Supposto rigido il piano di scorrimento del carrello, sicchè risulta nullo il primo membro della (4),

TABELLA I/9

TRONCO	M_o	M_1	$MM_1 = (M_o + M_1 X) M_1$
BC $(0 \leq z \leq l)$	$-\dfrac{p z^2}{2}$	$-1.z$	$1.\left(\dfrac{pz^2}{2} + 1.z X\right) z$
CA $(0 \leq y \leq h)$	$-\dfrac{p l^2}{2} - \dfrac{q y^2}{2}$	$-1.l$	$1.\left(\dfrac{p l^2}{2} + \dfrac{qy^2}{2} + 1.l X\right) l$

questa, a meno del contributo della forza normale e del taglio (le leggi MM_1 sono anche indicate nella Tabella I/9) diviene:

$$0 = \frac{1}{EJ_1} \int_0^h \left(\frac{p\, l^2}{2} + \frac{q y^2}{2} + 1.l X \right) l\, dy + \frac{1}{EJ_2} \int_0^l \left(\frac{p\, z^2}{2} + 1.z X \right) z\, dz \, .$$

Sviluppando i facili integrali, riducendo e posto $\vartheta = J_1/J_2$, si ottiene rapidamente la soluzione:

$$\text{(a)} \qquad 1.X = -\frac{3}{8} \cdot \frac{l(4h + \vartheta l)}{3h + \vartheta l}\, p - \frac{1}{2} \cdot \frac{h^3}{l(3h + \vartheta l)}\, q = X_p + X_q \, ,$$

nella quale si sono separati espressamente i due contributi dei carichi sul ritto e sull'architrave (capaci di assimilare rispettivamente ad es. l'azione del vento e della neve). Ambedue questi contributi, come dice il segno negativo loro preposto, risultano di senso opposto a quello da noi previsto per la $X = 1$; la reazicne X complessiva spira quindi verso l'alto, e in fig. 21 *d)* si vede il conseguente andamento del diagramma dei momenti nel sistema effettivo; ivi sono anche indicati i parametri della reazione dell'incastro, dei quali –per la scelta fatta della incognita iperstatica– abbiamo fino ad ora potuto fare a meno.

Se, contrariamente all'ipotesi fatta, il piano di scorrimento del carrello in B avesse consentito un cedimento verticale δ, la soluzione si sarebbe modificata, come è facile riconosce, per l'aggiunta del termine:

$$X_\delta = \frac{\delta}{\frac{l^2}{E}\left(\frac{h}{J_1} + \frac{l}{3J_2}\right)} = \frac{3\,E\,J_1}{l^2(3\,h + \vartheta\,l)} \cdot \delta \,, \tag{b}$$

dipendente, oltrechè dall'inerzia dei due tronchi del sistema, anche dalla natura del materiale di cui questo è costituito.

Il segno di tale contributo, come già avemmo occasione di riconoscere altra volta (cfr. Ess. 1 e 4) è poi quello stesso di δ, per modo che se questo spostamento, com'è da attendersi nella generalità dei casi, avviene verso il basso, si ha una diminuzione del valore assoluto della X, fino eventualmente ad annullarla –il vincolo B sarebbe allora solo apparente– ed anche ad invertirla di senso, producendo lungo tutto il sistema una maggiorazione del valore assoluto di M.

Esaminiamo ancora della (a) qualche caso particolare possibile.

Potrebbe essere ad es. $J_1 = J_2 = J$; ciò equivarrebbe a fare nella (a) $\vartheta = 1$; se di più, sempre in questo caso, fosse anche $h = l$, risulterebbe in modo immediato:

$$1.X = -\frac{15}{32}\,p\,l - \frac{1}{8}\,q\,l \;; \tag{c}$$

in modo analogo l'effetto di un eventuale cedimento δ sarebbe dalla (b):

$$X_\delta = \frac{3}{4}\,\frac{E\,J}{l^3} \cdot \delta \,. \tag{d}$$

Lasciamo a chi legge di riconoscere come si modificano i risultati mettendo in conto anche la forza normale.

Esercizio 10 — **Risolvere il sistema di fig. 22 a), costituito da un arco circolare con cerniere agli estremi, corda l e freccia f, nell'ipotesi che sia caricato verticalmente con carico uniforme p e che le cerniere di imposta subiscano un allontanamento relativo δ.**

Si sceglie come incognita iperstatica X la componente orizzontale della reazione della cerniera B

(fig. 22 *b*)); nelle condizioni residue di vincolo, le reazioni e i momenti M lungo l'arco non differiscono da quelli nella trave semplice della medesima luce:

$$A_o = B_o = \frac{p\,l}{2} \quad ; \quad M_o = \frac{p\,l}{2} z - \frac{p z^2}{2} = \frac{p z}{2}(l - z) \; ;$$

a quest'ultima legge corrisponde il diagramma parabolico indicato a tratto punteggiato in fig. 22 *c*), dove è stata assunta come fondamentale la corda AB.

Applicata ora in B, dopo rimosso il carico ripartito, una forza orizzontale $X = 1$ rivolta ad es. verso l'interno, il momento M_1 lungo l'arco varia con la stes-

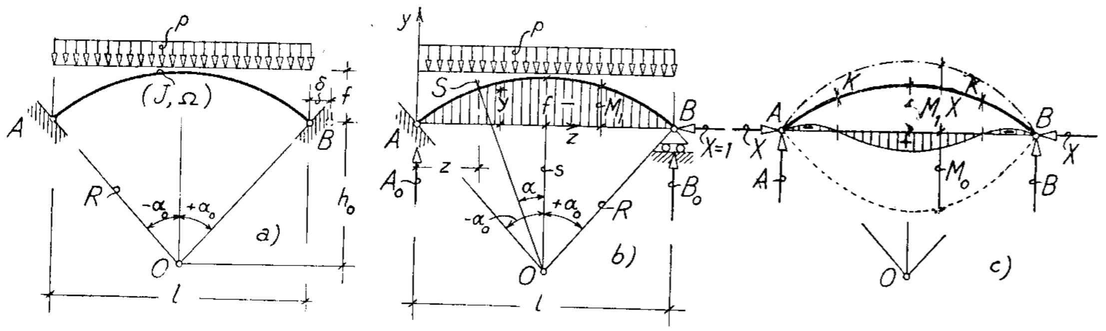

Fig. 22

sa legge dell'ordinata y di questo sulla corda ($M_1 = -1 . y$), sicchè, assumendo ancora la corda come fondamentale, l'arco delimita il diagramma M_1 (fig. 22 *b*)).

Detti α_o ed R la semiapertura e il raggio dell'arco, e α l'angolo che il raggio per la sua sezione generica S forma con l'asse s di simmetria, positivo a destra negativo a sinistra, è manifestamente, nel riferimento $A(z, y)$ fissato in fig. 22 *b*):

$$z = \frac{l}{2} + R \operatorname{sen}\alpha \quad ; \quad y = R \cos\alpha - (R - f) \, ,$$

dall'ultima delle quali, giacchè per $|\alpha| = |\alpha_o|$ deve essere $y = o$, posto $R - f = h_o$, si deduce:

$$(*) \qquad \cos\alpha_o = \frac{h_o}{R} \quad ; \quad \text{è poi} \quad \operatorname{sen}\alpha_o = \frac{l}{2R} \, ,$$

relazioni queste che ci saranno utili nel seguito.

Volendo tener conto del momento e della forza normale, per le due condizioni di carico sopra esaminate si hanno lungo l'arco le caratteristiche:

$$N_o = (A_o - p\,z)\,\mathrm{sen}\,\alpha = \left[\frac{p\,l}{2} - p\left(\frac{l}{2} + R\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)\right]\mathrm{sen}\,\alpha = -\,p\,R\,\mathrm{sen}^2\alpha\ ;$$

$$M_o = \frac{p\,l}{2}z - \frac{p\,z^2}{2} = \frac{p\,l^2}{8} - \frac{p\,R^2}{2}\,\mathrm{sen}^2\alpha\ ;$$

$$N_1 = -\,1.\cos\alpha\ ;$$

$$M_1 = -\,1.y = -\,1.(R\cos\alpha - h_o)\ .$$

Le leggi $NN_1 = (N_o + N_1X)N_1$ ed $MM_1 = (M_o + M_1X)M_1$ hanno perciò le forme indicate nella Tabella I/10.

