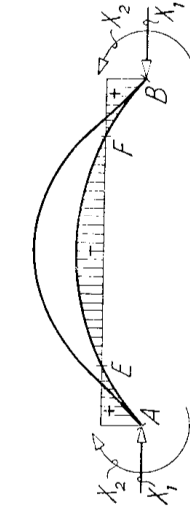


Fig. 43

nali, oltrechè, come ovvio, al salto di temperatura Δt , al momento d'inerzia della sezione dell'arco rispetto all'asse normale al piano di figura (asse neutro) e al modulo E ; sicchè, a parità di altre condizioni, di due archi, uno tozzo uno snello, il primo risente in maggior grado uno stesso sbalzo termico Δt .

In fig. 43 sono indicati l'andamento del diagramma dei momenti nell'arco liberato dai vincoli e, per mettere in evidenza il significato dei due punti di passaggio E ed F in tale diagramma, la configurazione deformata che assume l'arco.

Esercizio 22 — Risolvere il sistema elastico di fig. 44 a), caricato sul ritto di sinistra da un carico uniforme q , nell'ipotesi che gli incastri siano perfetti.



Il sistema, per la dissimmetria del carico, presenta tre incognite iperstatiche, che possono ad es. essere identificate (fig. 44 b)) con la componente orizzontale X_1 della reazione in B e con i due momenti al piede X_2 e X_3 .

L'azione del carico esplicito q sul sistema principale che residua con la introduzione di tali incognite, è già stata studiata sostanzialmente all'Esercizio 3 (fig. 9 a)) salvo l'aver tenuto conto allora, in più, del risucchio sul ritto a valle, risucchio che, per semplicità, abbiamo invece qui trascurato.

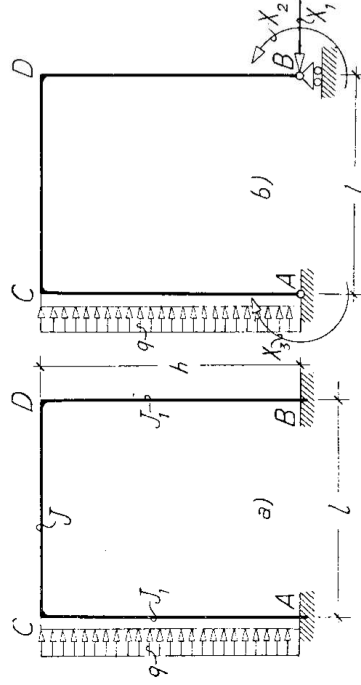


Fig. 44

Comunque, i vincoli reagiscono (fig. 45 a)) con le seguenti reazioni:

$$A_o = -B_o = -\frac{Qh}{2l} = -\frac{qh^2}{2l} \quad ; \quad H_o^{(A)} = -Q = -qh \quad ,$$

sicchè ne nasce per il sistema il diagramma dei momenti M_o rappresentato a tratto pieno in fig. 45 a) e rispondente per i vari tronchi alle leggi indicate nella Tabella I/22.

Per quanto riguarda la condizione isolata di carico $X_1=1$, niente di diverso da quanto riconosciuto all'Esercizio 14 (fig. 30 c)): un unico parametro di reazione a sinistra $H_1^{(A)}=-1$, e un diagramma dei momenti M_1 simmetrico con l'andamento a tratto punteggiato della stessa fig. 45 a).

L'azione di un momento $X_2=\bar{1}$ in B , ovvero quella di un momento $X_3=\bar{1}$ in A , porta d'altra parte a dei risultati perfettamente simmetrici; possiamo perciò limi-

tarci a studiare ad es. la condizione $X_2 = \bar{1}$, salvo a simmetrizzare poi sui due ritti e lungo l'architrave il diagramma dei momenti.

