

CAPITOLO I

IL METODO DEL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Il principio dei lavori virtuali costituisce il mezzo più generale per lo studio dei problemi di equilibrio, statico o dinamico, sia su corpi rigidi che su corpi deformabili; si richiama qui l'aspetto che esso prende nel caso di questi ultimi; e a ben comprenderlo, si immagini un sistema elastico nella configurazione deformata corrispondente all'azione di un dato complesso di forze applicate; tale configurazione è caratterizzata notoriamente: per un lato, da una ben determinata distribuzione di reazioni vincolari e di tensioni interne, costituenti globalmente un sistema *equilibrato*; per l'altro, da una ben determinata distribuzione di spostamenti-deformazioni, rispettanti ovunque le condizioni geometriche imposte dai vincoli esterni e quelle di continuità di compagine interna; in breve, cioè, da un sistema *congruente* di spostamenti-deformazioni.

Così stando le cose, supponiamo che il corpo elastico, non importa per quali cause, passi dalla configurazione ora detta a una configurazione vicina, in seguito a una deformazione dell'ordine di grandezza di quelle elastiche e compatibile coi vincoli, caratterizzabile quindi anch'essa mediante un sistema di spostamenti-deformazioni congruente: *deformazione virtuale*; per contro non intervenga però alcuna variazione nel sistema di forze-tensioni equilibrato di partenza.

In tali circostanze, le forze esterne —esplicitate e reazioni vincolari, nel caso che i vincoli non siano perfetti— compiono un *lavoro virtuale*; altrettanto fanno le reazioni interne, questo secondo lavoro equivalendo a una variazione virtuale dell'energia potenziale elastica del corpo. Orbene, il principio assicura che, nel

caso di vincoli bilaterali, sussistendo l'equilibrio, il lavoro virtuale delle forze esterne uguaglia la variazione di energia potenziale, per qualunque deformazione virtuale; viceversa, che verificandosi questa uguaglianza per qualunque deformazione virtuale, la configurazione di partenza è una configurazione di equilibrio.

In forma esplicita, il principio si enuncia propriamente così: *per vincoli bilaterali, condizione necessaria e sufficiente affinché una data configurazione del sistema sia di equilibrio, è che, per una qualunque deformazione virtuale a partire da essa, il lavoro virtuale delle forze esterne — esplicitate e, eventualmente, reazioni vincolari — uguagli la variazione dell'energia potenziale elastica del sistema stesso.*

In simboli:

$$(1) \quad L_e = L_i$$

indicando sinteticamente con L_e ed L_i i lavori virtuali esterno ed interno.

Naturalmente, a seconda che il sistema elastico è a parete piena o a parete reticolare, la (1) prende forma esplicita diversa.

a) *Sistemi a parete piena.* Per un corpo elastico di forma qualunque, occupante un volume V , e per il quale si indichino con σ_{ik} le componenti di tensione nel punto corrente, con ϵ_{ik}^* le componenti speciali della deformazione virtuale, si ricorderà che L_i prende la forma:

$$L_i = \int_V (\sum \sigma_{ik} \epsilon_{ik}^*) d\tau.$$

Nel caso particolare di un sistema piano, le σ_{ik} sono comodamente esprimibili mediante le caratteristiche N , M e T della sollecitazione, le ϵ_{ik}^* , in modo analogo, mediante le caratteristiche di una opportuna sollecitazione fittizia, propriamente quella capace di indurre nel sistema lo stato di tensione σ_{ik}^* corrispondente a tali componenti; nelle condizioni più generali di carico e di vincolo e, di più, per una variazione termica, contrassegnando con l'indice α gli elementi relativi al sistema di forze-tensioni equilibrato, con l'indice β quelli relativi al sistema di spostamenti-

-deformazioni congruente, la forma esplicita della (1) diviene:

$$(2) \quad \int_s p_a \eta_b ds + \sum P_a \eta_b + \sum M_a \varphi_b + \sum C_a \Delta C_b + \sum \mathcal{N}_a \vartheta_b = \\ = \int_s \frac{M_a M_b}{EJ} ds + \int_s \frac{N_a N_b}{EA} ds + \int_s \chi \frac{T_a T_b}{GA} ds + \int_s N_a \alpha t ds + \int_s \frac{M_a \alpha \Delta t}{h} ds,$$

nella quale, precisiamo, rappresentano:

p_a l'intensità del carico ripartito nel punto generico del contorno s del sistema;

P_a il generico fra i carichi concentrati;

M_a la generica fra le coppie esplicite;

C_a ed $\mathcal{N}_a$ i parametri della reazione del vincolo generico;

N_a, M_a, T_a le caratteristiche della sollecitazione corrispondenti al complesso dei carichi ora elencati; elementi tutti questi che caratterizzano, chi da un lato chi dall'altro, il sistema di forze-tensioni equilibrato; inoltre indicano:

$\eta_b, \varphi_b, \Delta C_b, \vartheta_b$ gli spostamenti -lineari o angolari- delle sezioni in cui i carichi esterni, reazioni comprese, agiscono, nella deformazione virtuale in gioco;

N_b, M_b, T_b le caratteristiche della sollecitazione fittizia capace di indurre nella sezione corrente i parametri - coefficienti di dilatazione e scorrimenti - che caratterizzano tale deformazione.

I due ultimi addendi al secondo membro della (2) tengono infine conto di un salto termico fra l'intradosso e l'estradosso della trave, di altezza h , quando si ammetta per esso una variazione continua con legge lineare.

Per condizioni particolari di carico e di vincolo, la (2) prende naturalmente diversi aspetti particolari.