TABELLA I/10

$NN_1 = (N_o + N_1X)\,N_1$ $(-\,\alpha_o \leqq \alpha \leqq +\,\alpha_o)$	$1.(p\,R\,\mathrm{sen}^2\alpha\cos\alpha + 1.\cos^2\alpha\,X)$
$MM_o = (M_o + M_1X)\,M_1$ $(-\,\alpha_o \leqq \alpha \leqq +\,\alpha_o)$	$-\,1.\left[\frac{pl^2}{8} - \frac{pR^2}{2}\,\mathrm{sen}^2\alpha - 1.(R\cos\alpha - h_o)X\right](R\cos\alpha - h_o)$

Per l'ipotesi che lo spostamento relativo δ delle imposte sia un dilontanamento, ed avendo invece supposto che la $X=1$ spiri verso l'interno, al primo membro della (4) figura il lavoro virtuale negativo $-1.\delta$; per quanto riguarda il secondo membro della stessa (4), si intende qui tener conto, come detto, dei primi due integrali; tenendo allora presente che è $ds = R\,d\alpha$, si ottiene in definitiva l'equazione:

$$-\,1.\delta = \frac{1}{E\Omega}\int_{-\alpha_o}^{+\alpha_o}[p\,R\,\mathrm{sen}^2\alpha\cos\alpha + 1.X\cos^2\alpha]\,R\,d\alpha\,-$$

$$-\,\frac{1}{EJ}\int_{-\alpha_o}^{+\alpha_o}\left[\frac{p\,l^2}{8} - \frac{p\,R^2}{2}\,\mathrm{sen}^2\alpha - 1.(R\cos\alpha - h_o)X\right](R\cos\alpha - h_o)\,R\,d\alpha\ .$$

Eseguendo le integrazioni con riguardo alle posizioni (*) e alle note primitive delle funzioni $\mathrm{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$, dei loro quadrati e del loro prodotto, si perne con qualche accorgimento alla soluzione generale:

$$\text{(a)}\quad 1.X = \frac{-\,12\,E\delta - \dfrac{p\,l^3}{R\Omega} + \dfrac{R}{J}\,[3\,\alpha_o h_o(2\,R^2 - l^2) - 3\,l\,h_o^2 + l^3]\,p}{6\left\{\dfrac{1}{R\Omega}(2\,\alpha_o R^2 + l\,h_o) + \dfrac{R}{J}\,[2\,\alpha_o(3\,R^2 - 4\,R\,f + 2\,f^2) - 3\,l\,h_o]\right\}} = X_\delta + X_N + X_M,$$

nella quale somo riconoscibili, dal numeratore, il contributo del cedinento δ, quello della forza normale e quello del momento flettente.

I primi due di questi contributi hanno il medesimo segno e precisamente negativo: ciò vuol dire che la spinta X, tanto in dipendenza del cedimento quanto in dipendenza della forza normale –che, per essere ovunque di compressione, tende a produrre un accorciamento della corda dell'arco– è rivolta verso l'esterno; in dipendenza del momento è invece rivolta verso l'interno, risultando palesemente positivo nella (a) il terzo termine a numeratore.

Per vincoli rigidi ($\delta = 0$), moltiplicandola sopra e sotto per RJ e postovi $\rho^2 = J/\Omega$, la (a) si semplifica in quest'altra:

$$\text{(b)} \qquad 1.X = \frac{-\rho^2 l^3 + R^2 [3\alpha_0 h_0 (2R^2 - l^2) - 3lh_0^2 + l^3]}{6\{\rho^2 (2\alpha_0 R^2 + lh_0) + R^2 [2\alpha_0 (3R^2 - 4Rf + 2f^2) - 3lh_0]\}} p \,.$$

Se, ancora per vincoli rigidi, volessimo tener conto della sola flessione (il che equivarrebbe a supporre $\Omega = \infty$ e quindi $\rho = 0$) otterremo anche più semplicemente:

$$\text{(c)} \qquad 1.X = \frac{3\alpha_0 h_0 (2R^2 - l^2) - 3lh_0^2 + l^3}{6[2\alpha_0 (3R^2 - 4Rf + 2f^2) - 3lh_0]} p \,.$$

In fig. 22*c)* sono rappresentati indicativamente, tutti riferiti alla corda AB come fondamentale, il diagramma M_0, a tratto punteggiato, quello M_1X, a tratto lungo, e, come sovrapposizione dei due, quello dei momenti M effettivi; si è ritenuto per quest'ultimo diagramma che, malgrado il cedimento δ, la spinta abbia tale valore da provocare nelle zone adiacenti ai vincoli momento negativo; è ovvio però che tali due zone negative possono mancare, pur risultando la spinta rivolta verso l'interno, tale cioè da determinare una diminuzione dei momenti M. Un tale senso per la spinta significa manifestamente che il cedimento δ è minore dello spostamento orizzontale ξ che, in conseguenza della deformazione, subirebbe nel sistema principale il carrello collegato al punto B; se questi spostamenti risultassero uguali, sarebbe invece $X = 0$ e quindi M

coinciderebbe con M_0; se poi fosse infine $\delta > \xi$, la X si invertirebbe di senso, provocando una maggiorazione del momento M_0 che si ha nel sistema principale, con effetto analogo a quello di una forza esplicita orizzontale applicata verso l'esterno al carrello dello stesso sistema principale.

Si avverta, infine, che in tutte le formule stabilite di sopra potremmo esprimere, attraverso le note relazioni di ciclometria, α, R ed h_0 in funzione di l e di f e quindi dare la soluzione mediante questi due soli parametri; lasciamo a chi legge di eseguire queste facili trasformazioni.

Esercizio 11 — **Risolvere il portale simmetrico di fig. 23 *a)*, il cui tronco $\widehat{CD}$ è circolare di raggio R e freccia f, nell'ipotesi che i vincoli siano rigidi.**

—⋄—

Scelta come incognita iperstatica X la componente orizzontale della reazione della cerniera in B, sostituendo quindi a quest'ultima un carrello scorrevole orizzontalmente (fig. 23 *b)*), sul sistema principale che

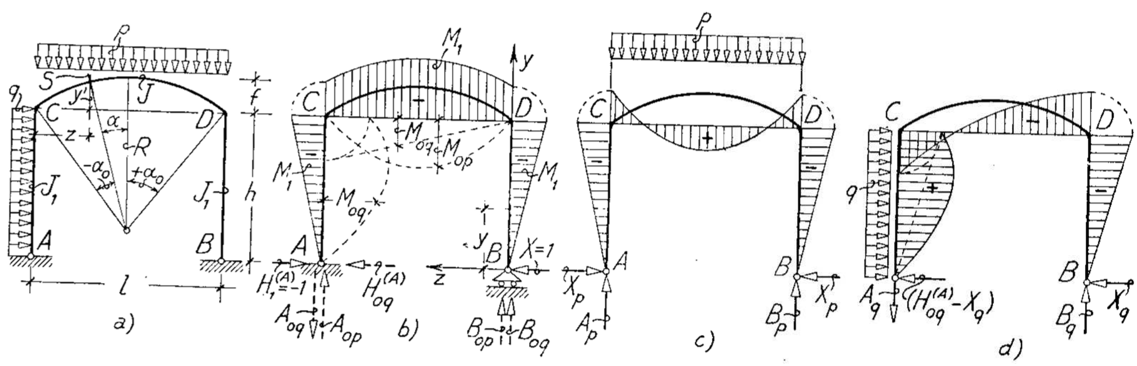

Fig. 23

così residua, i due carichi uniformi p e q insistenti sul tronco circolare e sul ritto agiscono in modo analogo a quello riconosciuto per il sistema dell'Esercizio 3, nel caso di ritti di uguale altezza ($h_1 = h_2 = h$) e in assenza di risucchio sul ritto di destra; i diagrammi M_{op} e M_{oq} sono d'altronde riprodotti a tratto punteggiato in fig. 23 *b)*: parabolico sulla luce l il primo, parabolico lungo il ritto AC e lineare sulla luce l il secondo.

