

Esercizio 3 — Risolvere il portale zoppo con lo schema di fig. 8 *a)*, per la condizione di carico ivi indicata e nell'ipotesi che i vincoli siano rigidi.



I carichi indicati nello schema possono ancora assomigliare, come ai due Esercizi precedenti, l'azione del vento e della neve; con questa differenza però nei riguardi del vento: che essendo ora la struttura libera nella parte sottovento, il ritto BD è soggetto ad un'azione negativa (*risucchio*); si ritiene che questa azione interessi la struttura per una certa altezza λ al di sotto di D , e con intensità pari a una frazione $c'q$ di quella q sul ritto AC direttamente investito ⁽¹⁾.

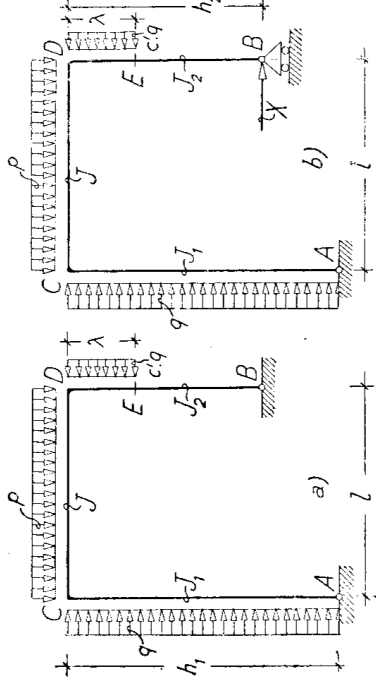


Fig. 8

Come incognita iperstatica possiamo assumere la componente orizzontale X della reazione in B , e quindi come sistema principale il portale zoppo indicato in fig. 8 *b)*.

Per una più comoda valutazione degli effetti e, insieme, per una più chiara visione del modo di agire sulla struttura delle diverse cause (vento, neve, sovrabbondanza di vincoli), separeremo ancora queste ultime al modo indicato sul sistema principale nella figura 9 *a)*, *b)*, *c)*.

Sotto l'azione di q i vincoli, per il fatto che non sono di livello e in dipendenza dell'eccentricità dei carichi totali $Q = qh_1$ e $Q' = c'q\lambda$ sui due ritti, risultano impegnati verticalmente da due forze A_{oq} e B_{oq} dello stesso valore e di segno opposto.

⁽¹⁾ Si assume $\lambda = 2m$ nel caso, che è poi stabilmente quello della pratica, in cui la superficie totale S dell'edificio interessata dal vento supera i $15 m^2$; nel caso contrario, e almeno per lo schema della figura, si fa invece interessare al risucchio l'intera altezza della parete sottovento. Comunque però, sulla base di dati sperimentali, si può supporre $c' = 4/10$ (Cfr. DONATO l. c.).

Nel riferimento $A(z, y)$ indicato in figura, l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno a B , o intorno ad A , porta di seguito, in modo immediato, alle seguenti espressioni di tali componenti:

$$A_{oq} = -B_{oq} = -\frac{1}{l} \left[Q \frac{h_1}{2} - Q' \left(h_1 - \frac{\lambda}{2} \right) \right] = -\frac{1}{l} \left[\frac{qh_1^2}{2} - c'q\lambda \left(h_1 - \frac{\lambda}{2} \right) \right].$$

La cerniera A reagisce, di più, alla stessa azione di q , anche con una componente orizzontale $H_{oq}^{(A)}$, fornita direttamente dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$H_{oq}^{(A)} = -(Q - Q') = -[qh_1 - c'q\lambda] = -q(h_1 - c'\lambda).$$

Dal carico verticale p sull'architrave, i vincoli sono invece impegnati più semplicemente, come ovvio, in quest'altra misura:

$$A_{op} = B_{op} = \frac{pl}{2}, \quad H_{op}^{(A)} = 0.$$

Supposto ora agire in B una forza orizzontale $X=1$ col senso positivo dell'asse z (fig. 9 c), sempre in vir-

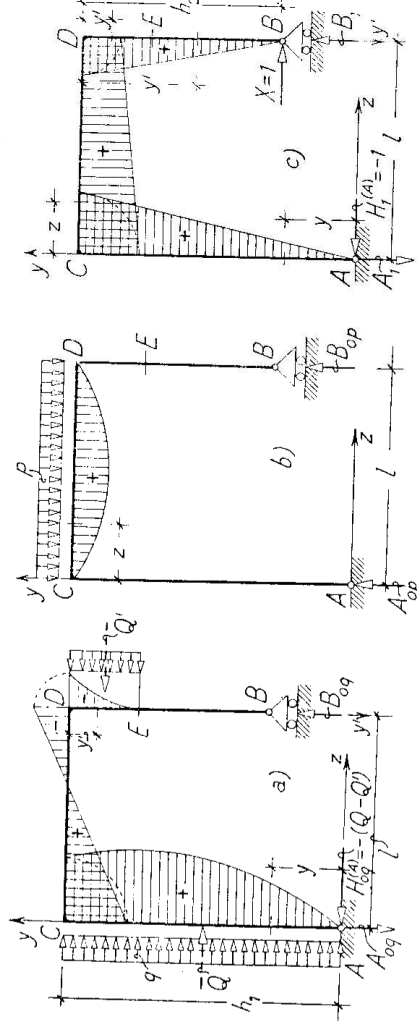


Fig. 9

tù del dislivello $\Delta h = h_1 - h_2$ dei vincoli, questi restano impegnati da due forze verticali A_1 e B_1 dello stesso valore e segno opposto; precisamente (come segue subito ancora dall'equazione alla rotazione intorno a B o intorno ad A):

$$A_1 = -B_1 = -1 \cdot \frac{h_1 - h_2}{l};$$

è poi ulteriormente in A : $H_1^{(A)} = -1$.

Alle tre condizioni di carico ora esaminate, fanno riscontro nei ritti e nell'architrave i diagrammi del

momento flettente indicati nella fig. 9 a), b), e c); diagrammi che traducono le leggi analitiche indicate nella Tabella I/3, per le quali i segni sono relativi ai sensi previsti in figura per le reazioni dei vincoli.

TABELLA I/3

T R O N C O	Condizione di carico		
	M_{oq}	M_{op}	M_1
AC ($0 \leq y \leq h_1$)	$+H_{oq}^{(A)} y - \frac{qy^2}{2}$	0	+ 1.y
CD ($0 \leq z \leq l$)	$+H_{oq}^{(A)} h_1 - \frac{qh_1^2}{2} - A_{oq} z$	$+A_{op} z - \frac{pz^2}{2}$	+ 1.h ₁ - A ₁ z
DE ($0 \leq y' \leq \lambda$)	$-\frac{c'q(\lambda - y')^2}{2}$	0	+ 1.(h ₂ - y')
EB ($\lambda \leq y' \leq h_2$)	0	0	+ 1.(h ₂ - y')

Sovrapponendo ora gli effetti, ne risultano per i momenti nel sistema effettivo e per i prodotti MM_1 da integrare, ai sensi della (4), lungo il contorno del portale, le leggi raccolte nella Tabella II/3.

TABELLA II/3

T R O N C O	$M = M_{oq} + M_{op} + M_1 X$	MM_1
AC ($0 \leq y \leq h_1$)	$+H_{oq}^{(A)} y - \frac{qy^2}{2} + 0 + 1.yX$	$1. \left(+H_{oq}^{(A)} y - \frac{qy^2}{2} + 1.yX \right) y$
CD ($0 \leq z \leq l$)	$+H_{oq}^{(A)} h_1 - \frac{qh_1^2}{2} - A_{oq} z + A_{op} z - \frac{pz^2}{2} + (1.h_1 - A_1 z) X$	$1. \left[+H_{oq}^{(A)} h_1 - \frac{qh_1^2}{2} - (A_{oq} - A_{op}) z - \frac{pz^2}{2} + (1.h_1 - A_1 z) X \right] (h_1 - A_1 z)$
DE ($0 \leq y' \leq \lambda$)	$-\frac{c'q(\lambda - y')^2}{2} + 0 + 1.(h_2 - y') X$	$1. \left[-\frac{c'q(\lambda - y')^2}{2} + 1.(h_2 - y') X \right] (h_2 - y')$
EB ($\lambda \leq y' \leq h_2$)	0 + 0 + 1.(h ₂ - y') X	$1^2. (h_2 - y')^2 X$

Introdotte queste leggi al secondo membro della (4) e tenuto conto che, per l'ipotesi della rigidezza dei vincoli, il primo membro è nullo, si ottiene in forma sintetica la seguente equazione:

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{1}{EJ_1} \int_0^{h_1} \left(H_{oq}^{(A)} y - \frac{qy^2}{2} + 1.yX \right) y dy + \\
 & + \frac{1}{EJ_1} \left[\int_0^\lambda \left[-\frac{c'q(\lambda - y')^2}{2} + 1.(h_2 - y') X \right] (h_2 - y') dy' + 1. \int_\lambda^{h_2} (h_2 - y')^2 X dy' \right] + \\
 & + \frac{1}{EJ} \int_0^l \left[H_{oq}^{(A)} h_1 - \frac{qh_1^2}{2} - (A_{oq} - A_{op}) z - \frac{pz^2}{2} + (1.h_1 - A_1 z) X \right] (h_1 - A_1 z) dz.
 \end{aligned}$$

Eseguendo le integrazioni e sostituendo quindi per $H_{oq}^{(A)}$, A_{oq} , A_{op} ed A_1 le espressioni date di sopra — prese in valore assoluto, in quanto nello scrivere le leggi del momento si è tenuto conto, come detto, del senso in cui spirano tali componenti di reazione — si ottiene con qualche accorgimento la soluzione generale nella forma:

$$(a) \quad 1.X = - \frac{5h_1^4 + 2\vartheta h_1^2(2h_1 + h_2) - c'\lambda\{8h_1^3 + 4h_2\lambda^2 - \lambda^3 + 2\vartheta[4h_1^2 + 2h_1h_2 + \lambda(h_1 + 2h_2)]\}}{8[h_1^3 + \vartheta(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) + h_2^3]} q - \\ - \frac{\vartheta l^3(h_1 + h_2)}{8[h_1^3 + \vartheta(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) + h_2^3]} p = X_q + X_p,$$

nella quale, come al solito, sono state separate le due quote X_q ed X_p dovute a q e a p ed è $\vartheta = J_1/J$.