Così in assenza di carico ripartito p , di coppie esplicite M_a (ovvero di carichi concentrati P_a), di variazione termica, e nell'ipotesi che i vincoli non compiano lavoro, siano cioè rigidi e lisci ($\Delta C_b = \vartheta_b = 0$) questa:

$$(3) \quad \sum P_a \eta_b = \int_s \frac{N_a N_b}{EA} ds + \int_s \frac{M_a M_b}{EJ} ds + \int_s \chi \frac{T_a T_b}{GA} ds$$

$$\left[\sum M_a \varphi_b = \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \gg \quad \quad \quad \right] .$$

b) *Sistemi reticolari*. Nelle ipotesi sotto cui si studiano abitualmente tali sistemi, e cioè che le aste siano collegate mediante cerniere prive di attrito e che siano caricate soltanto in corrispondenza dei nodi, le caratteristiche della sollecitazione nelle aste si riducono, come noto, alla sola forza normale, la quale, di più, rimane costante lungo le aste stesse. Il sistema di forze-tensioni equilibrato di cui all'enunciato del principio dei lavori virtuali, consta pertanto del complesso dei carichi-reazioni P_a, C_a e degli sforzi S_a nelle aste.

Corrispondentemente, gli elementi della deformazione virtuale che interessano, si riducono agli spostamenti η_b dei nodi, valutati nelle direzioni dei carichi espliciti P_a , ai cedimenti ΔC_b dei vincoli, valutati in modo analogo nelle direzioni delle reazioni C_a , e alle variazioni Δs_b di lunghezza delle aste in conseguenza degli spostamenti relativi dei loro nodi di estremità.

Al primo membro della (2) vengono allora a mancare stabilmente il termine relativo al carico ripartito e quelli relativi alle coppie; peraltro la sua forma resta però invariata; al secondo membro invece, mettendo ancora in conto una variazione Δ di temperatura, cui consegue nell'asta generica, lunga s , la variazione di lunghezza $\alpha s \Delta t$, gli integrali, e limitatamente alla forza normale, si cambiano in sommatorie; l'espressione più generale del principio dei lavori virtuali per i sistemi reticolari, prende così la forma:

$$(2') \quad \sum P_a \eta_b + \sum C_a \Delta C_b = \sum S_a S_b \rho + \sum S_a \alpha s \Delta t ,$$

dove con $\rho = \frac{s}{EA}$ si è indicata l'estensibilità dell'asta generica, vale a dire la variazione di lunghezza che vi determina uno sforzo unitario, e con S_b quello sforzo

capace di produrre nell'asta medesima la variazione di lunghezza fittizia corrispondente alla deformazione virtuale considerata.

In assenza di variazione termica, il secondo membro della (2') manca naturalmente dell'ultimo termine e prende la forma analoga della (3):

$$(3') \quad \sum P_a \eta_b + \sum C_a \Delta C_b = \sum S_a S_b \rho .$$

* * *

Nella (2) e (2'), come detto, gli elementi che figurano a caratterizzare la condizione di carico e la deformazione virtuale; possono essere affatto qualunque: basta che nel complesso i primi costituiscano un sistema equilibrato, i secondi caratterizzino una deformazione (virtuale) congruente.

Di siffatte deformazioni se ne hanno però, di solito, infinite a disposizione; non essendovi allora alcuna ragione speciale di scelta per quella da associare allo stato equilibrato di partenza, scrivendo la (2), o la (2'), si scrive una infinità di equazioni; nè, d'altra parte, è necessario che la deformazione scelta interressi tutto il sistema, e tanto meno nelle condizioni effettive; può, al contrario, interessarne solo una parte ed anche in condizioni di vincolo diverse da quelle di partenza: basta soltanto che la deformazione del nuovo sistema, o di quella parte, rispetti i vincoli del sistema dato, per risultare congruente allo stato di tensione cui si accompagna.

Ancora, per la simmetria con la quale entrano nell'equazione i termini contrassegnati con l'indice a e con l'indice b , si può anche pensare di partire da un sistema di spostamenti-deformazioni congruente, ad es. *quello corrispondente alla deformazione effettiva*, e di associarlo a un qualunque sistema di forze-tensioni equilibrato; e, come prima, non importa se sul sistema di partenza o sopra un sistema da esso derivato o anche, eventualmente, sopra una sua parte soltanto.

La (2) [la (2')] compendia dunque, in definitiva, una

doppia infinità di equazioni: tutte quelle che nascono associando a un dato sistema di forze-tensioni equilibrato una qualunque deformazione virtuale, e reciprocamente. È inoltre evidente che, non avendo avuto bisogno di specificare la natura dei termini con l'indice b , questi possono essere affatto qualunque: provenire quindi da una deformazione di natura puramente elastica, ovvero plastica o elasto-plastica; i vincoli poi possono essere perfetti, cioè rigidi e senza attrito, o imperfetti, cioè cedevoli e con attrito.

L'equazione, infine, in modo analogo a come fa per una variazione termica, potrebbe anche tener conto di eventuali difetti di montaggio o di costruzione.

Si osservi di più, nel caso dei sistemi a parete piana — per i quali il secondo membro della (2) può sempre pensarsi, a meno della variazione termica, della forma (3) — l'uniformità con cui viene tenuto conto contemporaneamente del momento, della forza normale e del taglio, senza per altro obbligare all'analisi geometrica della deformazione, non sempre facile ed agevole per poco che il sistema sia complesso; semmai, anzi, c'è da dire, come avvertimmo già nella Premessa, che in questa uniformità quasi piatta, il principio manca di far risaltare l'aspetto intuitivo della deformazione.

* * *

Questo lo spirito del principio dei lavori virtuali per i sistemi deformabili, indipendentemente dalla sua applicabilità allo studio dei problemi iperstatici.

Ora è proprio nelle vasta libertà di scelta di cui si dispone per scrivere la (2), o la (2'), che si presenta la possibilità di questa applicazione.