Per l'azione di un $X_2 = \bar{1}$, ad es. positivo, nascono nei vincoli le reazioni:

$$A_2 = -B_2 = \frac{\bar{1}}{l},$$

e si ha conseguentemente lungo il sistema il diagramma dei momenti M_2 indicato a tratto continuo (e in modo simmetrico quello M_3 a tratto punteggiato) nella fig. 45b): di valore costante unitario lungo tutto il ritto adiacente e decrescente poi con legge lineare,

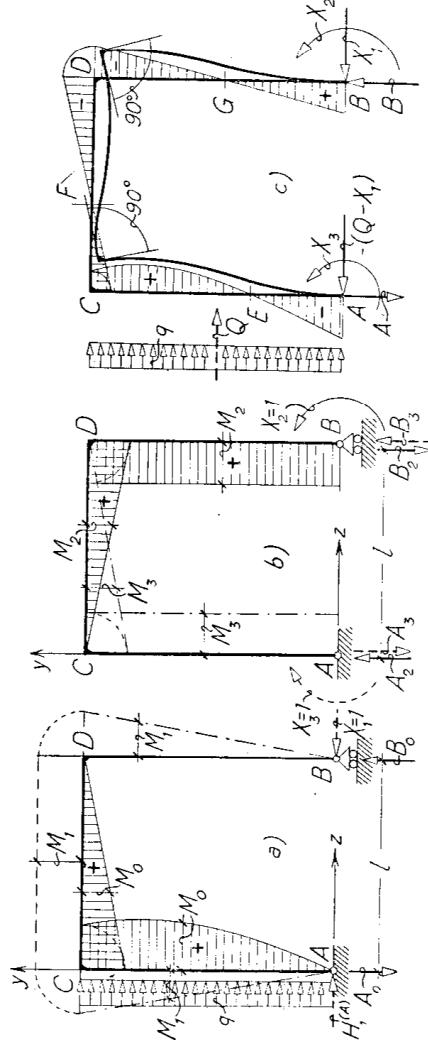


Fig. 45

fino ad annullarsi, lungo l'architrave; M_2 ed M_3 variano cioè secondo le semplici leggi analitiche indicate nella Tabella I/22.

TABELLA I/22

TRONCO	M_0	M_1	M_2	M_3
$AC (0 \leq y \leq h)$	$+ qy \left(h - \frac{y}{2} \right)$	$- 1 \cdot y$	0	$+ \bar{1}$
$AC (0 \leq z \leq l)$	$+ \frac{qh^2}{2} \left(1 - \frac{z}{l} \right)$	$- 1 \cdot h$	$+ \frac{\bar{1}}{l} z$	$+ \bar{1} \left(1 - \frac{z}{l} \right)$
$BD (0 \leq y \leq h)$	0	$- 1 \cdot y$	$+ \bar{1}$	0

Le corrispondenti leggi MM_i ($i=1,2,3$) sono allora quelle della Tabella II/22, dove, per ragioni di ingombro, è stato posto $\lambda = 1 - z/l$.

TABELLA II / 22

TRONCO	$MM_1 = (M_0 + \sum_1^3 M_i X_i) M_1$	$MM_2 = (M_0 + \sum_1^3 M_i X_i) M_2$	$MM_3 = (M_0 + \sum_1^3 M_i X_i) M_3$
AC	$-1. \left[qy \left(h - \frac{y}{2} \right) - 1. X_1 y + 0 + \bar{1}. X_3 y \right]$	0	$\bar{1} \left[qy \left(h - \frac{y}{2} \right) - 1. X_1 y + 0 + \bar{1}. X_3 y \right]$
CD	$-1. \left[\frac{qh^2}{2} \lambda - 1. X_1 h + \frac{\bar{1}. X_2 z + \bar{1}. X_3 \lambda}{l} \right] h$	$\bar{1} \left[\frac{qh^2}{2} \lambda - 1. X_1 h + \frac{\bar{1}. X_2 z + \bar{1}. X_3 \lambda}{l} \right] \frac{z}{l}$	$\bar{1} \left[\frac{qh^2}{2} \lambda - 1. X_1 h + \frac{\bar{1}. X_2 z + \bar{1}. X_3 \lambda}{l} \right] \lambda$
BD	$-1. (0 - 1. X_1 y + \bar{1}. X_2 + 0) y$	$\bar{1}. (0 - 1. X_1 y + \bar{1}. X_2 + 0)$	0