Chi agisce un pò diversamente da allora, ma limitatamente al tronco circolare, è invece la spinta X.

Applicata infatti una $X=1$, rivolta ad es. verso l'interno (fig. 23 b)), il corrispondente diagramma M_1, di segno ovunque negativo, risulta simmetrico, con andamento lineare, come allora (fig. 9 c)), sui ritti, circolare invece sul tronco curvo; la legge di M_1 su questo tronco è precisamente quella stessa dell'Esercizio precedente, salvo l'aggiunta della costante $-1.h$, che dà il valore del momento nelle sezioni di solidarietà C e D fra il tronco stesso e i piedritti.

La Tabella I/11 raccoglie sinteticamente queste leggi e quelle dei prodotti $MM_1 = (M_{op} + M_{oq} + M_1 X) M_1$.

TABELLA I/11

TRONCO	M_{op}	M_{oq}	M_1	$MM_1 = (M_{op} + M_{oq} + M_1 X)\, M_1$
$AC\,(0 \leqq y \leqq h)$	0	$qy\,(h-\frac{y}{2})$	$-1.y$	$-1.\,(qhy - \frac{q\,y^2}{2} - 1.yX)\,y$
$\widehat{CD}\,(-\alpha_0 \leqq \alpha \leqq +\alpha_0)$	$\frac{pz}{2}(l-z)$	$+\frac{qh^2}{2\,l}\,z$	$-1.(h+y')$	$-1.\left[\frac{pz}{2}(l-z)+\frac{qh^2}{2l}z-1.(h+y')X\right](h+y')$
$BD\,(0 \leqq y \leqq h)$	0	0	$-1.y$	$+1^2.\,y^2\,X$

In forma esplicita e più adatta al calcolo, la legge MM_1 sul tronco circolare $\widehat{CD}$ può essere trasformata nel seguente modo, in funzione dell'anomalia α della sezione corrente S dell'arco sull'asse di simmetria. Poichè, come già riconosciuto all'Esercizio precedente, è (fig. 23 a)):

$$z = \frac{l}{2} + R\,sen\alpha \qquad ; \qquad y' = R\,cos\alpha - (R-f)\,,$$

sostituendo nella espressione di detto prodotto MM_1 (cfr. la Tabella I/11) e posto ora $h_0 = h + f - R$, si ottiene con facili accorgimenti:

$$MM_1 = -1.\left[\left(\frac{pl}{2}+\frac{q\,h^2}{2\,l}\right)z - \frac{p\,z^2}{2} - 1.(h+y')\,X\right](h+y') =$$

$$= -1.\left[\left(\frac{pl^2}{2}+\frac{qh^2}{4}-1.h_0X\right)h_0 + \frac{q\,R\,h_0\,h^2}{2\,l}\,sen\alpha + \left(\frac{pl^2}{8}+\frac{qh^2}{4}-1.2h_0X\right)R\,cos\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{ph_0R^2}{2}\,sen^2\alpha + \frac{qR^2h^2}{2\,l}\,sen\alpha\;cos\alpha - \frac{p\,R^3}{2}\,sen^2\alpha\;cos\alpha - 1.R^2X\,cos^2\alpha\right].$$

L'equazione dei l. v., tenuto ancora presente che $ds = R\,d\alpha$, che l'angolo α varia nel campo $(-\alpha_0, +\alpha_0)$, e per l'ipotesi fatta nell'enunciato che i vincoli siano rigidi, diviene perciò:

$$0 = -\frac{1}{EJ_1}\int_0^h \left(q\,h\,y^2 - \frac{q\,y^3}{2} - 1.2\,y^2 X\right) dy - \frac{1}{EJ}\left\{ h_0 R\left(\frac{pl^2}{8} + \frac{qh^2}{4} - 1.h_0 X\right)\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} d\alpha + \right.$$

$$+ \frac{qR^2 h_0 h^2}{2\,l}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} sen\alpha\, d\alpha + R^2\left(\frac{pl^2}{8} + \frac{qh^2}{4} - 1.2h_0 X\right)\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} cos\alpha\, d\alpha - \frac{ph_0 R^3}{2}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} sen^2\alpha\, d\alpha +$$

$$\left. + \frac{q\,R^3 h^2}{2\,l}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} sen\,\alpha\, cos\,\alpha\, d\alpha - \frac{p\,R^4}{2}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} sen^2\alpha\, cos\,\alpha\, d\alpha - 1.R^3 X\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} cos^2\alpha\, d\alpha \right\}.$$

Da questa, con riguardo ancora alle note primitive delle funzioni circolari e alle posizioni:

$$cos\,\alpha_0 = \frac{R-f}{R} \quad , \qquad sen\,\alpha_0 = \frac{l}{2\,R} \quad ,$$

si perviene con qualche accorgimento alla soluzione, approssimata a meno del contributo della forza normale e del taglio:

$$\text{(a)} \qquad 1.X = \frac{h^2\,[5\,\vartheta\,h^2 + 6\,R\,(2\,\alpha_0\,h_0 + l)]}{4\,\{4\,\vartheta\,h^3 + 3\,R\,[2\,\alpha_0\,(R^2 + 2\,h_0^2) + l\,(3\,h_0 + h)]\}}\cdot q +$$

$$+ \frac{R\,[3\,\alpha_0\,h_0\,(l^2 - 2\,R^2) + 3\,h_0\,l\,(R-f) + l^3]}{2\,\{4\,\vartheta\,h^3 + 3\,R\,[2\,\alpha_0\,(R^2 + 2\,h_0^2) + l\,(3\,h_0 + h)]\}}\cdot p = X_q + X_p \;,$$

nella quale, come al solito, è stato posto $\vartheta = J/J_1$.

Si avverta che potremmo ottenere da qui una forma anche più ridotta, con riguardo alla posizione $h_0 = h + f - R$ e alla circostanza che tutti gli elementi geometrici dell'arco sono esprimibili unicamente, ad es., mediante la freccia f e la corda l.

Ciò che però ci interessa ora osservare, è che i due contributi X_p e X_q che hanno nella reazione della cerniera B i due tipi di carichi p e q (spinta del sistema nel primo tipo) sono dello stesso segno e precisamente concorde con quello previsto per la $X = 1$ in fig. 23 *b)*; ciò significa che il diagramma $M_1 X$ – affine cioè a quello M_1 secondo il fattore X – da aggiungere algebricamente alla somma $M_{op} + M_{oq}$ per avere il diagramma dei momenti M effettivi, conserva, oltrechè la forma, anche il segno di quello di fig. 23 *b)*, ed è perciò immediato combinare i tre diagrammi M_{op}, M_{oq} e $M_1 X$.

In fig. 23 *c)* e *b)*, in luogo della sovrapposizione di questi tre diagrammi, sono state indicate, da un lato quella $M_{op} + M_1 X_p$, dall'altro quella $M_{oq} + M_1 X_q$, onde riconoscere fino in fondo separatamente il modo di agire dei due tipi di carichi; è ovvio ora, anche, che il suddetto diagramma completo è la somma algebrica dei due così ottenuti.

* * *

Una condizione di carico che, sia per se stessa sia per i problemi avvenire, è interessante prendere in esame, è quella di un momento esplicito m applicato nel piano del sistema in uno dei nodi C o D di solidarietà fra i ritti e il tronco circolare (fig. 24).

Scegliendo lo stesso sistema principale di fig. 23*b)*, una siffatta sollecitazione desta ovviamente nei vincoli due reazioni verticali uguali e di segno opposto:

$$A_{om} = - B_{om} = - \frac{m}{l} ,$$

e quindi un diagramma di momenti M_{om} che interessa unicamente il tratto curvo secondo la legge lineare:

$$M_{om} = m + A_{om} z = m \left(1 - \frac{1}{l} z \right) ,$$

(ovvero $M_{om} = - B_{om} z'$ contando le ascisse z' da destra), legge identica a quella che si avrebbe nel caso di architrave rettilineo o anche in quello di una trave semplice CD, caricata in C dallo stesso momento m.