Propriamente lo studio di un sistema elastico può essere condotto per due vie simmetriche; dire infatti che la (2) [o la (2')] è condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio, significa: da un lato, che il suo verificarsi a partire da un sistema di spostamenti-deformazioni congruente, porta come conseguenza che

il sistema di forze-tensioni associato è equilibrato; dall'altro, viceversa, che il suo verificarsi a partire da un sistema di forze-tensioni equilibrato, porta che il sistema di spostamenti-deformazioni associato è congruente. Nel primo caso è allora possibile individuare fra le infinite configurazioni congruenti, cioè possibili ma non equilibrate, quella unica che risolve il problema, sicchè se fra le forze in gioco una è incognita si può determinare quel particolare valore di essa che soddisfa all'equilibrio; nel secondo caso è possibile individuare fra le infinite configurazioni equilibrate ma non congruenti, l'unica possibile, sicchè se è incognito uno spostamento o una reazione sovrabbondante, si può individuare quel particolare valore di questa incognita che soddisfa alla congruenza.

È ovviamente questo secondo l'aspetto che ci interessa, sia per la risoluzione dei sistemi iperstatici, sia per lo studio della deformazione di un sistema deformabile qualunque (iperstatico o no); e al proposito, tutto sta nello scrivere opportunamente la (2), o la (2').

Si raggiunge lo scopo, per ognuna delle incognite che presenta il problema, associando *invariabilmente* la deformazione effettiva, riguardata come una deformazione virtuale, a un sistema di forze-tensioni equilibrato quanto mai semplice: quello destinato nel sistema principale da una forza (o da una coppia) unitaria, applicata in quella stessa sezione nella quale, riducendoci al sistema principale, è stata introdotta la incognita iperstatica che si sta considerando.

Se n sono le incognite $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots, X_n$, si ottengono pertanto le n equazioni di elasticità occorrenti, associando, per n volte, sempre la deformazione effettiva, agli n stati equilibrati corrispondenti, nel sistema principale, separatamente alle n condizioni unitarie $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_k = 1, \dots, X_n = 1$, e imponendo che, in corrispondenza del vincolo sostituito con la X_k , sia rispettata la congruenza della deformazione.

Nel caso dei sistemi a parete piena dunque, se indichiamo con N_k , M_k e T_k le caratteristiche della sollecitazione nel sistema principale per la condizione di carico isolata $X_k=1$, la generica delle n equazioni suddette - a meno, in un primo tempo, della variazione termica, i cui effetti possono sempre essere valutati a parte e sovrapposti algebricamente a quelli dei carichi espliciti - prende la forma:

$$(4) \quad 1.\eta = \int_s \frac{NN_k}{EA} ds + \int_s \frac{MM_k}{EJ} ds + \int_s \chi \frac{TT_k}{GA} ds,$$

dove η è, nel sistema effettivo, lo spostamento, secondo la linea di azione della X_k , del punto di applicazione di questa, ovvero la rotazione della sezione in cui agisce la stessa X_k , nel caso che questa sia un momento.

In modo analogo per i sistemi reticolari, sempre a meno della variazione termica, la (3) prende la forma:

$$(4') \quad 1.\eta = \sum SS_k \rho,$$

dove η è, ancora nel sistema effettivo, lo spostamento, nella direzione di X_k , del punto in cui tale incognita agisce. Naturalmente, sia nella (4) che nella (4'), lo spostamento η , che costituisce l'elemento attraverso cui si traduce la congruenza della deformazione, è da riguardarsi come quantità assegnata: o implicitamente nella natura stessa della iperstatica che si considera, nel caso che questa sia interna, o esplicitamente, col qualificare la natura del vincolo, nel caso che l'iperstatica sia invece esterna.

Nelle (4) e (4') non v'è traccia esplicita delle incognite $X_1, X_2, \dots, X_n$; queste entrano però, e linearmente in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, nelle espressioni delle caratteristiche effettive N , M e T della sollecitazione, ovvero in quelle degli sforzi effettivi S ; propriamente è:

per i sistemi a parete piena :

$$\begin{aligned} N &= N_o + \sum_I^n N_k X_k \\ M &= M_o + \sum_I^n M_k X_k \\ T &= T_o + \sum_I^n T_k X_k ; \end{aligned} \quad (5)$$

per i sistemi reticolari :

$$S = S_o + \sum_I^n S_k X_k , \quad (5')$$

ove con N_o , M_o e T_o , e rispettivamente con S_o — *termini di carico* — si indichino le caratteristiche della sollecitazione nel sistema principale caricato dalle sole forze esplicite.

Introdotte le (5) nelle (4) [le (5') nelle (4')] ne risulta in definitiva un sistema lineare di n equazioni nelle n incognite $X_1, X_2, \dots, X_n$, il quale, se, come supponiamo, è di equazioni indipendenti, è atto a determinare tali incognite.

In modo reciproco, ove tale sistema sia stato preventivamente risolto, oppure nel caso di un sistema isostatico — per il quale le caratteristiche (5) o (5') coincidono con N_o , M_o e T_o o rispettivamente con gli sforzi S_o — la (4) [la (4')] può fornire lo spostamento η effettivo in una data direzione di un dato punto (o la rotazione effettiva di una data sezione) del sistema; basta per questo applicare nel sistema principale in quel punto e in quella direzione (ovvero in quella sezione) una forza (una coppia) unitaria, e introdurre al secondo membro in luogo di N_k , M_k e T_k , o di S_k , le caratteristiche della sollecitazione corrispondenti a questa condizione di carico. E si noti che, senza preoccuparci per la scelta del senso della forza (o della coppia) unitaria — come d'altronde già prima per il senso della $X_k=1$ — tali spostamenti (rotazioni) sono forniti anzitutto in segno.