Le tre equazioni d'elasticità atte a fornire le tre incognite X_1 , X_2 e X_3 , stante l'ipotesi fatta sui vincoli, divengono in conseguenza e di seguito:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_s^h \frac{MM_1}{EJ} ds = \int_0^h \frac{\left[qy \left(h - \frac{y}{2} \right) - 1. X_1 y + \bar{1}. X_3 y \right]}{EJ_1} dy + \\
 &+ \int_0^l \frac{\left[\frac{qh^2}{2} \left(1 - \frac{z}{l} \right) - 1. X_1 h + \frac{\bar{1}. X_2 z + \bar{1}. X_3 \lambda}{l} \right] h}{EJ} dz + \int_0^h \frac{-[1. X_1 y + \bar{1}. X_2] y}{EJ_1} dy; \\
 0 &= \int_s^h \frac{MM_2}{EJ} ds = \int_0^h \frac{\left[\frac{qh^2}{2} \left(1 - \frac{z}{l} \right) - 1. X_1 h + \frac{\bar{1}. X_2 z + \bar{1}. X_3 \lambda}{l} \right] \frac{z}{l}}{EJ} dz + \\
 &+ \int_0^h \frac{-[1. X_1 y + \bar{1}. X_2]}{EJ_1} dy; \\
 0 &= \int_s^h \frac{MM_3}{EJ} ds = \int_0^h \frac{\left[\frac{qh^2}{2} \left(1 - \frac{z}{l} \right) - 1. X_1 h + \frac{\bar{1}. X_2 z + \bar{1}. X_3 \lambda}{l} \right] \left(1 - \frac{z}{l} \right)}{EJ} dz + \\
 &+ \int_0^h \frac{\left[qy \left(h - \frac{y}{2} \right) - 1. X_1 y + \bar{1}. X_3 y \right]}{EJ_1} dy.
 \end{aligned}$$

Integrando, riducendo e posto $\vartheta = J/J_1$, queste equazioni prendono la forma esplicita:

$$\left\{ \begin{aligned} 1. X_1 [8h(3l + 2\vartheta h)] - \bar{1}. X_2 [12(l + \vartheta h)] - \bar{1}. X_3 [12(l + \vartheta h)] &= qh^2(6l + 5\vartheta h) \\ 1. X_1 [6h(l + \vartheta h)] - \bar{1}. X_2 [4(l + 3\vartheta h)] - \bar{1}. X_3 .2l &= qlh^2 \\ 1. X_1 [3h(l + \vartheta h)] - \bar{1}. X_2 .l &- \bar{1}. X_3 [2(l + 3\vartheta h)] = qh^2(l + 2\vartheta h) \end{aligned} \right.$$

Se alla seconda, una volta si sottrae una volta si aggiunge la terza moltiplicata per 2, si ottengono facilmente per la differenza e per la somma delle incognite X_2 e X_3 le espressioni:

$$(a) \quad \bar{1}.X_2 - \bar{1}.X_3 = \frac{qh^2(l+4\vartheta h)}{2(l+6\vartheta h)} ;$$

$$(b) \quad \bar{1}.X_2 + \bar{1}.X_3 = \frac{\bar{1}.X_1[12h(l+\vartheta h)] - qh^2(3l+4\vartheta h)}{6(l+2\vartheta h)} .$$

Ma dalla prima delle dette equazioni si deduce anche per la stessa somma quest'altra espressione:

$$(b') \quad \bar{1}.X_2 + \bar{1}.X_3 = \frac{\bar{1}.X_1[8h(3l+2\vartheta h) - qh^2(6l+5\vartheta h)]}{12(l+\vartheta h)} .$$