Le reazioni effettive dei vincoli potrebbero ora determinarsi nel modo più comodo, per ognuna delle due condizioni di carico, sovrapponendo gli effetti:

$$A_q = A_{oq} + A_1 X_q ; \quad B_q = B_{oq} + B_1 X_q ; \quad H_q^{(A)} = -(Q - Q') + X_q ;$$

e analogamente:

$$A_p = A_{op} + A_1 X_p ; \quad B_p = B_{op} + B_1 X_p , \quad H_p^{(A)} = X_p .$$

Nella fig. 10a) e b) sono rappresentati corrispondentemente alle due condizioni i diagrammi del momento flettente nel sistema effettivo.

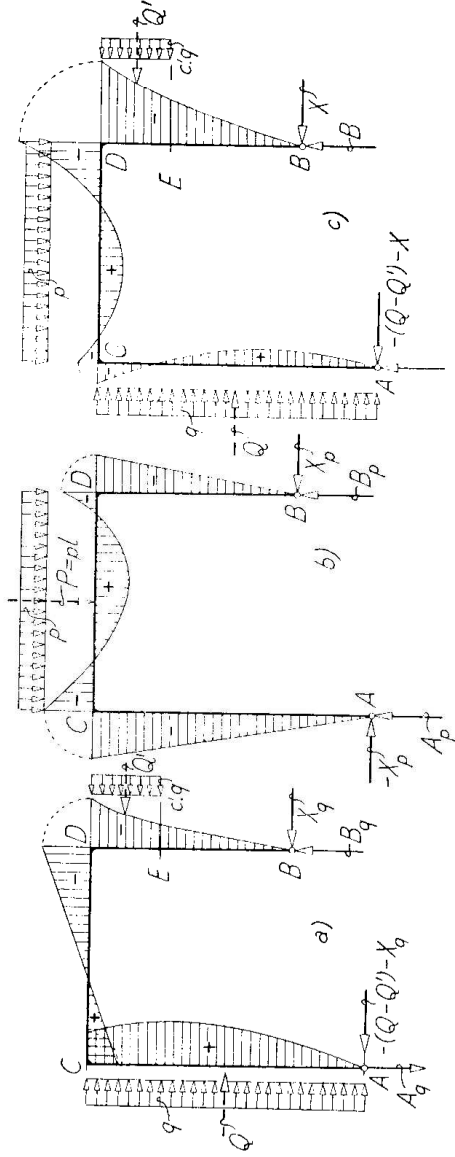


Fig. 10

Nella fig. 10c) è invece rappresentato il probabile andamento dell'analogo diagramma, ancora nel sistema effettivo, per la condizione di carico globale. C'è da

osservare al proposito che, dipendentemente dalle intensità p e q e dalle dimensioni del sistema, il momento in C può risultare positivo, negativo o nullo.

* * *

Dalla soluzione generale (a) possono dedursi facilmente le soluzioni per diversi casi o condizioni particolari importanti e frequenti nelle applicazioni.

a) Si è supposto di sopra che i ritti avessero la stessa flessorigidità EJ_1 , ma diversa da quella EJ dell'architrave; nel caso invece che questo elemento sia lo stesso per tutte e tre le membrature, che sia cioè:

$$J_1 = J_2 = J,$$

è ovvio che si ottiene la relativa soluzione dalla (a), facendosi $\vartheta = 1$; precisamente:

$$(b) \quad 1.X = - \frac{5h_1^4 + 2lh_1^2(2h_1 + h_2) - c'\lambda\{8h_1^3 + 4h_2\lambda^2 - \lambda^3 + 2l[4h_1^2 + 2h_1h_2 + \lambda(h_1 + 2h_2)]\}}{8[h_1^3 + l(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) + h_2^3]} q - \\ - \frac{l^3(h_1 + h_2)}{8[h_1^3 + l(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) + h_2^3]} p,$$

la quale dipende soltanto dalle dimensioni geometriche d'insieme dello schema e non più dalla sezione trasversale e dalla natura elastica del sistema; ciò consente allora di procedere al dimensionamento diretto del portale come si farebbe per una membratura isostatica.

b) Può verificarsi che sul ritto BD il sistema non risenta l'azione di risucchio del vento, in quanto incorporato da quel lato in altro fabbricato, pur rimanendo da esso funzionalmente indipendente.

La soluzione per tal caso, fermo restando lo schema strutturale, si deduce ovviamente dalla (a) facendovi $c' = 0$; risulta quindi:

$$(c) \quad 1.X = - \frac{q[5h_1^4 + 2\vartheta lh_1^2(2h_1 + h_2)] + p\vartheta l^3(h_1 + h_2)}{8[h_1^3 + \vartheta l(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) + h_2^3]},$$

ed eventualmente, facendovi in più $\vartheta = 1$, quando fosse $J_1 = J_2 = J$.

c) Uno schema strutturalmente analogo a quello finora considerato ma più frequente nella pratica costruttiva, è quello in cui il portale, anzichè zoppo, ha i due piedritti della stessa lunghezza. È allora evidente che la soluzione si deduce dalla (a) facendovi $h_1 = h_2 = h$.

Per una struttura con tale schema, libera su ambo i lati, vale a dire soggetta all'azione diretta e indiretta del vento, è dunque, come si riconosce subito:

$$(d) \quad 1.X = - \frac{\{h^3(5h + 6\vartheta l) - c'\lambda[8h^3 + 4h\lambda^2 - \lambda^3 + 6\vartheta l(2h^2 + l\lambda)]\}q + 2\vartheta h l^3 p}{8h^2(2h + 3\vartheta l)},$$

che si semplifica ulteriormente e in modo ovvio nel caso $J_1 = J_2 = J$, facendovi $\vartheta = 1$.

Se, finalmente, la stessa struttura è addossata a destra ad altro fabbricato, così da non risentire l'azione di risucchio ($c' = 0$), è in modo più che mai semplice:

$$(e) \quad 1.X = - \frac{h^2(5h + 6\vartheta l)q + 2\vartheta l^3 p}{8h(2h + 3\vartheta l)},$$

con l'analogia ulteriore semplificazione di cui sopra per $J_1 = J_2 = J$.

d) Fin qui si è ritenuto che l'azione di risucchio, quando era presente, interessasse solo un'altezza parziale λ del ritto sottovento; nel caso, avvertito in nota al principio, in cui si dovesse invece estendere questa azione all'intera altezza, è ovvio che, nelle condizioni più generali, la relativa soluzione si otterrebbe dalla (a) facendovi $\lambda = h_2$:

$$(f) \quad 1.X = - \frac{5h_1^4 + 2\vartheta l h_1^2(2h_1 + h_2) - c'h_2[8h_1^3 + 3h_2^3 + 2\vartheta l(4h_1^2 + 3h_1 h_2 + 2h_2^2)]q + \vartheta l^3(h_1 + h_2)p}{8[h_1^3 + \vartheta l(h_1^2 + h_1 h_2 + h_2^2) + h_2^3]},$$

soluzione che si semplifica poi ulteriormente per $\vartheta = 1$ ($J_1 = J_2 = J$) con gli stessi vantaggi di cui si è detto a proposito della (b), e che ricade senz'altro nella (c) se il ritto BD è invece sottratto all'azione di risucchio.

Nel caso particolare $h_1 = h_2 = h$ è infine, sempre in

presenza di risucchio, anche più semplicemente:

$$(g) \quad 1.X = -\frac{h[5h + 6l\vartheta - c'(11h + 18l\vartheta)]}{8(2h + 3l\vartheta)} q - \frac{\vartheta l^3}{4h(2h + 3l\vartheta)} p,$$

che fornisce in modo immediato anche le altre due ulteriori semplificazioni per $\vartheta=1$ e $c'=0$.

In qualunque caso si sia, una volta determinata la X , per la verifica di stabilità vale quanto già detto al riguardo ai due Esercizi precedenti.