Dei due diversi procedimenti di calcolo ora schematizzati, daremo nel seguito varie applicazioni, sia per sistemi a parete piena che per sistemi reticolari, con diverso grado di iperstaticità.

Esercizio 1 — Studiare il portale a squadra ACB incernierato agli estremi con lo schema di fig. 1a), per la condizione di carico ivi indicata e nell'ipotesi che la cerniera A subisca uno spostamento orizzontale δ verso l'interno.

Confrontare la soluzione con quella che si ha nell'ipotesi di vincoli rigidi.

—♦—

Il portale assegnato può rappresentare ad es. lo schema delle strutture resistenti di un capannone industriale, addossato sulla destra ad altro fabbricato; la condizione di carico indicata in fig. 1b) può però tanto assimilare: sul ritto una pressione q di vento, sull'architrave il peso proprio o un carico p di neve.

Poichè i vincoli comportano in tutto quattro parametri di reazione — due per ciascuna cerniera — il sistema risulta una volta esternamente indeterminato. Come incognita iperstatica, conviene assumere la componente orizzontale X

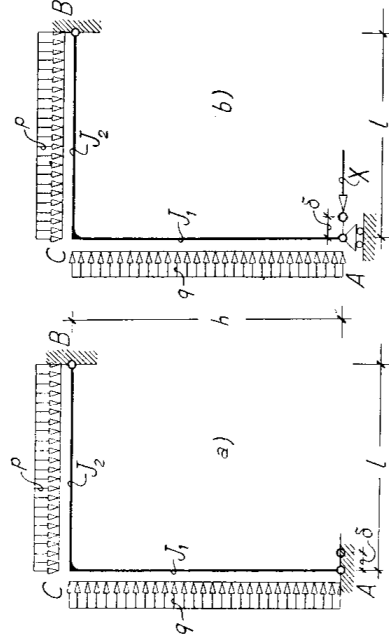


Fig. 1

A e cerniera fissa in B ; quando fosse nota in valore e segno la X , è ovvio che, applicandola come una forza esplicita sul sistema principale (fig. 1b)), le condizioni statico-elastiche di questo sarebbero in tutto identiche a quelle del sistema di partenza; in particolare, al carrello disposto in A competerebbe ancora lo spostamento orizzontale δ assegnato.

Secondo quanto si è richiamato nelle pagine precedenti, circa il modo di applicare il principio dei lavori virtuali alla risoluzione dei sistemi iperstatici, è proprio quest'ultima condizione che porta alla equazione di elasticità capace di fornire la X .

In armonia a quanto abbiamo richiamato allora, per scrivere tale equazione, dovremo associare alla deformazione effettiva, riguardata come virtuale, lo stato

di forze-tensioni equilibrato che genera nel sistema principale una forza orizzontale $X=1$ applicata nella cerniera A ; poichè allora, nella deformazione effettiva, a questa cerniera compete lo spostamento orizzontale δ , in tale associazione la forza $X=1$ compie il lavoro $1 \cdot \delta$; questo termine costituisce il primo membro dell'equazione (4) dei lavori virtuali; nel secondo membro figura invece la corrispondente variazione di energia potenziale elastica, e a renderlo esplicito è necessario esprimere, secondo le (5), le caratteristiche N , M e T della sollecitazione nel sistema effettivo, in funzione dei carichi espliciti e della iperstatica X .

Ora l'effetto globale di tali forze può essere studiato nel modo più conveniente, considerandole una ad una separatamente e sovrapponendo quindi gli effetti;

si avrà anzi così, in più, la possibilità di giudicare del modo di influire sulla struttura dei due tipi di carichi, vale a dire, secondo l'assimilazione che di questi si è fatta, del vento e della neve, o del peso proprio.

Formalmente, i termini N_o , M_o e T_o che compaiono nelle (5) —*termini di carico*— risultano allora dalla somma degli analoghi termini relativi a q e a p ; contrassegnando questi termini con gli stessi indici dei carichi, le (5) si scrivono dunque, ancora in forma sintetica:

$$(5') \quad \begin{cases} N = N_{oq} + N_{op} + N_1 X \\ M = M_{oq} + M_{op} + M_1 X \\ T = T_{oq} + T_{op} + T_1 X \end{cases}$$

dove con N_1 , M_1 e T_1 si sono indicate le caratteristiche della sollecitazione nel sistema principale per la condizione $X=1$.

Nella fig. 2 sono appunto separate le tre condizio-

TABELLA I/1

Parametri delle reazioni dei vincoli	Condizione di carico		
	q	p	$X=1$
A_o	$+\frac{qh^2}{2l}$	$+\frac{pl}{2}$	$+\frac{h}{l}$
B_o	$-\frac{qh^2}{2l}$	$+\frac{pl}{2}$	$-\frac{h}{l}$
$H_o^{(B)}$	$-qh$	0	-1

ni q , p ed $X=1$; ad esse, come da facili considerazioni di statica sulle quali non ci fermiamo, corrispondono nei vincoli rimasti i parametri di reazione A_0 , B_0 ed $H_0^{(B)}$ raccolti nella Tabella I; i segni ivi premessi a tali