Uguagliando allora i secondi membri delle (b), e (b'), si ricava intanto per la $\bar{1}.X_1$ la soluzione:

$$(c) \quad \bar{1}.X_1 = \frac{h(3l+2\vartheta h)}{8(2l+\vartheta h)} \cdot q .$$

Sostituendo questo valore ad es. nella (b) si ha allora per determinare le $\bar{1}.X_2$ e $\bar{1}.X_3$ il sistema parziale:

$$(d) \quad \bar{1}.X_2 + \bar{1}.X_3 = -\frac{qh^2(3l+\vartheta h)}{12(2l+\vartheta h)} ; \quad \bar{1}.X_2 - \bar{1}.X_3 = \frac{qh^2(l+4\vartheta h)}{2(l+6\vartheta h)} ,$$

dal quale, per somma e differenza, si ottengono le due ulteriori soluzioni:

$$(e) \quad \bar{1}.X_2 = \frac{qh^2}{24} \cdot \frac{9(l^2+2\vartheta^2h^2)+35\vartheta lh}{(2l+\vartheta h)(l+6\vartheta h)} ; \quad \bar{1}.X_3 = -\frac{qh^2}{24} \cdot \frac{15(l^2+2\vartheta^2h^2)+73\vartheta lh}{(2l+\vartheta h)(l+6\vartheta h)} .$$

Delle tre incognite, la X_1 e la X_2 sono dunque state previste col giusto segno, la X_3 invece col segno opposto.

È ora relativamente facile giudicare dell'andamento del diagramma dei momenti nel sistema effettivo, sovrapponendo algebricamente tutti gli effetti. In questo compito si può essere facilitati riconoscendo preventivamente il segno del momento nelle due sezioni di solidarietà D e C fra ritte e architrave.

Con riferimento alle forze alla destra, risulta in modo quasi immediato:

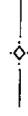
$$M_D = \bar{1}.X_3 - 1.X_1h = -\frac{qh^2}{24} \cdot \frac{3h(18\vartheta h + 25l)}{(2l + \vartheta h)(l + 6\vartheta h)} < 0 ;$$

con riferimento invece alle forze alla sinistra:

$$M_C = \bar{1}.X_3 + (Q - X_1)h - \frac{qh^2}{2} = \frac{qh^2}{24} \cdot \frac{3h(6\vartheta h + 23l)}{(2l + \vartheta h)(l + 6\vartheta h)} > 0 .$$

Su tali elementi, il detto diagramma non può che avere l'andamento indicato in fig. 45c); nella stessa figura è anche disegnata, sempre indicativamente, la corrispondente configurazione deformata del sistema, e ciò per porre in rilievo — come già all'Esercizio precedente — la funzione dei tre punti di passaggio E , F e G del momento che compaiono sui tre tronchi.

Esercizio 23 — Risolvere il sistema elastico di fig. 46a), nel quale il tronco curvo è parabolico con corda l e freccia f , nell'ipotesi che gli incastrì siano perfetti.



Ci si riferisce al sistema principale di fig. 46b), che corrisponde in tutto a quello già scelto all'Esercizio precedente; c'è qui da notare che, conforme a quanto già riconosciuto all'Esercizio 21 a proposito di una variazione termica, se sul sistema agisse soltanto il carico uniforme p , ragioni di simmetria ridurrebbero le iperstatiche a due, e precisamente alla spinta e ai momenti (uguali) al piede dei due steli, in quanto le componenti verticali delle reazioni non potrebbero che essere uguali fra loro e, ciascuna, alla metà del carico.

La presenza della forza orizzontale H nel vertice C di sinistra modifica invece le due componenti orizzontali e i due momenti al piede, sicchè le incognite risultano tre: ad es., secondo le notazioni di fig. 46b)