Prevedendo ancora per la $X = 1$ il senso di fig. 23 *b)*, sicchè M_1 varia al modo indicato nella stessa figura e

TABELLA II/11

TRONCO	M_{om}	M_1	$MM_1 = (M_{om} + M_1 X) M_1$
AC e BD $(0 \leq y \leq h)$	0	$-1 . y$	$+ 1^2 . y^2 X$
$\widehat{CD}$ $(-\alpha_0 \leq \alpha \leq + \alpha_0)$	$m\left(1 - \frac{z}{l}\right)$	$-1 . (h + y')$	$-1 . \left[m\left(1 - \frac{z}{l}\right) - 1 . (h + y') X \right] (h + y')$

nella Tabella I/11, si riconoscono per il prodotto MM_1 sui tre tronchi le leggi indicate nella Tabella II/11, leggi delle quali quella sul tronco circolare può anche scriversi nella seguente altra forma più adatta al calcolo:

$$-\left[m\left(1-\frac{z}{l}\right)-1.(h+y')X\right](h+y')=-\left(\frac{m}{2}-1.h_0X\right)h_0-R\left(\frac{m}{2}-1.2\,h_0X\right)\cos\alpha+$$
$$+\frac{mRh_0}{l}\,sen\,\alpha+\frac{mR^2}{l}\,sen\,\alpha\cos\alpha+1.R^2X\cos^2\alpha,$$

facile a riconoscersi quando si abbia riguardo alle espressioni utilizzate di sopra per z ed y' e alla posizione $h_0=h+f-R$.

Applicando allora al modo solito l'equazione dei l.v. alla condizione di carico in esame, è agevole pervenire alla soluzione:

$$\text{(b)} \qquad 1.X_m=\frac{3R(2\alpha_0h_0+l)}{4\vartheta h^3+3R[2\alpha_0(R^2+2h_0^2)+l(3h_0+h)]}\cdot m\,, \qquad (\vartheta=J/J_1)$$

la quale ci dice che $1.X_m$ assume il segno di m; poichè allora, in fig. 24, m è stato supposto negativo, la $1.X_m$ risulta diretta in senso opposto a quello previsto per la $X=1$ in fig. 23 b), vale a dire verso l'esterno; in fig. 24 è indicato il corrispondente diagramma del momento.

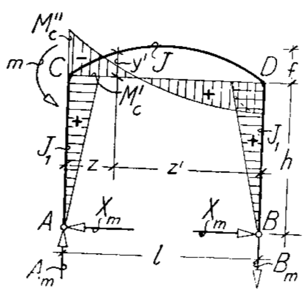

Fig. 24

A proposito di tale diagramma, è appena necessario porre in rilievo la discontinuità in corrispondenza della sezione C di giunto fra ritto e architrave, nella quale è applicato il monento esplicito m; in questa sezione, come sezione terminale del ritto, il momento è infatti positivo e vale:

$$M_c' = X_m h\ ;$$

passando al tronco circolare, il momento salta del valore m, e quindi nella stessa sezione, come sezione iniziale dell'arco, residua il momento:

$$M_c'' = M_c' - m = -m + X_m h\ ,$$

dove m va ora introdotto in valore assoluto.

Se anche nel nodo D agisse simmetricamente un secondo momento m, la somma degli effetti porterebbe, com'è ovvio ad es. specchiando la fig. 24, alle seguenti conclusioni:

a) i vincoli risulterebbero scarichi verticalmente;

b) la spinta risulterebbe raddoppiata ($H' = 2\,H_m$), e con essa quindi il valore dei momenti lungo i ritti;

c) il diagramma del momento, simmetrico, presenterebbe ancora un salto di valore m in ognuna delle sezioni di solidarietà C e D, con momento residuo in tali sezioni, come sezioni terminali dell'arco, pari a $-m+2H_m h$.

Esercizio 12 — **Risolvere il sistema elastico di fig. 25, i cui steli, incernierati al piede, sono solidali a un arco circolare di raggio R e freccia f, munito di due sbalzi b simmetrici.**

—◇—

Lo schema in esame può assimilare il riquadro portante di una copertura a volta, aperta sui due lati, destinata ad es. a mercato. Una tale copertura può essere realizzata in modo da scaricarsi sui riquadri o direttamente, ovvero in modo indiretto attraverso lo intermediario di travi longitudinali che ricollegano i riquadri medesimi (1). Con riguardo al peso proprio e a un eventuale carico di neve, è allora chiaro che nel primo caso il riquadro risulta gravato uniformemente (fig. 25 *a*)), nel secondo invece da una serie di altrettanti carichi concentrati per quante sono le travi longitudinali (fig. 25 *b*)).

La trattazione dei due casi non comporta differenze sostanziali nei risultati.

Il caso del carico ripartito è d'altronde già sostanzialmente risolto fin dall'Esercizio precedente, nella cui soluzione globale (a) separammo di proposito

(1) Si pensi ad es. a una soletta in cemento armato, con armatura longitudinale nel primo caso, trasversale invece nel secondo.

il contributo X_p del carico ripartito sulla luce l (fig. 23 *c*)); sicchè anche il caso attuale sarebbe risolto, quando fosse valutato preventivamente l'effetto che ha sul riquadro il carico gravante sugli sbalzi.

Per questo si osservi che, a meno dell'azione diretta sugli sbalzi stessi — immediata per altro a ri-

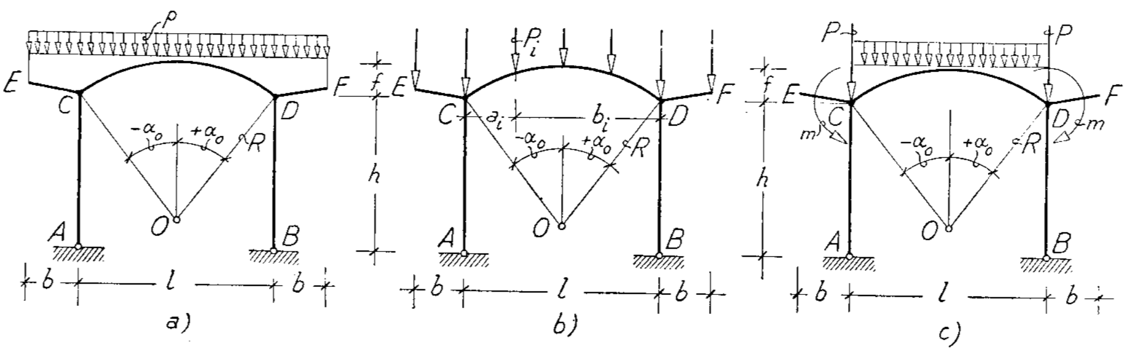

Fig. 25

conoscersi trattandosi di due mensole ordinarie — la azione sul riquadro equivale a quella di un carico assiale $P = pb$ lungo ognuno dei due ritti e di un momento $m = -pb^2/2$ in ognuna delle sezioni C e D di solidarietà fra i ritti stessi e il tratto circolare; ora quest'ultima condizione di carico è appunto stata esaminata in modo esplicito alla fine dell'Esercizio precedente.

Scegliendo ancora come incognita iperstatica la spinta X del sistema (cfr. le figg. 23 e 24) si perviene quindi alla soluzione del caso attuale sommando algebricamente al secondo termine della (a) il doppio della (b) di detto Esercizio, nella quale ultima si ponga $m = -pb^2/2$; cioè:

$$\text{(a)} \qquad 1.X = \frac{R\,[l^3 + 3h_0\,l\,(R-f) - 3\alpha_0 h_0 (2R^2 - l^2)] - 6R\,(2\alpha_0 h_0 + l)\,b^2}{2\,\{4\vartheta h^3 + 3R\,[2\alpha_0 (R^2 + 2h_0^2) + l\,(3h_0 + h)]\}} \cdot p =$$

$$= \frac{R\,[l^3 + 3h_0\,l\,(R-f) - 6b^2 l - 3\alpha_0 h_0 (2R^2 - l^2 + 4b^2)]}{2\,\{4\vartheta h^3 + 3R\,[2\alpha_0 (R^2 + 2h_0^2) + l\,(3h_0 + h)]\}} \cdot p\,.$$

Tale soluzione, per la presenza dei due termini di segno opposto (cfr. anche le figg. 23 *c*) e 24), può risultare positiva, nulla o negativa; ciò secondochè è:

$$l^3 + 3h_0\,l\,(R-f) - 3\alpha_0 h_0 (2R^2 - l^2) \gtreqless 6b^2 (2\alpha_0 h_0 + l)$$

vale a dire:

$$b \lesseqgtr \sqrt{\frac{l^3 + 3h_0\, l\,(R-f) - 3\,\alpha_0\, h_0\,(2\,R^2 - l^2)}{6\,(2\,\alpha_0\, h_0 + l)}} = \overline{b} \; .$$

Se dunque risulta, com'è il caso più frequente della pratica costruttiva, $b < \overline{b}$, il sistema spinge verso l'esterno, alla stessa stregua, seppure in misura ridotta, dell'analogo sistema privo di sbalzi; se invece è $b = \overline{b}$, il sistema risulta non spingente, si comporta cioè come se l'architrave, anzichè solidale coi piedritti, fosse una trave appoggiata con sbalzi; è ovvio anche il significato del caso $b > \overline{b}$, caso che si verifica nella pratica solo in via eccezionale.