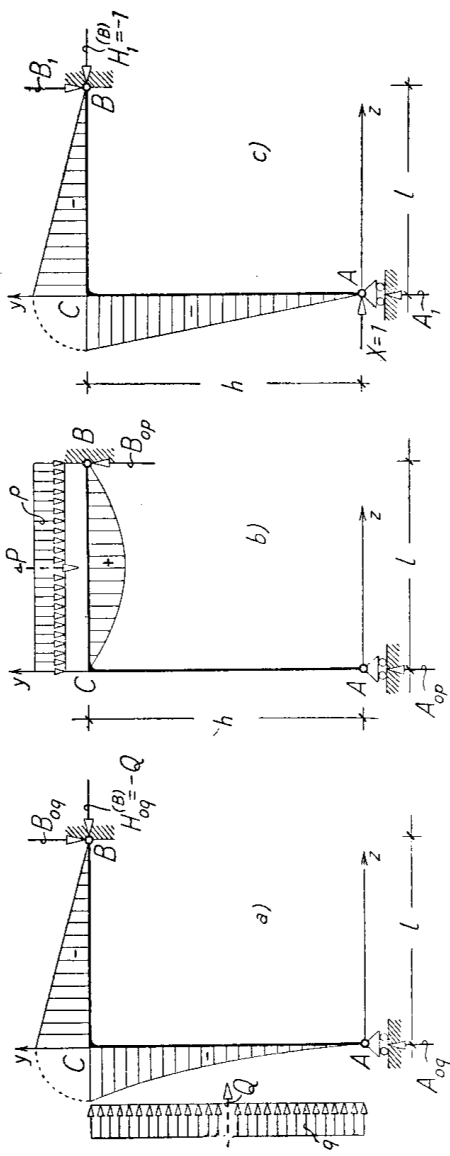


Fig. 2

parametri, sono quelli che loro spettano nel riferimento $A(z, y)$ indicato nella stessa figura.

Le leggi analitiche secondo cui variano le corrispondenti caratteristiche della sollecitazione nel ritto e nell'architrave, facili anch'esse a verificarsi, sono raccolte nella Tabella II; in riguardo ai segni premessi a tali caratteristiche, ricordiamo che, per la sezione generica del sistema, esse si assumono come positive in base alle seguenti convenzioni:

lo sforzo normale se di trazione;

TABELLA II/1

Condizione di carico	TRONCO	
	AC ($0 \leq y \leq h$)	CB ($0 \leq z \leq l$)
N_{0q}	$-\frac{qh^2}{2l}$	$-qh$
T_{0q}	0	$+\frac{qh^2}{2l}$
M_{0q}	$-\frac{qy^2}{2}$	$-\frac{qh^2}{2}\left(1-\frac{z}{l}\right)$
N_{0p}	$-\frac{pl}{2}$	0
T_{0p}	0	$+p\left(\frac{l}{2}-z\right)$
M_{0p}	0	$+\frac{plz}{2}\left(1-\frac{z}{l}\right)$
N_1	$-1 \cdot \frac{h}{l}$	-1
T_1	-1	$+1 \cdot \frac{h}{l}$
M_1	$-1 \cdot y$	$-1 \cdot h\left(1-\frac{z}{l}\right)$

il momento flettente se genera trazione al bordo interno della sezione;

il taglio se, immaginando di disporre via via i singoli tronchi orizzontalmente, la componente sul profilo della sezione della risultante di tutte le forze alla sinistra - reazioni comprese - è diretta verso l'alto.

Per maggiore evidenza delle leggi suddette, nella fig. 2a), b) e c) sono indicati gli andamenti dei diagrammi del momento per le tre condizioni q , p ed $X=1$, seguendo la convenzione di rappresentare, per i vari tronchi, internamente i momenti positivi; non si è fatto altrettanto per le altre due caratteristiche N e T , sia per non complicare il disegno, sia perchè, fra le tre, la più importante è il momento, tant'è che di solito è sufficiente approssimazione tener conto soltanto di questo.

A snellire gli sviluppi formali, potremmo anche noi trascurare il contributo di N e di T ; ciò faremo invece, salvo opportunità contraria, negli esercizi seguenti.

TABELLA III/1

TRONCO		
	$AC \ (0 \leq y \leq h)$	$CB \ (0 \leq z \leq l)$
N	$-\frac{qh^2}{2l} - \frac{pl}{2} - 1 \cdot \frac{h}{l} X$	$-qh + 0 - 1 \cdot X$
T	$0 + 0 - 1 \cdot X$	$+\frac{qh^2}{2l} + p\left(\frac{l}{2} - z\right) + 1 \cdot \frac{h}{l} X$
M	$-\frac{qy^2}{2} + 0 - 1 \cdot y X$	$-\frac{ql^2}{2}\left(1 - \frac{z}{l}\right) + \frac{plz}{2}\left(1 - \frac{z}{l}\right) - 1 \cdot h\left(1 - \frac{z}{l}\right) X$
$N.N_1$	$1 \cdot \left(\frac{qh^2}{2l} + \frac{pl}{2} + 1 \cdot \frac{h}{l} X\right) \frac{h}{l}$	$1 \cdot (qh + 1 \cdot X)$
$T.T_1$	$1^2 \cdot X$	$1 \cdot \left[\frac{qh^2}{2l} + p\left(\frac{l}{2} - z\right) + 1 \cdot \frac{h}{l} X\right] \frac{h}{l}$
$M.M_1$	$1 \cdot \left(\frac{qy^2}{2} + 1 \cdot y X\right) y$	$1 \cdot h\left(\frac{qh^2}{2} - \frac{plz}{2} + 1 \cdot h X\right)\left(1 - \frac{z}{l}\right)^2$

guenti; qui intendiamo tener conto di tutte e tre le caratteristiche, per dare la soluzione del problema nella sua forma completa, salvo a vederne poi le successive semplificazioni, trascurando in un primo tempo

il taglio — ciò che è lecito a priori in quasi tutti i casi — e in un secondo tempo anche lo sforzo normale.

Le leggi esplicite dei prodotti NN_1 , MM_1 e TT_1 da integrare, secondo la (4), lungo il contorno del portale, sono pertanto, in base agli elementi sopra stabiliti, quelle indicate nella Tabella III.