Esercizio 4 — Risolvere il portale pensile $ACDB$ di fig. 11a) con cerniere agli estremi, gravato sullo stelo di sinistra da una forza orizzontale H , nell'ipotesi che la cerniera B subisca uno spostamento pure orizzontale δ verso l'esterno.

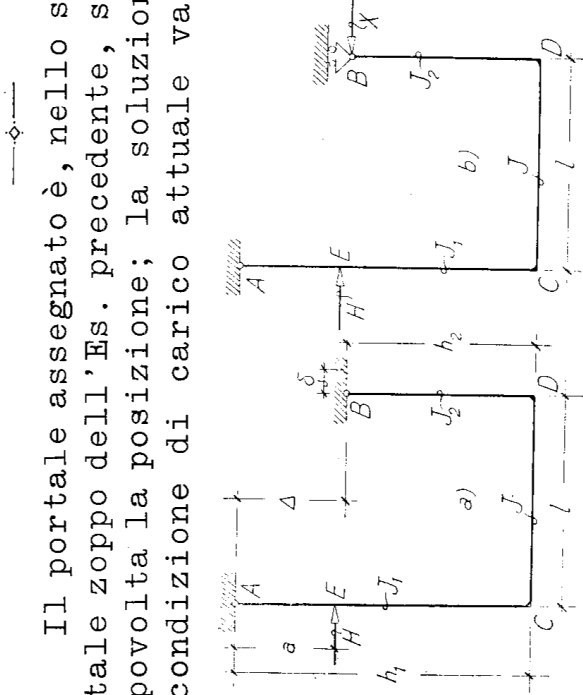


Fig. 11

fissa in A e un carrello in B , scorrevole ad es. dentro una guida orizzontale che, naturalmente, supporremo atta a reagire nei due sensi; l'incognita iperstatica X è così ancora la componente orizzontale della reazione in B (fig. 11b)).

Nelle condizioni di vincolo residue, la forza orizzontale H è, come tale, assorbita completamente dalla

cerniera A ; per altro, però, i due vincoli sono impegnati anche verticalmente in due reazioni A_0 e B_0 dello

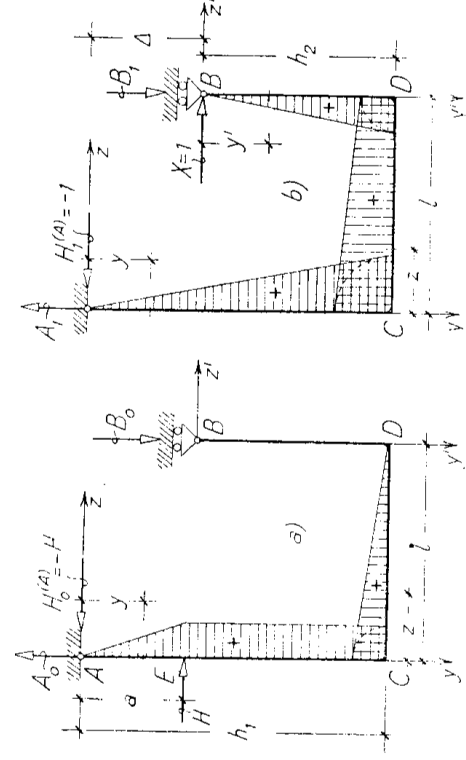


Fig. 12

petono nel riferimento $A(z, y)$ indicato in fig. 12a), valgono dunque:

$$A_0 = -\frac{a}{l} H = -B_0 \quad ; \quad H_0^{(A)} = -H.$$

A tali parametri fa riscontro, lungo il portale, il diagramma dei momenti M_0 rappresentato in fig. 12a).

Applicata ora nel punto B , orizzontalmente, una forza $X=1$ diretta ad es. verso l'esterno, nascono nei vincoli, in quanto non di livello ($h_1 - h_2 = \Delta$), questi altri parametri di reazione:

$$A_1 = -1 \cdot \frac{\Delta}{l} = -B_1 \quad ; \quad H_1^{(A)} = -1,$$

ai quali corrisponde il diagramma dei momenti M_1 indicato in fig. 12b).

Le leggi analitiche dei momenti nel sistema principale per le due condizioni di carico ora esaminate e quella del prodotto MM_1 nel sistema effettivo (dove $M = M_0 + M_1 X$ resta espresso per sovrapposizione degli effetti) sono quelle indicate nella Tabella I/4.

Introdotte nella (4), queste ultime leggi consentono allora di scrivere il secondo membro, quando, come già avvertito in Ess. precedenti, si intenda tener conto del solo momento flettente; al primo membro invece, per l'ipotesi che la cerniera B subisca lo spo-

stamento orizzontale δ verso l'esterno, figura il lavoro $1.\delta$ della forza esterna $X=1$ che compare nella seconda condizione di carico presa in esame, associando

TABELLA I/4

TRONCO	Sistema principale		Sistema effettivo	
	M_0	M_1	$MM_1 = (M_0 + M_1 X) M_1$	
$AE(0 \leq y \leq a)$	$+H_0^{(A)}y = +Hy$	$+1.y$	$1.(Hy + 1.y X)y$	
$EC(a \leq y \leq h_1)$	$+Ha$	$+1.y$	$1.(Ha + 1.y X)y$	
$CD(0 \leq z \leq l)$	$+Ha\left(1 - \frac{z}{l}\right)$	$+1.(h_1 - \frac{\Delta}{l}z)$	$1.\left[Ha\left(1 - \frac{z}{l}\right) + 1.(h_1 - \frac{\Delta}{l}z)X\right](h_1 - \frac{\Delta}{l}z)$	
$BD(0 \leq y' \leq h_2)$	0	$+1.y'$	$1^2.y'^2 X$	

dove il relativo stato di tensione alla deformazione effettiva.

L'equazione dei lavori virtuali diviene perciò in forma esplicita:

$$1.\delta = 1.\frac{1}{EJ_1} \left[\int_0^a (Hy + 1.yX)y dy + \int_a^{h_1} (Ha + 1.yX)y dy \right] + 1^2 \cdot \frac{1}{EJ_2} \int_0^{h_2} y^2 X dy' + \\ + 1.\frac{1}{EJ} \int_0^l \left[Ha\left(1 - \frac{z}{l}\right) + 1.(h_1 - \frac{\Delta}{l}z)X \right] (h_1 - \frac{\Delta}{l}z) dz.$$

Eseguendo le facili integrazioni e riduzioni, si perviene rapidamente alla soluzione:

$$(a) \quad 1.X = \frac{1}{3E} \left[\frac{a}{J_1} \left(3h_1^2 - a^2 \right) + \frac{a}{J} \left(3h_1 - \Delta \right) H \right] = X_\delta + X_H,$$

nella quale sono facilmente riconoscibili il contributo X_δ del cedimento del vincolo e quello X_H della forza esplicita H .

Il primo di questi contributi, che, posto $\vartheta_1 = J/J_1$, $\vartheta_2 = J/J_2$, prende la forma:

$$(b) \quad X_\delta = \frac{3EJ}{\vartheta_1 h_1^3 + l(3h_1^2 - 3h_1\Delta + \Delta^2) + \vartheta_2 h_2^3} \delta,$$

prova, come già riconoscemmo all'Es. 1, che la supposta imperfezione del vincolo equivale ad applicare in B una forza esplicita con lo stesso segno di δ .

È ovvio come si semplifica la (b) per $J_1 = J_2 = J$, il che vuol dire per $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1$.

Il contributo della forza esplicita H , con le stesse posizioni di sopra, prende analogamente la forma più semplice:

$$(c) \quad X_H = - \frac{a[\vartheta_1(3h_1^2 - a^2) + l(3h_1 - \Delta)]}{2[\vartheta_1 h_1^3 + l(3h_1^2 - 3h_1\Delta + \Delta^2) + \vartheta_2 h_2^3]} H,$$

indipendente dal modulo di elasticità normale E del materiale; nello stesso caso particolare di sopra ($\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1$), risulta, di più, indipendente anche dalla comune rigidezza a flessione delle membrature del sistema.

In fig. 13a) e b) sono indicati gli andamenti dei diagrammi del momento flettente nel sistema effettivo, separatamente per la forza H nell'ipotesi di vincoli

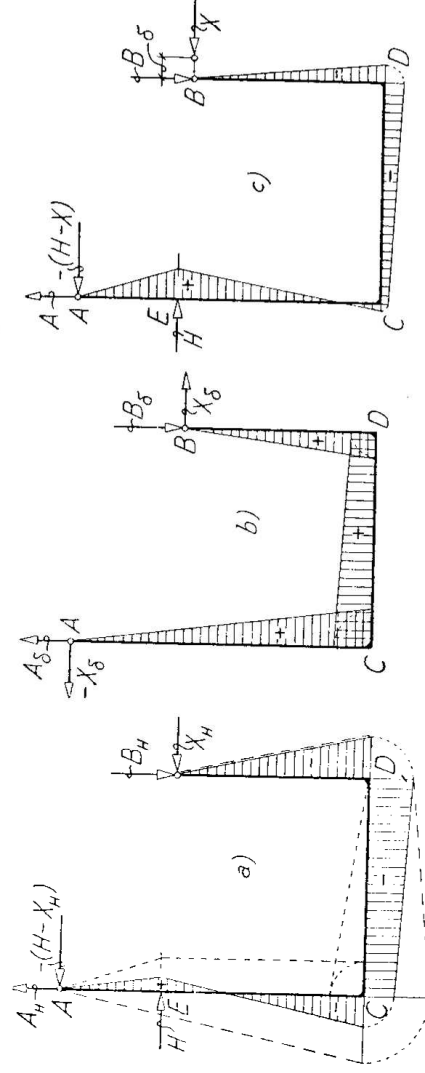


Fig. 13

rigidi ($\delta = 0$) e in relazione invece al solo cedimento δ della cerniera B ; nel primo di questi grafici, è posto in rilievo il modo pratico di ottenere il diagramma, sovrapponendo a quello di fig. 12a), ivi riprodotto a tratto punteggiato, quello che consegue all'incognita iperstatica X_H , indicato invece a tratto lungo.