In fig. 26 *a)* si è indicato l'andamento del diagramma dei momenti supponendo che si verifichi il primo caso ($b < \overline{b}$) e costruendolo come somma di quello, indicato a tratto punteggiato, dovuto ai due momenti simmetrici m, e di quello, indicato invece a tratto lungo, dovuto direttamente al carico uniforme p sul tronco circolare; completano poi il diagramma le due porzioni paraboliche laterali, che forniscono il momento sugli sbalzi e che staccano appunto in corrispondenza delle sezioni C e D di incastro delle mensole i due momenti $m = -\,pb^2/2$.

* * *

La condizione di carico concentrato si studia, come detto, in modo analogo alla precedente; propriamente gli sbalzi comportano ancora due carichi P_s e P_d lungo i ritti di sinistra e di destra e i relativi momenti m_s e m_d di trasporto agli incastri C e D (fig. 26 *b)*); in condizioni di simmetria, alle quali intendiamo qui limitarci, risulta ovviamente $P_s = P_d = P$ e $m_s = m_d = m$; a questi due momenti m compete quindi ancora la spinta $2\,X_m$ di sopra.

Sia ora P_i il generico carico sull'arco, applicato nella sezione S_i distante a_i e b_i dai due ritti e di anomalia α_i sull'asse di simmetria s del portale (fig. 26 b)).

Nello stesso sistema principale adottato di sopra, un siffatto carico dà come diagramma M_o la nota bila-

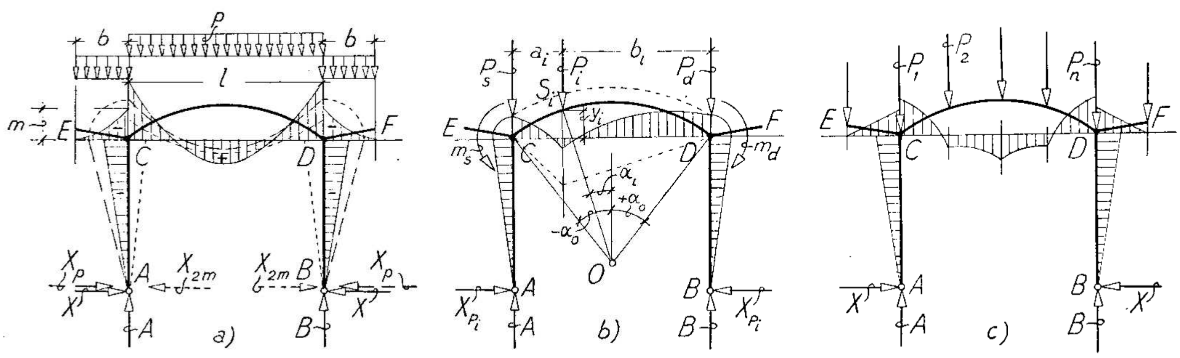

Fig. 26

tera relativa alla trave semplice della stessa luce l. Combinando questa bilatera con le espressioni che fornisce per M_1 la Tabella I/11, si hanno per i prodotti MM_1 lungo il contorno le leggi raccolte nella Tabella I/12.

TABELLA I/12

TRONCO	M_o	M_1	$MM_1 = (M_o + M_1 X)\, M_1$
AC e $BD (0 \leq y \leq h)$	0	$-1.y$	$+1^2.y^2 X$
$\widehat{CS_i} (-\alpha_o \leq \alpha \leq \alpha_i)$	$\frac{P_i b_i}{l} z$	$-1.(h+y')$	$-1.\left[\frac{P_i b_i}{l} z - 1.(h+y')X\right](h+y')$
$\widehat{S_i D} (\alpha_i \leq \alpha \leq +\alpha_o)$	$\frac{P_i b_i}{l} z - P_i(z-a_i)$	$-1.(h+y')$	$-1.\left[\frac{P_i b_i}{l} z - P_i(z-a_i) - 1.(h+y')X\right](h+y')$

Di queste leggi, in virtù delle espressioni di z e di y' già utilizzate all'Esercizio precedente, le due relative ai due tronchi in cui il carico P_i spezza l'elemento circolare, possono essere messe rispettivamente sotto le forme che seguono, più adatte al calcolo e facili a riconoscersi.

Per il tronco $\widehat{CS_i}$:

$$MM_1 = -1.\left[\frac{P_i b_i}{l} z - 1.(h+y')X\right](h+y') = -1.\left[\left(\frac{P_i b_i h_o}{2} - 1.h_o^2 X\right) + \frac{P_i b_i h_o R}{l} sen\,\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{P_i b_i R}{2} - 1.2 R h_o X\right) cos\,\alpha + \frac{P_i b_i R^2}{l} sen\,\alpha\, cos\,\alpha - 1.R^2 X\, cos^2\alpha\right] ;$$

per il tronco $\widehat{S_iD}$, la stessa forma salvo l'aggiunta del termine:

$$-1.[-P_i(z-a_i)(h+y')] = -1.[P_i R h_0 (sen\,\alpha_i - sen\,\alpha) + P_i R^2 (sen\,\alpha_i - sen\,\alpha)\cos\alpha].$$

Integrando allora la prima di queste due leggi nell'intero intervallo $(-\alpha_0, +\alpha_0)$, la seconda invece in quello parziale $(\alpha_i, +\alpha_0)$, l'equazione dei l.v. diviene:

$$0 = \frac{2}{EJ_1}\int_0^h 1.Xy^2dy - \frac{1}{EJ}\left[R\left(\frac{P_i b_i h_0}{2} - 1.h_0^2 X\right)\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} d\alpha + \frac{P_i b_i h_0 R^2}{l}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} sen\,\alpha\, d\alpha + \right.$$

$$\left. + R\left(\frac{P_i b_i R}{2} - 1.2 R h_0 X\right)\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \cos\alpha\, d\alpha + \frac{P_i b_i R^3}{l}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} sen\,\alpha\cos\alpha\, d\alpha - 1.R^3 X\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}\cos^2\alpha\, d\alpha\right] -$$

$$-\frac{1}{EJ}\left[P_i h_0 R^2\left(sen\,\alpha_i\int_{\alpha_i}^{\alpha_0} d\alpha - \int_{\alpha_i}^{\alpha_0} sen\,\alpha\, d\alpha\right) + P_i R^3\left(sen\,\alpha_i\int_{\alpha_i}^{\alpha_0}\cos\alpha\, d\alpha - \int_{\alpha_i}^{\alpha_0} sen\,\alpha\cos\alpha\, d\alpha\right)\right].$$

Eseguendo le integrazioni indicate e con riguardo alle notazioni:

$$sen\,\alpha_0 = \frac{l}{2R} \quad ; \quad \cos\alpha_0 = \frac{R-f}{R} \quad ; \quad a_i = \frac{l}{2} + R\, sen\,\alpha_i \quad ; \quad b_i = l - a_i;$$

$$\delta_i = R\cos\alpha_i - (R-f) \quad ; \quad \vartheta = J/J_1,$$

si perviene alla soluzione:

$$\text{(a)} \qquad 1.X = \frac{3R[l h_0(\alpha_0+\alpha_i) - 2h_0(\alpha_i a_i + \delta_i) + a_i b_i]}{4\vartheta h^3 + 3R[2\alpha_0(2h_0^2 + R^2) + l(3h_0 + h)]}\cdot P_i,$$

a prima verifica della quale può stare ad es. il fatto che risulta nulla per carico sopra uno dei ritti, cioè per $\alpha_i = \pm\alpha_0$ e quindi $\delta_i = 0$ e $a_i = 0$ (ovvero $b_i = 0$).