Spezzando i tre integrali che figurano al secondo membro della (4) ai due tratti del contorno — il ritto e l'architrave, di sezione e di momento di inerzia A_1 , J_1 e rispettivamente A_2 , J_2 — l'equazione di elasticità che vale a determinare la X è in definitiva:

$$\begin{aligned} 1.\delta = 1. \left[\int_0^h \frac{1}{EA_1} \left(\frac{qh^2}{2l} + \frac{pl}{2} + 1 \cdot \frac{h}{l} X \right) \frac{h}{l} dy + \int_0^l \frac{1}{EA_2} (qh + 1X) dz + \right. \\ \left. + \int_0^h \chi \cdot \frac{1}{GA_1} (1.X) dy + \int_0^l \chi \cdot \frac{1}{GA_2} \left[\frac{qh^2}{2l} + p \left(\frac{l}{2} - z \right) + 1 \cdot \frac{h}{l} X \right] \frac{h}{l} dz + \right. \\ \left. + \int_0^h \frac{1}{EJ_1} \left(\frac{qy^2}{2} + 1yX \right) y dy + \int_0^l \frac{1}{EJ_2} h \left(\frac{qh^2}{2} - \frac{plz}{2} + 1 \cdot hX \left(1 - \frac{z}{l} \right) \right) dz \right]. \end{aligned}$$

Eseguendo le facili integrazioni e risolvendo per $1.X$, si ottiene in modo rapido la soluzione generale:

$$(a) 1.X = \frac{\left\{ \frac{1}{E} \left[\frac{1}{A_1} \left(\frac{qh^4}{2l^2} + \frac{pl^2}{2} \right) + \frac{qlh}{A_2} \right] + \frac{\chi}{G} \frac{qh^3}{2lA_2} + \frac{1}{E} \left[\frac{qh^4}{8J_1} + \frac{lh}{6J_2} \left(qh^2 - \frac{1}{4} pl^2 \right) \right] \right\}}{\frac{1}{E} \left(\frac{h^3}{A_1 l^2} + \frac{l}{A_2} \right) + \frac{\chi h}{G} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{h}{lA_2} \right) + \frac{h^2}{3E} \left(\frac{h}{J_1} + \frac{l}{J_2} \right)}.$$

In essa si riconoscono palesemente i termini che tengono conto del contributo della forza normale, del taglio e del momento flettente; trascurare il taglio equivale pertanto a eliminare a numeratore e a denominatore della (a) i termini contenenti la rigidezza GA , e la soluzione prende la forma:

$$(b) 1.X = \frac{\delta - \frac{1}{E} \left[\frac{1}{A_1} \left(\frac{qh^4}{2l^2} + \frac{pl^2}{2} \right) + \frac{qlh}{A_2} + \frac{qh^4}{8J_1} + \frac{lh}{6J_2} \left(qh^2 - \frac{1}{4} pl^2 \right) \right]}{\frac{1}{E} \left(\frac{h^3}{A_1 l^2} + \frac{l}{A_2} \right) + \frac{h^2}{3E} \left(\frac{h}{J_1} + \frac{l}{J_2} \right)};$$

prescindere, oltrechè da T , anche da N , equivale in

modo analogo a eliminare ulteriormente nella (b) i termini in cui figura la rigidezza a forza normale EA , e la soluzione si semplifica viepiù nella seguente:

$$(c) \quad 1.X = \frac{\delta - \frac{1}{E} \left[\frac{qh^4}{8J_1} + \frac{lh}{6J_2} \left(qh^2 - \frac{1}{4} pl^2 \right) \right]}{\frac{h^2}{3E} \left(\frac{h}{J_1} + \frac{l}{J_2} \right)}.$$

Questa è dunque la soluzione di prima approssimazione, quella cioè relativa al contributo del solo momento flettente, e, come avvertito di sopra, è di solito sufficiente per l'indagine statico-elastica del sistema.

Tale soluzione, per la sua maggiore snellezza formale nei confronti delle due precedenti, si presta a utili considerazioni; separiamovi, a tanto, i termini relativi ai carichi q e p , scrivendola nella forma:

$$(c') \quad 1.X = \frac{\delta - \frac{h^3}{2E} \left(\frac{h}{4J_1} + \frac{l}{3J_2} \right) \cdot q + \frac{hl^3}{24EJ_2} \cdot p}{\frac{h^2}{3E} \left(\frac{h}{J_1} + \frac{l}{J_2} \right)}.$$

Per vedere, di più, come incida l'imperfezione del vincolo, supponiamo in un primo tempo $\delta = 0$, che cioè la cerniera A sia rigida; moltiplicandovi allora numeratore e denominatore per EJ_1 e posto $J_1/J_2 = \vartheta$, $\mu = l/h$, si perviene successivamente alla espressione quanto mai semplice:

$$(d) \quad 1.X = - \frac{h(\vartheta + \frac{1}{2}\mu\vartheta)}{8(1 + \mu\vartheta)} \cdot q + \frac{l\vartheta\mu^2}{8(1 + \mu\vartheta)} \cdot p = -k_q q + k_p p = X_q + X_p,$$

dove è ovvio il significato delle posizioni k_q e k_p .

Si riconosce da qui, com'è d'altronde intuitivo a priori, che i due tipi di carico impegnano i vincoli in senso inverso, dando origine: q ad una spinta X_q negativa, p ad una spinta X_p positiva; dipendentemente dai valori delle intensità p e q dei due carichi, qualora concorrano insieme, può dunque risultare $X \gtrless 0$.