La fig. 13c) finalmente, mostra un possibile andamento del diagramma nelle condizioni effettive assegnate, cioè in dipendenza contemporaneamente della forza esplicita H e del cedimento δ .

Sia per le soluzioni parziali X_δ e X_H , sia per quella generale X che le cumola (e così pure per i param-

tri delle reazioni, per i momenti ecc.) sono poi evidenti le semplificazioni nel caso particolare $h_1 = h_2 = h$; basta infatti fare ulteriormente in tutte le formule che precedono $\Delta = 0$, ottenendo così per quanto riguarda ad es. l'incognita iperstatica:

$$(b') \quad X_2 = \frac{3 EJ}{h^2[(\vartheta_1 + \vartheta_2)h + 3l]} \delta \quad ; \quad X_H = -\frac{a[\vartheta_1(3h^2 - a^2) + 3hl]}{2h^2[(\vartheta_1 + \vartheta_2)h + 3l]} H, \quad (c')$$

espressioni che, per $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 1$, divengono anche più semplicemente:

$$(b'') \quad X_2 = \frac{3 EJ}{h_2(2h + 3l)} \delta \quad ; \quad X_H = -\frac{a(3h^2 + 3hl - a^2)}{2h^2(2h + 3l)} H, \quad (c'')$$

la seconda delle quali dipende soltanto dalle quote geometriche d'insieme del sistema.

Esercizio 5 — Risolvere il portale a steli rovesci della fig. 14 a), con cerniere agli estremi, nell'ipotesi che queste siano rigide.

—♦—

Il portale è ancora quello dell'Es. precedente, salvo la posizione relativa fra ritti e architrave.

Se pertanto sul ritto di sinistra agisse ancora, a quota a dal vincolo, una forza orizzontale H , la soluzione sarebbe analoga a quella di allora, salvo a sostituire alla differenza Δ fra le lunghezze dei ritti la loro somma $h_1 + h_2$, a invertire il senso di qualche parametro di reazione, agevole a individuarsi e, conseguentemente, il segno del momento in qualche membratura. In modo inverso, la soluzione che daremo ora per il sistema in esame nella condizione di carico assegnata sull'architrave vale anche, con gli accorgimenti inversi, per lo schema dell'Es. precedente.

Si fanno queste avvertenze affinché il lettore si abitui ad operare da sè la riduzione delle soluzioni fra schemi assimilabili, e quindi a sovrapporre in modo opportuno gli effetti di varie cause concomitanti sopra una stessa struttura, deducendoli uno ad uno dalle

corrispondenti condizioni di carico su strutture analoghe già trattate o che lo siano nel seguito.

Scelto come sistema principale ad es. il portale con punto fisso in B e carrello scorrevole orizzontalmente in A - e quindi come incognita i- perstatica la componente orizzontale X della reazione in quest'ultimo vincolo (fig. 14b) - per la condizione reale di carico si hanno, come ovvio (fig. 15a), i seguenti parametri di reazione:

$$A_0 = B_0 = \frac{1}{2} p l \quad ; \quad H_0^{(A)} = 0 \quad .$$

Per l'azione di una forza orizzontale $X=1$ applicata in A , ad es. verso l'interno, si hanno invece negli stessi vincoli, con riguardo, per i segni, al riferimento $A(z, y)$ fissato in figura, questi altri parametri (fig. 15b)):

$$A_1 = B_1 = 1 \cdot \frac{h_1 + h_2}{l} \quad ; \quad H_1^{(B)} = -1 \quad .$$

A queste due condizioni fanno riscontro nel portale i diagrammi del momento di fig. 15a) e b) rispettivamente, rispondenti, sui vari tronchi, alle leggi analitiche raccolte nella Tabella I/5; ivi sono pure indi-

TABELLA I/5

Caratteristica di sollecitazione	T R O N C O		
	$AC (0 \leq y \leq h_1)$	$CD (0 \leq z \leq l)$	$BD (0 \leq y' \leq h_2)$
N_0	$-A_0 = -\frac{pl}{2}$	0	$+B_0 = +\frac{pl}{2}$
N_1	$-A_1 = -1 \cdot \frac{h_1 + h_2}{l}$	-1	$-B_1 = -1 \cdot \frac{h_1 + h_2}{l}$
M_0	0	$+A_0 z - \frac{p z^2}{2} = \frac{p z}{2} (l - z)$	0
M_1	-1.y	$-1 \cdot h_1 + A_1 z - 1 \cdot \left(h_1 - \frac{h_1 + h_2}{l} z \right)$	+1.y'

cate, in quanto intendiamo qui tener conto anche della forza normale, le leggi di N_0 e di N_1 ; per quanto ne riguarda i segni, si ricorda ⁽¹⁾ che, indipendentemente dai sensi degli assi di riferimento, si assume N posi-

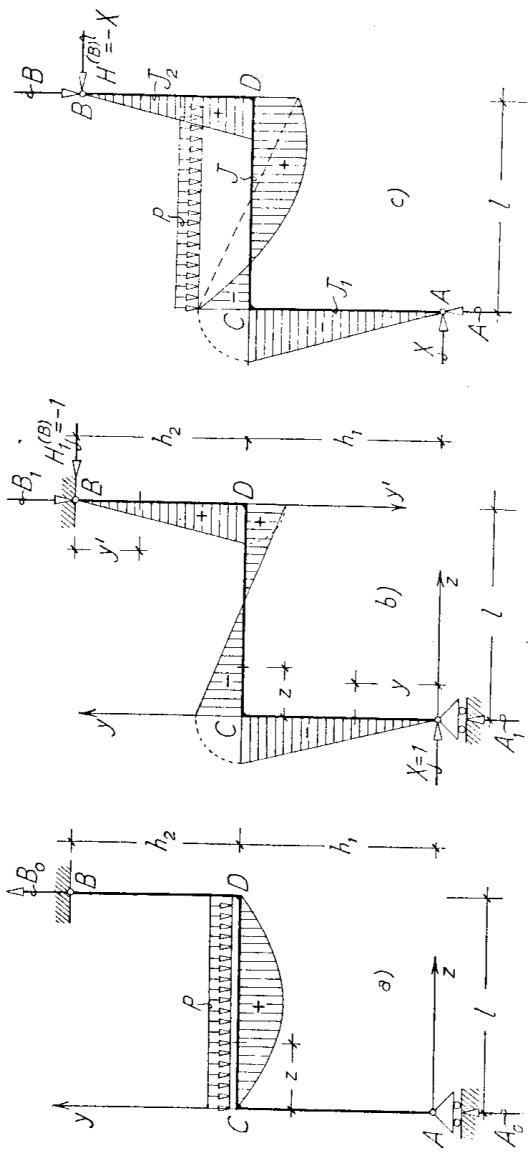


Fig. 15

tivo in una data sezione (o in tutta una data membratura nel caso che vi rimanga costante) se di trazione, negativo se di compressione.

Le corrispondenti leggi dei prodotti NN_1 ed MM_1 (in cui, per il principio di sovrapposizione, risultano $N = N_0 + N_1X$ ed $M = M_0 + M_1X$) sono allora quelle della Tabella II/5.