Una posizione particolare del carico è la mezzeria: $\alpha_i = 0$, $a_i = b_i = \frac{l}{2}$, $\delta_i = f$, posizione per la quale risulta:

$$\text{(b)} \qquad 1.X = \frac{3R[4\alpha_0 h_0 l - 8h_0 f + l^2]}{4\{4\vartheta h^3 + 3R[2\alpha_0(2h_0^2 + R^2) + l(3h_0 + h)]\}}\cdot P_i,$$

che è ovviamente il valore massimo della spinta che provoca P_i nelle successive posizioni sull'arco.

In fig. 26 *b)* è indicato il diagramma dei momenti per la posizione generica che è stata presa sopra in esame.

Per n carichi concentrati $P_1, P_2, \ldots, P_n$ fra i ritti, e carico simmetrico sugli sbalzi che comporti due momenti m in C e in D, detti per brevità ρ_i il coefficiente di P_i nella (a) e ρ_m quello di m nella (b) dell'Esercizio precedente, si ha ora, sommando gli effetti, la soluzione generale:

(c) $$1.X = \sum_i^n \rho_i P_i + 2\rho_m m \, .$$

In fig. 26 *c)* è indicato il diagramma effettivo dei momenti per questa condizione di carico completa, supponendo –in analogia a quanto già fatto per il caso di carico ripartito– che la spinta sia positiva.

Esercizio 13 — **Il sistema elastico rappresentato in fig. 27** ***a)*** **è costituito da due mensole** ***AB*** **e** ***CD*** **rigidamente incastrate e collegate alle estremità mediante cerniere da un tirante normale alla loro direzione comune. Risolverlo nel caso che la trave inferiore** ***AB*** **sia gravata per tutta la lunghezza da un carico uniforme** p **e, alle ascisse** a **e** b **dagli estremi, da un carico concentrato** P.

—◇—

Per la presenza delle due articolazioni interne, il sistema possiede una sola indeterminazione statica: con ovvia scelta, la tensione X nel tirante BD.

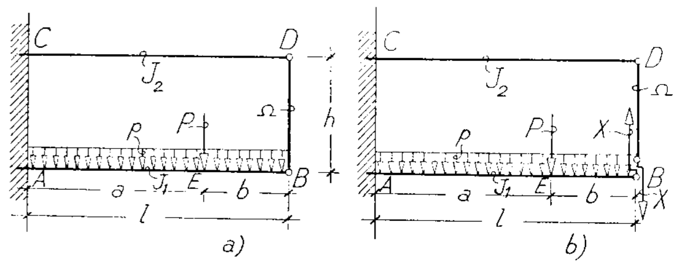

Fig. 27

A differenza di tutti i casi esaminati finora, l'indeterminazione, per una tale scelta, è ora interna; la riduzione al sistema principale –costituito dall'insieme delle due mensole AB e CD– può effettuarsi in due modi diversi: o, come si è fatto (fig. 27 *b)*), rimuovendo una delle articolazioni, ed es. quella in B, ovvero tagliando il tirante in una sezione intermedia S; l'incognita iperstatica risulta comunque di due forze X uguali ed opposte, aventi come linea di azione l'asse del pendolo ma applicate, nel primo caso una direttamente all'estremo libero della trave AB, l'altra al corrispondente estremo libero del pendolo (fig. 27 *b)*); nel secondo caso, invece, una alla faccia di sinistra l'altra alla faccia di destra della sezione S.

Nell'un modo o nell'altro, è chiara la prerogativa specifica di una indeterminazione interna: quella cioè di risultare nullo, per qualunque deformazione virtuale, lo spostamento relativo δ dei punti di applicazione delle due forze che realizzano l'incognita iperstatica e quindi, anche, il lavoro virtuale $1.\delta$ di questa incognita.

Per rendere più chiara la trattazione – d'altronde già molto semplice di per sè – esamineremo di seguito l'effetto del carico concentrato P e di quello ripartito p.

Il sistema principale è costituito, come detto, dalle due mensole AB e CD, delle quali la seconda è

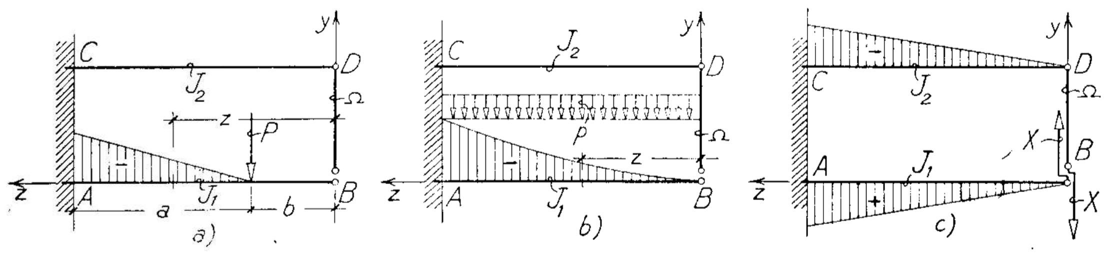

Fig. 28

interessata unicamente dall'incognita iperstatica, la prima invece anche direttamente dal carico esterno.

Per parte di P nasce lungo il tratto $\overline{AE} = a$ un diagramma lineare dei momenti (fig. 28 *a)*), la cui legge, contando le ascisse z dall'estremo libero B al modo indicato in figura, è:

$$M_o' = - P(z - b) \; ;$$

per parte del carico ripartito p, si ha invece, lungo tutta la mensola, la legge parabolica (fig. 28 *b)*):

$$M_o'' = - \frac{p z^2}{2} \; .$$

Supposte ora agire ai due capi liberi B dell'articolazione rimossa due forze opposte $X = 1$ di trazione, si hanno lungo le due mensole i diagrammi dei momenti — positivo per quella inferiore, negativo per quella superiore — indicati in fig. 28 *c*), aventi le leggi rispettive:

$$M_1 = +\,1.z \qquad ; \qquad M_1 = -\,1.z\ ;$$

nel tirante si ha unicamente una forza normale positiva $N = +\,1$.

Trascurando ovunque l'effetto del taglio e tenendo invece conto anche della forza normale, le leggi dei prodotti NN_1 ed MM_1 da integrare lungo il contorno del sistema (per la sovrapposizione degli effetti è, come al solito, $N = N_0 + N_1X$ ed $M = M_0 + M_1X$) sono quelle indicate nella Tabella I/13.

TABELLA I/13

TRONCO	$NN_1 = (N_0 + N_1X)\,N_1$	$MM_1 = (M_0 + M_1X)\,M_1$
$BE\ (0 \leq z \leq b)$	0	$-\,1.\left[0 - \frac{pz^2}{2} + 1.z\,X\right]z$
$EA\ (b \leq z \leq l)$	0	$1.\left[-\,P(z-b) - \frac{pz^2}{2} + 1.z\,X\right]z$
$BD\ (0 \leq y \leq h)$	$1.(0 + 1.X) = 1^2X$	0
$DC\ (0 \leq z \leq l)$	0	$-\,1.(0 - 1.z\,X).z = +\,1^2.z^2X$

Introdotte tali leggi nel secondo membro della (4), di cui, per quanto osservato sopra, il primo membro è nullo, si ottiene l'equazione:

$$0 = \frac{1}{\Omega}\int_0^h 1.X\,dy - \frac{1}{J_1}\left[\int_0^b \left(\frac{pz^2}{2} - 1.zX\right)z\,dz - \int_b^l \left[P(z-b) + \frac{pz^2}{l} - 1.zX\right]z\,dz\right] + \frac{1}{J_2}\int_0^l 1.z^2X\,dz,$$

che ha per soluzione, come è agevole riconoscere:

$$\text{(a)} \qquad 1.X = \frac{\frac{4}{J_1}(2\,l^3 - 3\,b\,l^2 + b^3).P + \frac{3\,l^4}{J_2}\cdot p}{24\left[\frac{h}{\Omega} + \frac{l^3}{3}\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)\right]} = X_P + X_p.$$

A meno del contributo della forza normale, il che equivale a ritenere infinitamente rigido il tirante (formalmente $E\Omega = \infty$), posto $\vartheta = J_1/J_2$ e $\rho = b/l$, la soluzione si semplifica in quest'altra:

$$(b) \qquad 1.X = \frac{2 - 3\rho + \rho^3}{2(1+\vartheta)} \cdot P + \frac{3l}{8(1+\vartheta)} \cdot p = X_P + X_p \, .$$

È interessante, nell'ipotesi ora fatta di tirante rigido, esaminare il risultato in qualche caso particolare.