Ciò capita, come si riconosce subito dalla (d), se-
condochè è:

$$\frac{p}{q} \geq \frac{3 + 4 \mu \vartheta}{\vartheta \mu^3}.$$

Tornando ora alla (c), che tiene conto della im-
perfezione del vincolo, si può dire che l'effetto dello
spostamento orizzontale δ è assimilabile ad un'azione:

$$(e) \quad X_{\delta} = \frac{\delta}{\frac{h^2}{3E} \left(\frac{h}{J_1} + \frac{l}{J_2} \right)},$$

da concepirsi come una forza, con lo stesso segno di δ ,
direttamente applicata nel punto A.

A tale forza fanno ulteriormente riscontrare nei vin-
coli le due reazioni verticali, uguali e di segno op-
posto:

$$A_{\delta} = \frac{h}{l} X_{\delta} = -B_{\delta}.$$

Nella fig. 3 a) b) c) sono indicati, corrispondentemen-
te, i diagrammi del momento nel sistema effettivo, in

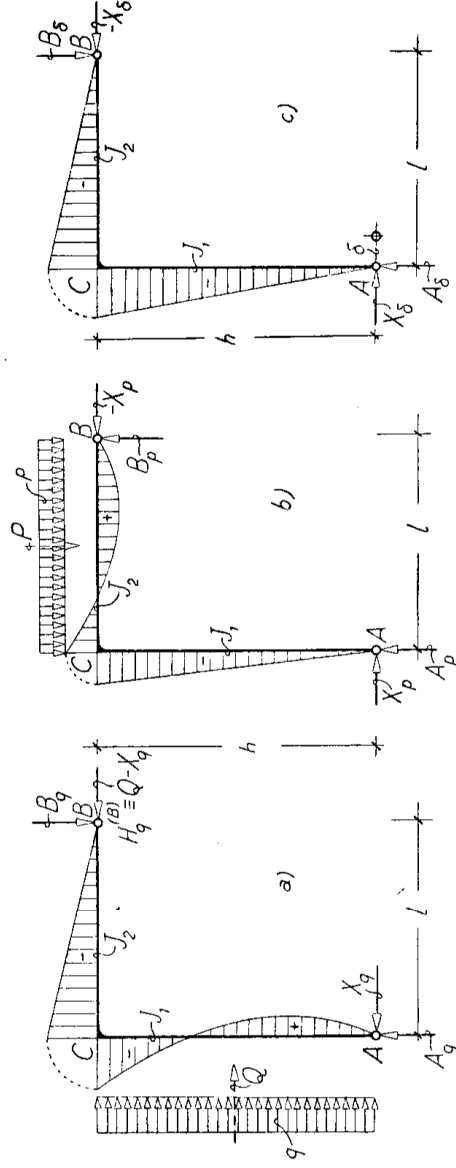


Fig. 3

dipendenza delle tre cause esterne distinte: il ca-
rico q , il carico p , e lo spostamento orizzontale δ del
punto di vincolo A.

La soluzione per le condizioni globali di carico e
di vincolo assegnate e il corrispondente diagramma dei
momenti, si otterrebbero ora in modo automatico so-
vrapponendo algebricamente i risultati sezione per se-
zione. Quanto alla X , che è dunque la somma:

$$X = X_q + X_p + X_{\delta},$$

si può osservare, come già sopra a proposito della X_q , che, in dipendenza dei valori specifici di q, p e δ , può risultare positiva, negativa o nulla.

Una volta determinata in valore e segno, le leggi effettive del momento lungo il portale si possono anche determinare, più comodamente, introducendola senz'altro nella terza riga della Tabella III.

Resa così esplicita la legge di M lungo il contorno del portale, si può individuare in ogni tronco la sezione pericolosa e verificarne la stabilità, in riguardo a un prefissato valore k del carico di sicurezza del materiale ⁽¹⁾.

Esercizio 2 — Studiare il portale ACB con lo schema di fig. 4 a), per le condizioni di carico ivi indicate e nell'ipotesi che i vincoli siano rigidi.



Quanto a schema e a condizioni di vincolo, il portale in esame è in tutto analogo a quello dell'Es. precedente; l'unica differenza sta nella sostituzione dell'architrave di allora con il tronco CB inclinato di α sull'orizzontale; può peraltro avere ancora la stessa destinazione di quello, e quindi le condizioni di carico indicate possono assimilare ancora l'azione del vento e della neve; soltanto, per la presenza dell'elemento di falda CB , il vento agisce ora globalmente in modo un pò diverso da prima; si conviene infatti, di solito ⁽²⁾, che il vento spiri in direzione orizzontale e che interessi normalmente, in modo diretto o indiretto, ogni superficie inclinata all'orizzontale, con intensità dipendente dalla inclinazione e dalla posizione della superficie stessa; propriamente, se q è la pressione sopra una parete verticale, si assume pari a una frazione cg quella sopra una parete inclinata,

⁽¹⁾ v. Magini, Es. di Sc. d. Costr., Vol. I Cap. IV Ed. C. Corsi 1948, Pisa.

⁽²⁾ v. Donato "Costruzioni", Parte II - Cap. II 4 - Ed. C. Corsi 1948, Pisa.

con $c (< 1)$ funzione dell'inclinazione α e diverso a seconda della posizione della parete rispetto al vento, vale a dire a seconda che questa risulta controvento o sottovento; nella quale seconda posizione entra in gioco una pressione negativa (*risucchio*); globalmente, la

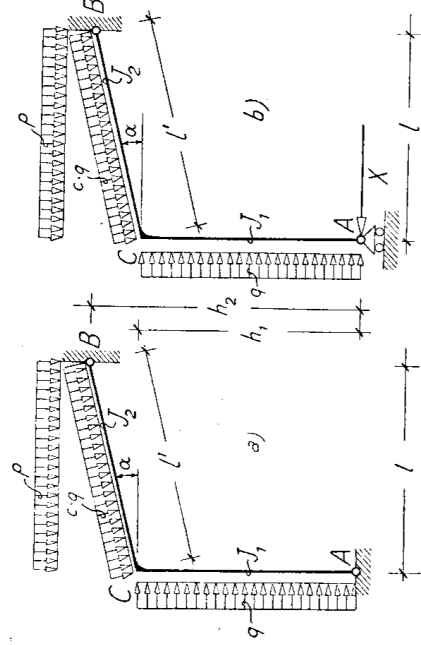


Fig. 4

azione del vento sul nostro schema si manifesta pertanto, com'è indicato in figura, mediante la pressione q sul ritto e quella cq sull'elemento di falda.