TABELLA II/5

TRONCO	$NN_1 = (N_0 + N_1X) N_1$	$MM_1 = (M_0 + M_1X) M_1$
$AC (0 \leq y \leq h_1)$	$+1 \cdot \left(\frac{pl}{2} + 1 \cdot \frac{h_1 + h_2}{l} X \right) \frac{h_1 + h_2}{l}$	$+1^2 \cdot y^2 X$
$CD (0 \leq z \leq l)$	$1^2 \cdot X$	$-1 \cdot \left[\frac{pz}{2} (l - z) - 1 \cdot \left(h_1 - \frac{h_1 + h_2}{l} z \right) X \right] \left(h_1 - \frac{h_1 + h_2}{l} z \right)$
$BD (0 \leq y' \leq h_2)$	$-1 \cdot \left(\frac{pl}{2} - 1 \cdot \frac{h_1 + h_2}{l} X \right) \frac{h_1 + h_2}{l}$	$+1^2 \cdot y'^2 X$

L'equazione dei lavori virtuali nella forma (4'), con riguardo ora ai primi due integrali a secondo membro e detti Ω_1 , Ω_2 e Ω ; J_1 , J_2 e J le aree e rispettivamente

⁽¹⁾ Cfr. Esercizio 1, pag. 20-21.

te i momenti di inerzia delle sezioni dei due ritte e dell'architrave, si scrive in conseguenza:

$$0 = \frac{1}{E\Omega_1} \int_0^{h_1} \left(\frac{pl}{2} + 1 \cdot \frac{h_1 + h_2}{l} X \right) \frac{h_1 + h_2}{l} dy - \frac{1}{E\Omega_2} \int_0^{h_2} \left(\frac{pl}{2} - 1 \cdot \frac{h_1 + h_2}{l} X \right) \frac{h_1 + h_2}{l} dy' +$$

$$+ \frac{1}{E\Omega_1} \int_0^1 1 \cdot X dz + \frac{1}{EJ_1} \int_0^{h_1} 1 \cdot y^2 X dy + \frac{1}{EJ_2} \int_0^{h_2} 1 \cdot y'^2 X dy' -$$

$$- \frac{1}{EJ_1} \int_0^1 \left[\frac{pz}{2} (l-z) - 1 \cdot \left(h_1 - \frac{h_1 + h_2}{l} X \right) \right] \left(h_1 - \frac{h_1 + h_2}{l} z \right) dz .$$

Da questa, con immediati sviluppi e riduzioni, si perviene per $1 \cdot X$ alla soluzione generale:

$$(a) \quad 1 \cdot X = - \frac{\left(\frac{h_1}{\Omega_1} - \frac{h_2}{\Omega_2} \right) \frac{h_1 + h_2}{2} - \frac{l^3}{24J} (h_1 - h_2)}{\left(\frac{h_1}{\Omega_1} + \frac{h_2}{\Omega_2} \right) \left(\frac{h_1 + h_2}{l} \right)^2 + \frac{l}{\Omega} + \frac{1}{3} \left(\frac{h_1^3}{J_1} + \frac{h_2^3}{J_2} \right) + \frac{l}{3J} (h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2)} p ,$$

il cui valore può risultare positivo, negativo o nullo.

In fig. 15 c) è rappresentato l'andamento del diagramma dei momenti nell'ipotesi che risulti $1 \cdot X > 0$.

Si possono esaminare sulla (a) alcuni casi particolari importanti:

a) se i due ritte hanno la stessa sezione e uguale a quella dell'architrave: $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, ma è ad es. $h_1 > h_2$, il numeratore della (a) può scriversi:

$$- \frac{h_1 - h_2}{2} \left(\frac{h_1 + h_2}{\Omega} - \frac{l^3}{12J} \right) ,$$

e risulta quindi $1 \cdot X \gtrless 0$ secondochè, com'è immediato riconoscere:

$$(a) \quad \frac{l^3}{12(h_1 + h_2)} \gtrless \rho^2 ,$$

essendo $\rho = \sqrt{J/\Omega}$ il raggio d'inerzia della sezione dell'architrave rispetto all'asse normale al piano del sistema.

La (a) mette dunque in relazione diretta le quote d'insieme del portale con l'inerzia del solo archi-

trave, indipendentemente, per quanto riguarda il segno di $1.X$, da quelle dei due ritti;

b) se è $\Omega_1 = \Omega_2$ (ed eventualmente anche $\neq \Omega$) e di più $h_1 = h_2$, risulta $1.X = 0$; cioè per ritti uguali, stante la loro antisimmetria, il sistema risulta non spingente; i ritti funzionano dunque in tale condizione come pendoli, senza inflettersi, alla stessa stregua di come si comportano comunque nel sistema principale, impegnando i vincoli in due reazioni verticali $A = B = A_0 = B_0$ uguali fra loro e alla metà del carico complessivo, come se l'architrave CD fosse semplicemente appoggiato;

c) per lunghezze e per sezioni dei ritti diverse fra loro, ma tali che $h_1/\Omega_1 = h_2/\Omega_2$, il segno di $1.X$ è quello stesso della differenza $h_1 - h_2$, la soluzione per tale caso avendo come numeratore il prodotto $(h_1 - h_2) l^3/24J$;

d) il segno di questa differenza decide poi comunque da solo di quello di $1.X$, quando si trascuri il contributo della forza normale, ciò che porta a eliminare nella (a) a numeratore e a denominatore i termini contenenti le rigidezze $E\Omega_i$ a forza normale delle varie membrature.

In tale ordine di approssimazione, la soluzione di- viene pertanto, posto di più $\vartheta_1 = J/J_1$ e $\vartheta_2 = J/J_2$:

$$(b) \quad 1.X = \frac{(h_1 - h_2) l^3}{8[\vartheta_1 h_1^3 + l(h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2) + \vartheta_2 h_2^3]} p,$$

che si semplifica ulteriormente, e in modo evidente, per $J_1 = J_2$ e quindi per $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$.

Esercizio 6 — Risolvere il sistema elastico di fig. 16 a), per la condizione di carico ivi indicata e nell'ipotesi che i vincoli siano rigidi.

Il sistema in esame, come i precedenti semplicemente iperstatico, può assimilare il riquadro resistente di un capannone industriale a scheletro, contro un cui fianco sia sistemato, a mezzo della mensola δ , un

piano di scorrimento per grue; agli effetti dello studio del riquadro, questa mensola può essere considerata come un braccio rigido, con la sola funzione di riportare al telaio il carico P trasmesso dalla gru.

La condizione di carico assegnata equivale perciò (fig. 17a)) all'insieme del carico P agente secondo l'asse del ritto di sinistra e del momento $m = P\delta$ di trasporto.

Come incognita iperstatica, possiamo assumere ad es. la componente orizzontale X della reazione in B (fig. 16b)), disponendo ivi un car-

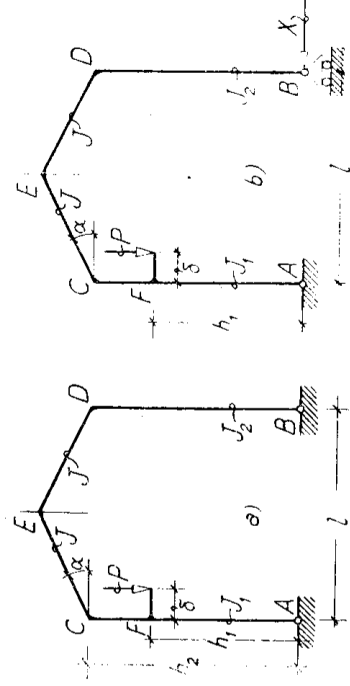


Fig. 16

rello in luogo della cerniera.

In queste condizioni, da parte del carico P , resta ovviamente interessato solo il vincolo di sinistra con una reazione opposta; da parte del momento m , restano invece impegnati ambedue i vincoli in due reazioni di ugual valore e di segno opposto, pari precisamente, com'è immediato riconoscere, a:

$$A'_o = -B'_o = -\frac{P\delta}{l}.$$

Sommando gli effetti è dunque:

$$A_o = P + A'_o = P\left(1 - \frac{\delta}{l}\right) \quad ; \quad B_o = 0 + B'_o = P\frac{\delta}{l}.$$

Rimosso ora il carico P e applicata in B , ad es. verso l'interno (fig. 17b)), una forza orizzontale $X=1$, le reazioni dei vincoli, essendo questi di livello, si riducono alla sola $H_1^{(A)} = -1$ nella cerniera A .

Lungo il contorno del sistema principale, si hanno in conseguenza per M_o ed M_1 le quindi anche per il prodotto $MM_1 = (M_o + M_1X)M_1$ le leggi raccolte nella Tabella I/6, che si traducono graficamente nei diagrammi di fig. 17a) e b).

Introdotte le leggi MM_1 al secondo membro della (4),

per l'ipotesi fatta nell'enunciato che i vincoli siano

TABELLA I/6

TRONCO	M_0	M_1	$MM_1 = (M_0 + M_1 X) M_1$
$AF (0 \leq y \leq h_1)$	0	-1.y	-1.(0 - 1.y X) y = 1^2.y^2 X
$FC (h_1 \leq y \leq h_2)$	$P\delta$	-1.y	-1.(P\delta - 1.y X) y
$CE (0 \leq z \leq l/2)$	$P\delta \left(1 - \frac{z}{l}\right)$	-1.(h_2 + z tg \alpha)	-1. \left[P\delta \left(1 - \frac{z}{l}\right) - 1.(h_2 + z tg \alpha) X \right] (h_2 + z tg \alpha)
$BD (0 \leq y' \leq h_2)$	0	-1.y'	-1.(0 - 1.y' X) y' = 1^2.y'^2 X
$DE (0 \leq z' \leq l/2)$	$B_0' = \frac{P\delta}{l} z'$	-1.(h_2 + z' tg \alpha)	-1. \left[\frac{P\delta}{l} z' - 1.(h_2 + z' tg \alpha) X \right] (h_2 + z' tg \alpha)

rigidi, si perviene alla equazione:

$$0 = \frac{1}{EJ_1} \left[1. \int_0^{h_1} y^3 X dy - \int_0^{h_2} (P\delta - 1.y X) y dy \right] - \frac{1}{EJ_2} \int_0^{l/2} \left[P\delta \left(1 - \frac{z}{l}\right) - 1.(h_2 + z tg \alpha) X \right] (h_2 + z tg \alpha) dz + 1. \frac{1}{EJ_2} \int_0^{h_2} y'^3 X dy' - \frac{1}{EJ_2} \int_0^{l/2} \left[\frac{P\delta}{l} z' - 1.(h_2 + z' tg \alpha) X \right] (h_2 + z' tg \alpha) dz'.$$