Se le due mensole hanno la stessa rigidezza a flessione ($\vartheta = 1$), il contributo di P nella iperstatica diventa:

$$X_P = \frac{2 - 3\rho + \rho^2}{4} \, P \, .$$

In tali condizioni, per carico P all'estremo B della mensola, vale a dire per $b = 0$ e quindi $\rho = 0$, risulta $X_P = P/2$, com'è evidente anche a priori in quanto, per la supposta rigidezza del tirante e per l'uguaglianza delle due mensole, queste si devono inflettere ugualmente.

Per $\rho = \frac{1}{2}$ – carico P in mezzeria – è:

$$X_P = \frac{5}{32} P \, ;$$

il carico ripartito pl sull'intera lunghezza dà invece:

$$X_p = \frac{3}{16} \, pl = \frac{6}{32} \, pl \, ,$$

ed è quindi immediato il confronto con il risultato

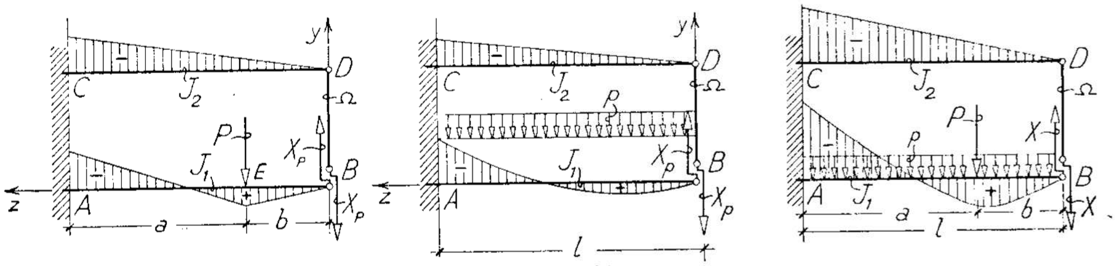

Fig. 29

precedente nel caso particolare che risulti $P = pl$.

In fig. 29 *a)* e *b)* sono indicati, nelle condizioni generali esaminate più sopra, i diagrammi dei momenti per effetto separatamente del carico concentrato e del carico ripartito; in fig. 29 *c)* è indicato invece un possibile andamento dello stesso diagramma per i due tipi di carico insieme.

Esercizio 14 — **Risolvere il sistema simmetrico di fig. 30, caricato simmetricamente da due carichi P concentrati.**

Il sistema può schematizzare il riquadro di un ponte ferroviario a un solo binario a via inferiore, chiuso superiormente da una trave reticolare di controventatura, della quale l'elemento CD rappresenti un montante. Il problema presenta una indeterminazione interna: lo sforzo S nel montante ora detto, il quale funziona ovviamente da puntone.

Il sistema principale corrispondente a questa incognita è allora per es. quello che si ottiene svincolando l'articolazione della cerniera C (fig. 30 *b)*).

Supposti agire su tale sistema separatamente, una volta i due carichi espliciti simmetrici P (fig. 30 *b)*),

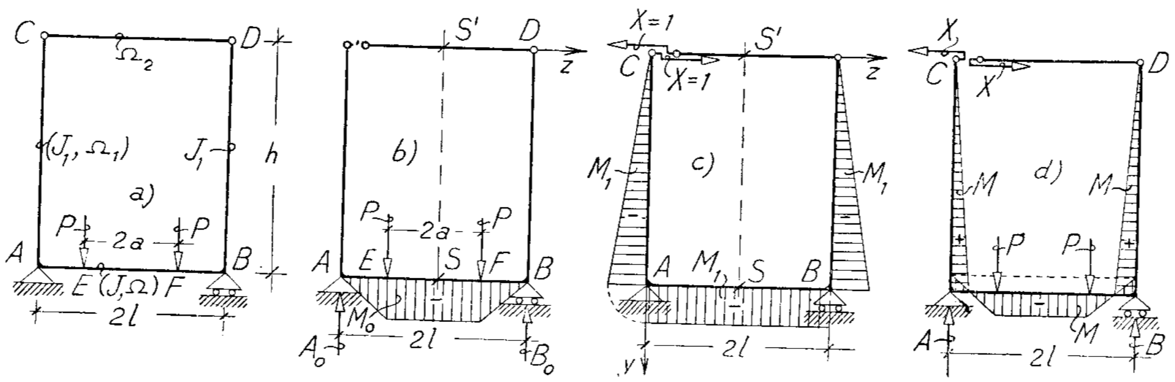

Fig. 30

l'altra due forze opposte $X = 1$ applicate ai due capi dell'articolazione rimossa (fig. 30 *c)*), le corrispondenti caratteristiche della sollecitazione N_0, M_0, T_0 ed N_1, M_1, T_1 lungo il contorno, limitandoci per la simmetria a una metà del riquadro (ad es. a quella di sinistra fra le sezioni S ed S') sono quelle indicate nella Tabella I/14. Si avverta al proposito come, trattandosi di un sistema chiuso e seguendo per i segni delle caratteristiche le convenzioni fatte all'Esercizio 1, nell'architrave AB si verifichi per M_0 ed M_1

TABELLA I/14

TRONCO	N_0	M_0	T_0	N_1	M_1	T_1
AE $(0 \leq z \leq l-a)$	0	$-Pz$	P	-1	$-1.h$	0
ES $(l-a \leq z \leq l)$	0	$-P(l-a)$	0	-1	$-1.h$	0
CA $(0 \leq y \leq h)$	0	0	0	0	$-1.y$	$+1$
CS' $(0 \leq z \leq l)$	0	0	0	$+1$	0	0

una discordanza di segno rispetto a quello che vi risulterebbe riguardandolo invece come una trave semplice.

Le leggi dei prodotti NN_1, MM_1 e TT_1 da integrare al mezzo riquadro, sono ora quelle raccolte nella Tabella II/14; e l'equazione dei l. v., che ha il primo membro nullo in quanto si tratta di indeterminazione interna,

TABELLA II/14

TRONCO	$NN_1 = (N_0 + N_1X)\,N_1$	$MM_1 = (M_0 + M_1X)\,M_1$	$TT_1 = (T_0 + T_1X)\,T_1$
AE $(0 \leq z \leq l-a)$	$1^2.X$	$1.[Pz + 1.hX]\,h$	0
ES $(l-a \leq z \leq l)$	$1^2.X$	$1.[P(l-a) + 1.hX]\,h$	0
CA $(0 \leq y \leq h)$	0	$1^2.\,y^2X$	$1^2.X$
CS' $(0 \leq z \leq l)$	$1^2.X$	0	0

prende in conseguenza – scritta per il mezzo riquadro – la seguente forma completa:

$$0 = \int_0^l \frac{1}{E}\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{1}{\Omega_2}\right) X\,dz + \int_0^{l-a} \frac{[Pz + 1.hX]\,h}{EJ} \cdot dz + \int_{l-a}^{l} \frac{[P(l-a) + 1.hX]}{EJ} \cdot h\,dz +$$

$$+ \int_0^h \frac{1.X\,y^2}{EJ_1}\,dy + \int_0^h \chi \cdot \frac{1.X}{G\,\Omega_1}\,dy \,,$$

ed ammette la soluzione generale:

$$\text{(a)} \qquad 1.X = -\frac{\dfrac{Ph}{2EJ}(l^2 - a^2)}{\dfrac{l}{E}\left(\dfrac{1}{\Omega} + \dfrac{1}{\Omega_2}\right) + \dfrac{l\,h^2}{EJ} + \dfrac{h^3}{3EJ_1} + \chi \cdot \dfrac{h}{G\,\Omega_1}} \,,$$

nella quale il segno negativo sta a indicare che il senso della X è opposto a quello previsto per la $X=1$ in fig. 30 *c)*, che cioè, come si è già avvertito in principio intuitivamente, il pendolo CD funziona da puntone.