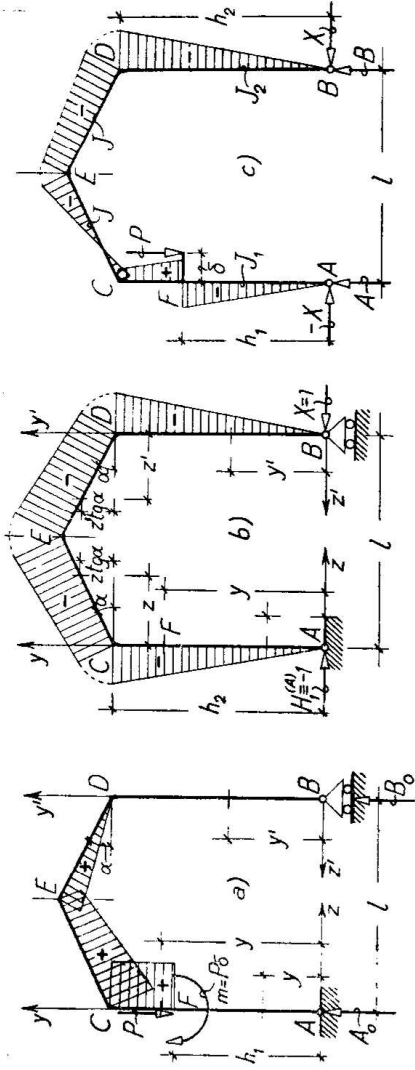


Fig. 17

Sviluppando e ponendo $\vartheta_1 = J/J_1$, $\vartheta_2 = J/J_2$, si trova facilmente la soluzione:

$$(a) \quad 1.X = \frac{3}{2} \cdot \frac{P\delta [4\vartheta_1 (h_2^2 - h_1^2) + l(4h_2 + l tg \alpha)]}{4h_2^3 (\vartheta_1 + \vartheta_2) + l(12h_2^2 + 6lh_2 tg \alpha + l^2 tg^2 \alpha)},$$

la quale, risultando certamente positiva, prova che è giusto il senso previsto per la X in fig. 17 b), vale a dire che, nelle assegnate condizioni di carico, la struttura spinge verso l'esterno.

In fig. 17 c) è pertanto indicato l'andamento del diagramma dei momenti per il sistema effettivo.

* * *

Dalla soluzione ora trovata si possono trarre importanti considerazioni per lo stesso schema, o per uno schema analogo, in diverse condizioni di carico.

Analizziamo qui queste condizioni per il caso che il sistema sia simmetrico, tale cioè che $J_1 = J_2$ e quindi $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$, caso per il quale la soluzione diviene più semplicemente:

$$(b) \quad 1.X = \frac{3}{2} \cdot \frac{P\delta[4\vartheta(h_2^2 - h_1^2) + l(4h_2 + l\tg\alpha)]}{8\vartheta h_2^3 + l(12h_2^2 + 6lh_2\tg\alpha + l^2\tg^2\alpha)}.$$

Di solito, per piccole luci l , un piano di scorrimento per grue è sistemato, in modo simmetrico, sui due fianchi del riquadro (fig. 18 a)), sicchè sui due ritti agiscono contemporaneamente, con lo stesso braccio δ , due carichi P_1 e P_2 , la cui somma uguaglia la portata lorda Q .

Ora è ovvio — e d'altronde immediato specchiando la fig. 17 c) — che P_1 e P_2 danno origine a spinte X_{P_1} e X_{P_2} del medesimo segno, per modo che i loro effetti si sommano aritmeticamente; se nella (b) si indica con k il coefficiente di $P\delta$, risulta dunque:

$$X = X_{P_1} + X_{P_2} = k(P_1 + P_2)\delta = kQ\delta,$$

la quale dice che, quando il ponte $\mathcal{P}$ è in corrispondenza di un riquadro, qualunque sia su di esso la posizione del carrello elevatore C , e quindi qualunque siano i valori delle azioni P_1 e P_2 agli appoggi, giacchè in ogni caso deve essere $P_1 + P_2 = Q = \text{cost}$, la spinta del portale rimane la stessa. La fig. 18 b) mostra, indicativamente, il diagramma dei momenti sul portale nel caso che sia $P_2 > P_1$, ottenendolo per sovrapposizione degli effetti dei due carichi separati. Non occorre dire che tale diagramma risulta simmetrico quando sia $P_1 = P_2 = P = Q/2$, ciò che si verifica quando Q — risultante

della portata netta Q_0 e della tara complessiva del ponte—cade sull'asse di simmetria s del riquadro.

Altra condizione di carico che può capitare di prendere in esame, è quella per cui P_1 e P_2 hanno segni opp-

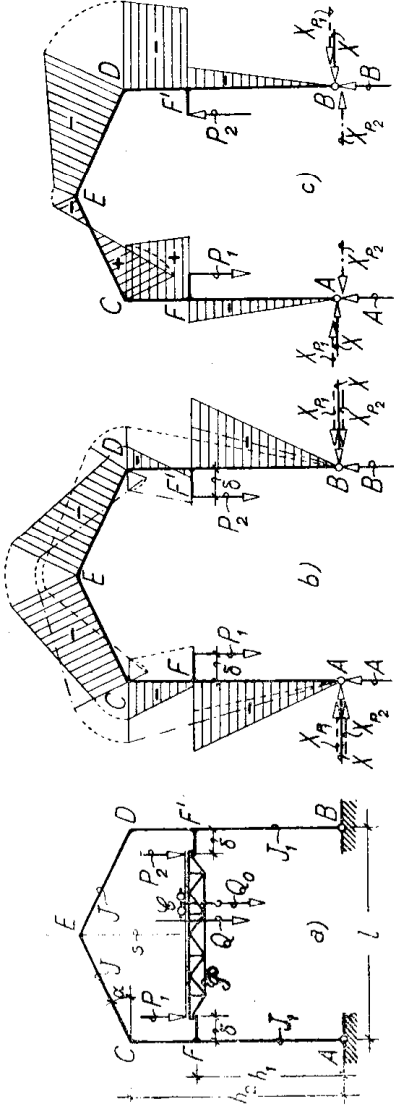


Fig. 18

posti (fig. 18c); di segno opposto risultano allora le relative spinte X_{P_1} e X_{P_2} , sicchè sommando gli effetti:

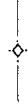
$$X = X_{P_1} + X_{P_2} = k\delta (P_1 - P_2),$$

la quale dice che, in particolare, per carico antisimmetrico ($P_1 = -P_2$), risulta $X = 0$, vale a dire che il sistema è non spingente.

In pratica dunque, qualora il ponte trasmettesse ai due ritti carichi P_1 e P_2 di senso opposto, per una determinata posizione della portata Q (quella per cui $P_1 = -P_2$) la spinta risulterebbe nulla; a destra di tale posizione risulterebbe di un segno, a sinistra del segno opposto.

In fig. 18c) è indicato il diagramma dei momenti supponendo, in valore assoluto, $P_1 > P_2$; non occorre dire che nel caso particolare $P_1 = -P_2$, i tronchi AF e BF' dei due ritti sarebbero scarichi a flessione e il diagramma dei momenti risulterebbe antisimmetrico, con ordinata nulla nel punto di colmo K del portale.

Esercizio 7 — Risolvere il sistema elastico di fig. 19 a) gravato da un carico uniforme p lungo il ritto BD .



Il sistema può essere reso isostatico sopprimendo

uno dei vincoli semplici disposti in A e in C ; per es. quest'ultimo. Nei vincoli residui, il carico uniforme p sul ritto desta allora, con riguardo al riferimento $O(z, y)$ di fig. 19b), le seguenti reazioni:

$$A_0 = -B_0 = \frac{ph^2}{2l_1} \quad ; \quad H_0^{(B)} = ph,$$

e quindi lungo i tronchi AD e BD (quello CD è scarico) le caratteristiche N_0, M_0 e T_0 raccolte nella Tabella I/7; in fig. 19b) è indicato a tratto continuo il diagramma M_0 .

Supposto ora rimosso il carico p e applicata all'estremo C della mensola DC una forza verticale $X=1$,

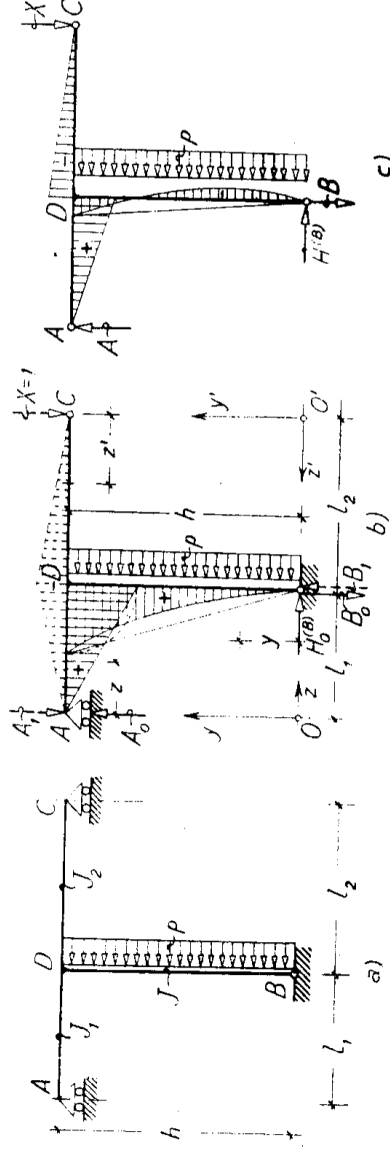


Fig. 19

diretta ad es. verso il basso (v. ancora la fig. 19b)), le corrispondenti reazioni dei vincoli, di necessità esclusivamente verticali, divengono, sempre nel riferimento $O(z, y)$:

$$A_1 = -1 \cdot \frac{l_2}{l_1} \quad ; \quad B_1 = 1 \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right) ;$$

a verifica di ciò, basta scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione una volta intorno a B , l'altra intorno ad A .

TABELLA I/7

TRONCO	N_0	M_0	T_0	N_1	M_1	T_1
$AD (0 \leq z \leq l_1)$	0	$+\frac{ph^2}{2l_1}z$	$+\frac{ph^2}{2l_1}$	0	$-1 \cdot \frac{l_2}{l_1}z$	$-1 \cdot \frac{l_2}{l_1}$
$BD (0 \leq y \leq h)$	$+\frac{ph^2}{2l_1}$	$+phy - \frac{py^2}{2}$	$-p(h-y)$	$-1 \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right)$	0	0
$CD (0 \leq z' \leq l_2)$	0	0	0	0	$-1 \cdot z'$	+1

Le corrispondenti caratteristiche N_1, M_1 e T_1 sono anche raccolte nella Tabella I/7; per quanto riguarda M_1 , la fig. 19b) ne mostra il diagramma a segno tratteggiato.

Costruite sulle caratteristiche così determinate, la Tabella II/7 contiene per i vari tronchi del sistema le leggi dei prodotti NN_1, MM_1 e TT_1 ; si osservi al proposito come il ritto CD , malgrado impegnato anche a flessione e taglio, resti in definitiva rappresentato unicamente dalla forza normale, vale a dire come nel

TABELLA II/7

TRONCO	$NN_1 = (N_0 + N_1 X) N_1$	$MM_1 = (M_0 + M_1 X) M_1$	$TT_1 = (T_0 + T_1 X) T_1$
$AD (0 \leq z \leq l_1)$	0	$-1 \cdot \left(\frac{ph^2}{2l_1} z - 1 \cdot \frac{l_2}{l_1} z X \right) \frac{l_2}{l_1} z$	$-1 \cdot \left(\frac{ph^2}{2l_1} - 1 \cdot \frac{l_2}{l_1} X \right) \frac{l_2}{l_1}$
$BD (0 \leq y \leq h)$	$-1 \cdot \left[\frac{ph^2}{2l_1} - 1 \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right) X \right] \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right)$	0	0
$CD (0 \leq z' \leq l_2)$	0	$-1 \cdot (0 - 1 \cdot z' X) z' = 1^2 \cdot z'^2 X$	$(0 + 1 \cdot X) \cdot 1 = 1^2 X$

valore della incognita iperstatica X contribuisca del ritto solo la variazione di lunghezza; la flessione e il taglio vi influiscono invece solo attraverso ai due tronchi di architrave.

Sostituendo le leggi dei prodotti ora detti, senza escluderne alcuno, nel secondo membro della (4) e supponendo i vincoli rigidi, si ottiene l'equazione dei l.v. nella seguente forma completa:

$$0 = -\frac{1}{E\Omega} \int_0^h \left[\frac{ph^2}{2l_1} - 1 \cdot \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right) X \right] \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right) dy - \frac{1}{EJ_1} \int_0^{l_1} \left(\frac{ph^2}{2l_1} z - 1 \cdot \frac{l_2}{l_1} z X \right) \frac{l_2}{l_1} z dz +$$

$$+ \frac{1}{EJ_2} \int_0^{l_2} 1 \cdot X z'^2 dz' - \frac{\chi}{G\Omega_1} \int_0^{l_1} \left(\frac{ph^2}{2l_1} - 1 \cdot \frac{l_2}{l_1} X \right) \frac{l_2}{l_1} dz + \frac{\chi}{G\Omega_2} \int_0^{l_2} 1 \cdot X dz',$$

dove, come al solito, Ω, Ω_1 e Ω_2 indicano le aree delle sezioni del ritto e dei due tronchi di architrave.

Eseguite le facili integrazioni e riduzioni, si perviene alla soluzione generale:

$$(a) \quad 1 \cdot X = \frac{h^2}{2l_1} \cdot \frac{h}{E\Omega} \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right)^2 + \frac{l_2^2}{3E} \left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right) + \chi \frac{l_2}{G} \left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{1}{\Omega_1} + \frac{1}{\Omega_2} \right) p,$$

nella quale sono palesi i contributi della forza normale, del momento flettente e del taglio.

Il segno positivo del secondo membro conferma la previsione fatta sul senso della X ; la fig. 19 c) indica in conseguenza l'andamento del diagramma dei momenti nel sistema effettivo.

A meno del contributo del taglio — solitamente trascurabile — la soluzione diviene:

$$(b) \quad 1.X = \frac{h^2}{2l_1} \cdot \frac{\frac{h}{\Omega} \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right) + \frac{l_1^2 l_2}{3J_1}}{\frac{h}{\Omega} \left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right)^2 + \frac{l_2^2}{3} \left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2} \right)} p;$$

a meno anche di quello della forza normale, posto $\vartheta = J_1/J_2$ e $\lambda = l_2/l_1$, quest'altra semplicissima:

$$(c) \quad 1.X = \frac{h^2}{2l_2(1 + \vartheta\lambda)} p.$$

È un caso particolare importante quello in cui sia $l_1 = l_2 = l$, $\Omega_1 = \Omega_2$ e $J_1 = J_2$, in quanto la (a), la (b) e la (c), indifferentemente, si riducono tutte a quest'altra:

$$(d) \quad 1.X = \frac{h^2}{4l} p,$$

legata solamente alla quote d'insieme del sistema e indipendente dalle rigidezze a forza normale, a flessione e a taglio delle sue membrature; e ciò, si noti, in conseguenza unicamente della simmetria del sistema rispetto all'asse del ritto, potendo per il resto questo e l'architrave essere tra loro diversi.

Esercizio 8 — Risolvere il sistema elastico di fig. 20 a), gravato sul tronco orizzontale AC da un carico concentrato P all'ascissa a dall'incastro e sul ritto BC da un carico uniforme q .

Se il tronco BC fosse scarico, la scelta più spontanea dell'incognita iperstatica starebbe ovviamente per lo sforzo S in tale tronco, che funzionerebbe da pendolo, rimuovendo ad es. l'articolazione in B .

Per la presenza del carico q sul ritto, questo funziona invece come trave inflessa, e la scelta di sopra porterebbe a un caso di labilità.

Ciò si evita sostituendo all'incastro A una cerniera, con che incognita iperstatica X risulta il momento di incastro M_A e sistema principale il sistema articolato ACB (fig. 20b)).

La risoluzione di tale sistema nelle condizioni assegnate di carico, può essere condotta notoriamente ⁽¹⁾ in modo comodo, oltrechè per via analitica, per via grafica, collegando il carico P e la risultante Q del carico ripartito sul ritto a mezzo del poligono funicolare che passa per A , per C e per B , poligono indicato in fig. 20b); ivi i raggi 23 e 24 che dal polo risolvono 3 proiettano gli estremi O e 2 della bilatera delle forze, sono equipollenti rispettivamente alle reazioni R_{OB} e R_{OA} delle due cerniere.