A meno del contributo del taglio, è in forma più semplice:

$$\text{(b)} \qquad 1.X = -\frac{\dfrac{Ph}{2J}(l^2 - a^2)}{l\left(\dfrac{1}{\Omega} + \dfrac{1}{\Omega_2}\right) + \dfrac{l h^2}{J} + \dfrac{h^3}{3J_1}},$$

con valore assoluto maggiore del precedente.

A meno anche del contributo della forza normale – ciò che equivale in definitiva a supporre rigidi a questa caratteristica soltanto l'architrave AB e il montante CD della trave di controventatura – posto $\vartheta = J/J_1$ è anche più semplicemente:

$$\text{(c)} \qquad 1.X = -\frac{3P(l^2 - a^2)}{2h(3l + \vartheta h)},$$

che rappresenta insieme il massimo valore assoluto che compete allo sforzo nel puntone CD.

La maggiorazione che risulta per questo sforzo trascurando via via nella soluzione il contributo delle caratteristiche T ed N, è dovuta al fatto che così facendo si vengono a irrigidire idealmente sempre più gli elementi del sistema, la cui deformazione ha invece il compito di assorbire una parte del lavoro complessivo in gioco.

In fig. 30 *d)* è rappresentato l'andamento del diagramma dei momenti per una qualunque delle soluzioni sopra indicate; comparativamente, è ovvio però che il dimensionamento del sistema per il valore (c) della incognita comporterebbe una maggiorazione nelle dimensioni del puntone CD e dei due ritti, una minorazione invece nelle dimensioni dell'architrave AB, rispetto a quelle che richiederebbe per gli stessi elementi la soluzione esatta (a).

Esercizio 15 — **Nel sistema elastico di fig. 31 *a*), i ritti, di notevole lunghezza H, sono riuniti a quota h da un tirante di sezione Ω; trattare il problema nel caso di carico uniforme verticale p sull'architrave.**

Il sistema in esame risulta una volta iperstatico internamente, l'incognita sovrabbondante essendo in modo palese la tensione X nel tirante EF.

Tale incognita può essere annullata ad es., al modo dei due Esercizi precedenti, rimuovendo una delle articolazioni in E o in F; per modo che le condizioni effettive sarebbero ripristinate, applicando due forze opposte X e $-X$ ai due capi dell'articolazione; con tale scelta valgono ovviamente tutte le considerazioni dei due Esercizi citati, sia in riguardo alla natura

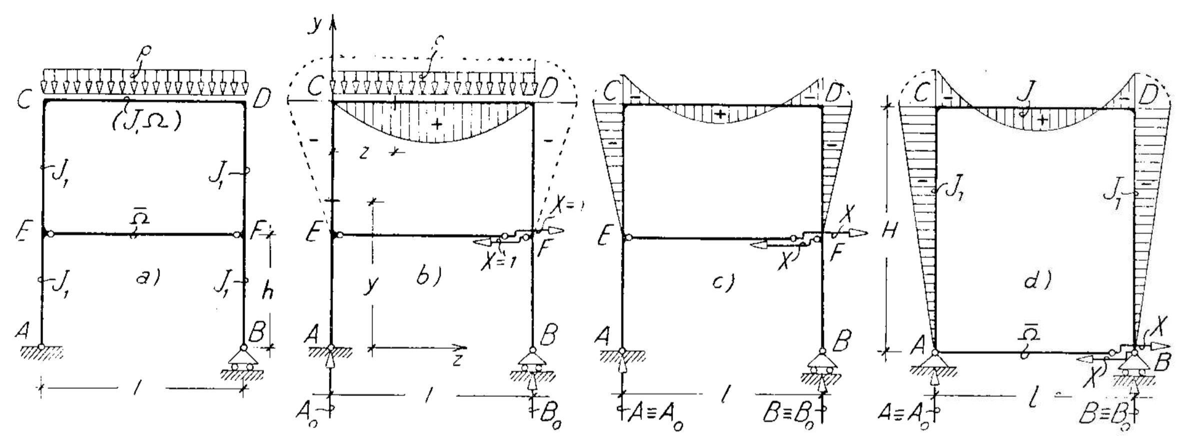

Fig. 31

dell'incognita, che alla conseguente forma dell'equazione dei l. v.

Per bene riconoscere la funzione del tirante, terremo conto anche qui, oltrechè del momento flettente, della forza normale.

Nel sistema principale che residua una volta sciolta l'articolazione, il carico uniforme p agisce nel modo noto per la trave semplice: e cioè con due sforzi assiali nei ritti, uguali fra loro e alle reazioni (verticali) dei vincoli:

$$A_0 = B_0 = \frac{p\,l}{2}\ ;$$

con un momento flettente nell'architrave, variabile con la nota legge parabolica (fig. 31 *b*)):

$$M_0 = \frac{p\,z}{2}\,(l - z)\ .$$

Applicate ora ai due capi dell'articolazione rimossa due forze opposte unitarie lungo l'asse del tirante, ad es. coi sensi indicati in fig. 31 *b)*, le corrispondenti caratteristiche N_1 ed M_1 lungo il contorno del sistema variano con le leggi indicate nella Tabella I/15, alle quali fa riscontro per M_1 il diagramma indicato a tratto punteggiato nella stessa fig. 31 *b)*; ne

TABELLA I/15

TRONCO	N_0	M_0	N_1	M_1	$NN_1 = (N_0 + N_1 X) N_1$	$MM_1 = (M_0 + M_1 X) M_1$
AE BF $(0 \leq y \leq h)$	$-\frac{pl}{2}$	0	0	0	0	0
EC FD $(h \leq y \leq H)$	$-\frac{pl}{2}$	0	0	$-1.y$	0	$1^2.y^2 X$
$CD\ (0 \leq z \leq l)$	0	$\frac{pz}{2}(l-z)$	-1	$-1.(H-h)$	$1^2.X$	$-1\left[\frac{pz}{2}(l-z)-1.(H-h)X\right](H-h)$
$EF\ (0 \leq z \leq l)$	0	0	$+1$	0	$1^2.X$	0

seguono per NN_1 ed MM_1 le leggi raccolte nella medesima Tabella, e quindi per l'equazione dei l. v. la forma semplicissima:

$$0=\left(\frac{1}{\Omega}+\frac{1}{\overline{\Omega}}\right)\int_0^l 1.X dz+\frac{1}{J_1}\int_h^H 1.y^2 X dy-\frac{1}{J}\int_0^l\left[\frac{pz}{2}(l-z)-1.(H-h)X\right](H-h)dz,$$

e la soluzione, di seconda approssimazione:

$$\text{(a)}\qquad 1.X=\frac{\frac{p\,l^3}{12}(H-h)}{l\left(\frac{1}{\Omega}+\frac{1}{\overline{\Omega}}\right)+\frac{1}{3J_1}(H^3-h^3)+\frac{l}{J}(H-h)^2}.$$

Il segno positivo conferma la facile previsione del funzionamento del pendolo EF come catena.

A meno del contributo della forza normale – ciò che equivale qui a supporre rigidi a tale sollecitazione l'architrave CD e il tirante EF – e posto $\vartheta = J/J_1$, è invece in prima approssimazione:

$$\text{(b)}\qquad 1.X=\frac{pl^3(H-h)}{4[3l(H-h)^2+\vartheta(H^3-h^3)]}=\frac{pl^3}{4[3l(H-h)+\vartheta(H^2+Hh+h^2)]}.$$

In fig. 31 *c)* è indicato il diagramma dei momenti