Per via analitica, queste stesse reazioni si determinano nel modo più agevole separando gli effetti di P e di Q , in quanto per ciascuno di questi carichi il

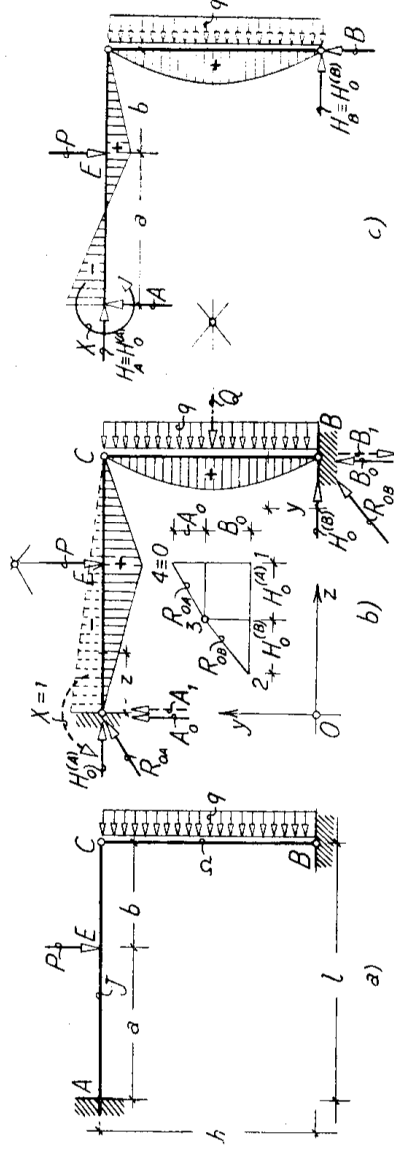


Fig. 20

tronco non direttamente interessato si comporta come un pendolo; nel riferimento $O(x, y)$ fissato in figura, è così in modo immediato:

$$H_O^{(A)} = H_O^{(B)} = \frac{q h}{2} \quad ; \quad A_O = \frac{P b}{l} \quad ; \quad B_O = \frac{P a}{l}$$

A tali parametri fa riscontro sul sistema il diagramma dei momenti M_O indicato a tratto continuo in

⁽¹⁾ Cfr. MAGINI - Statica Grafica, Cap. XV B) - Ed. C. Corsi - Pisa.

fig. 20b), diagramma che consta di due parti del tutto indipendenti e le cui leggi sono quelle indicate nella Tabella I/8.

TABELLA I/8

TRONCO	N_0	M_0	N_1	M_1
$AE (0 \leq z \leq a)$	$-\frac{ph}{2}$	$+\frac{Pb}{l}z$	0	$-1 + 1 \cdot \frac{l}{l}z = -1 \cdot \left(1 - \frac{z}{l}\right)$
$EC (a \leq z \leq l)$	$-\frac{ph}{2}$	$+\frac{Pb}{l}z - P(z-a)$	0	$-1 + 1 \cdot \frac{l}{l}z = -1 \cdot \left(1 - \frac{z}{l}\right)$
$BC (0 \leq y \leq h)$	$-\frac{Pa}{l}$	$+\frac{ph}{2}y - \frac{py^2}{2}$	$-1 \cdot \frac{l}{l}$	0

Rimossi ora i carichi espliciti P e q e applicato isolatamente nella sezione A un momento $X=1$, per es. negativo (fig. 20b)), le due cerniere A e B -stante, in siffatte condizioni, il funzionamento del tronco BC come pendolo - vengono impegnate da due reazioni verticali non cospiranti capaci di dare, con braccio l , una coppia opposta, pari precisamente a:

$$A_1 = B_1 = 1 \cdot \frac{l}{l}.$$

Ne segue sul sistema il diagramma dei momenti indicato a tratto punteggiato in fig. 20b), le cui leggi, nei vari tronchi, sono quelle pure raccolte nella Tabella I/8; ivi sono indicate, in più, le leggi delle caratteristiche N_0 ed N_1 , in quanto intendiamo qui tener conto anche della forza normale.

I prodotti $NN_1 = (N_0 + N_1X)N_1$ ed $MM_1 = (M_0 + M_1X)M_1$ hanno in conseguenza le forme riportate nella Tabella II/8;

TABELLA II/8

TRONCO	$NN_1 = (N_0 + N_1X)N_1$	$MM_1 = (M_0 + M_1X)M_1$
$AE (0 \leq z \leq a)$	0	$-1 \cdot \left[\frac{Pb}{l}z - 1 \cdot \left(1 - \frac{z}{l}\right)X\right] \left(1 - \frac{z}{l}\right)$
$EC (0 \leq z \leq l)$	0	$-1 \cdot \left[\frac{Pb}{l}z - P(z-a) - 1 \cdot \left(1 - \frac{z}{l}\right)X\right] \left(1 - \frac{z}{l}\right)$
$BC (0 \leq y \leq h)$	$-1 \cdot \left(\frac{Pa}{l} + 1 \cdot \frac{l}{l}X\right) \frac{l}{l}$	0

da queste, introdotte come al solito al secondo membro della (4), si deduce per vincoli rigidi l'equazione:

$$0 = \frac{1}{E\Omega} \int_0^h \left(\frac{Pa}{l} + 1 \cdot \frac{1}{l} X \right) \frac{1}{l} dy - \frac{1}{EJ} \left[\int_0^l \frac{Pb}{l} z - 1 \cdot \left(1 - \frac{z}{l} \right) X \right] \left(1 - \frac{z}{l} \right) dz - \int_a^l P(z-a) \left(1 - \frac{z}{l} \right) dz.$$

Tenendo presente che $b = l - a$ e posto $\varphi^* = \sqrt{J/\Omega}$ (si osservi che φ^* è un raggio d'inerzia fittizio, essendo (fig. 20 a)) J relativo all'architrave, Ω relativa al ritto, e perciò è il raggio d'inerzia comune solo se le due membrature sono ugualmente dimensionate) si riconosce in modo agevole la soluzione:

$$(a) \quad 1.X = \left(\frac{al}{2} \cdot \frac{a^2 - 3al + 2l^2}{3h\varphi^{*2} + l^3} + \frac{3ah\varphi^{*2}}{3h\varphi^{*2} + l^3} \right) P = X_{(M)} + X_{(N)},$$

nella quale sono stati distinti il contributo della flessione e quello della forza normale; prescindere da questa, equivarrebbe a supporre il ritto infinitamente rigido a forza normale, cioè $\Omega = \infty$ e quindi $\varphi^* = 0$, e la soluzione si semplificherebbe in quest'altra:

$$(b) \quad 1.X = \frac{a(a^2 - 3al + 2l^2)}{2l^3} P,$$

che per a diverso da zero e da l , si riconosce subito essere sempre positiva (sicchè, anche, sempre $X_M > 0$); e infatti il numeratore si annulla, oltrechè per $a = 0$, per $a = l$ e $a = 2l$, radici questi due ultimi valori del trinomio in a fra parentesi; e poichè è invece $0 < a < l$, questo trinomio ha costantemente il segno del suo primo coefficiente.

Per carico P in mezzeria ($a = \frac{l}{2}$) è in particolare:

$$(c) \quad 1.X = \frac{3}{16} Pl,$$

contro al valore $Pl/2$ che si avrebbe se l'estremo C , anzichè fisso come in definitiva si ritiene in seguito all'ipotesi che il ritto sia infinitamente rigido a forza normale, fosse invece libero.

Una circostanza notevole da rilevare è quella che nella soluzione non compare traccia del carico p dif-

fuso sul ritto; ciò dipende ovviamente dal fatto che da parte di questo carico, stante la presenza della cerniera C , all'incastro A non perviene che un'azione secondo l'asse dell'asta AC , che in niente influenza il valore del momento M_A .

Esercizio 9 — Risolvere il portale a squadra della fig. 21a) munito di incastro al piede e di carrello scorrevole in B , per carico uniforme sul ritto e sull'architrave.

Per la riduzione più semplice a sistema principale viene spontaneo sopprimere l'appoggio scorrevole in B , arrivando così alla mensola a squadra di fig. 21b). Avremmo però anche potuto, come all'Esercizio precedente, scegliere per incognita iperstatica, anziché la

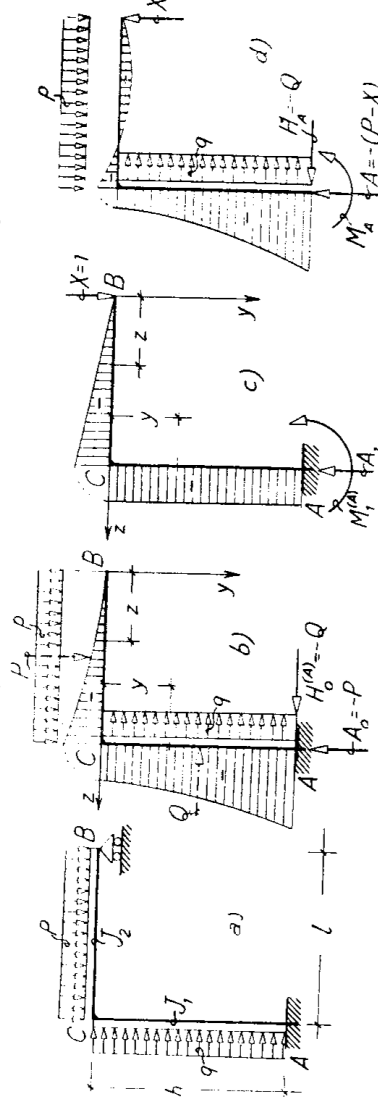


Fig. 21

reazione X dell'appoggio B , il momento d'incastro al piede, riguardando come sistema principale il portale con cerniera in A e carrello in B .

Seguendo la prima scelta e con riguardo al riferimento $B(z, y)$ di fig. 21b), il momento M_0 lungo i due tronchi del portale varia secondo le facili leggi indicate nella Tabella I/9.

Applicata ora all'estremo B della mensola una forza verticale $X=1$, rivolta ad es. verso il basso (fig. 21c)), lungo i due tronchi si hanno per M_1 le leggi indicate nella stessa Tabella; alle leggi ora dette di M_0 e di M_1 , fanno riscontro i diagrammi indicati nella fig. 21b) e c).