Come incognita iperstatica può ancora convenire di assumere la componente orizzontale X della reazione in A, riguardando quindi come sistema principale il portale con carrello scorrevole in A e cerniera fissa in B (fig. 4 b)).

Per la risoluzione del problema, si tratterà ancora, come all'Es. precedente e come in generale, di associare la deformazione effettiva, riguardata come virtuale, al sistema di forze-tensioni equilibrato che consegue nel sistema principale alla forza isolata $X = 1$.

Nel calcolo dei termini di carico N_0 , M_0 e T_0 che entrano, secondo le (5), nelle espressioni delle caratteristiche della sollecitazione, terremo ancora separati i contributi di q e di p .

La fig. 5 a), b) e c) mostra pertanto distinte queste due condizioni sul sistema principale e quella $X = 1$.

A tali condizioni seguono per i parametri A_0 , B_0 ed $H_0^{(B)}$ delle reazioni dei vincoli, le espressioni raccolte nella Tabella I; espressioni delle quali ci fermiamo qui a giustificare, perchè un pò più complesse, quelle relative all'azione di q .

Detti per questo: $Q = q h_1$ e $Q' = c q l' = \frac{c q l}{\cos \alpha}$ i carichi complessivi di vento sul ritto e sull'elemento incli-

nato, dalla equazione di equilibrio alla rotazione intorno a B :

$$A_{oq} l - Q \left(h_2 - \frac{h_1}{2} \right) - \frac{Q' l'}{2} = 0,$$

si ricava subito per A_{oq} l'espressione:

$$(a) \quad A_{oq} = \frac{1}{l} \left[Q \left(h_2 - \frac{h_1}{2} \right) + \frac{Q' l'}{2} \right].$$

È allora anche, per l'equilibrio alla traslazione verticale:

$$(b) \quad B_{oq} = Q' \cos \alpha - A_{oq} = Q' \cos \alpha - \frac{1}{l} \left[Q \left(h_2 - \frac{h_1}{2} \right) + Q' \frac{l'}{2} \right];$$

e infine, per l'equilibrio alla traslazione orizzontale:

$$(c) \quad H_{oq}^{(B)} = -Q - Q' \sin \alpha.$$

Si noti, altrimenti, che per parte di Q e della componente orizzontale $Q' \sin \alpha$ di Q' , le reazioni verticali in A e in B sono dello stesso valore e di segno

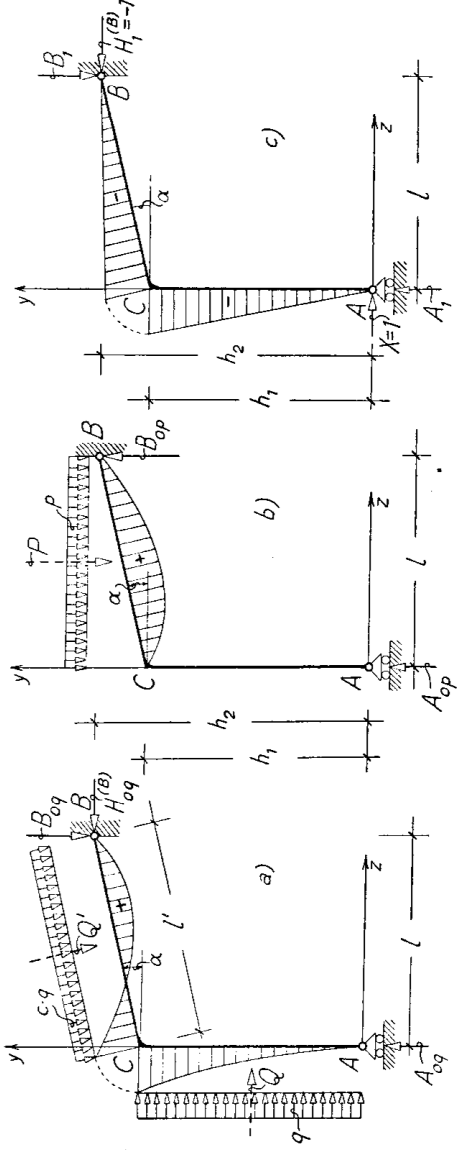


Fig. 5

opposto; pari precisamente, come scende subito esprimendo l'equilibrio alla rotazione intorno a B :

$$A'_{oq} = \frac{1}{l} \left[Q \left(h_2 - \frac{h_1}{2} \right) + Q' \sin \alpha \frac{h_2 - h_1}{2} \right] \equiv -B'_{oq};$$

per parte invece della componente verticale $Q' \cos \alpha$ di Q' , le due reazioni in A e in B , ovviamente verticali,

sono uguali e concordi, precisamente pari ciascuna alla metà di questa componente:

$$A''_{oq} = B''_{oq} = \frac{Q' \cos \alpha}{2}.$$

Sommando algebricamente i due contributi così determinati, si può allora anche scrivere:

$$(a') \quad A_{oq} = A'_{oq} + A''_{oq} = -\frac{1}{l} \left[Q \left(h_2 - \frac{h_1}{2} \right) + Q' \sin \alpha \frac{h_2 - h_1}{2} \right] + Q' \frac{\cos \alpha}{2}.$$

$$(b') \quad B_{oq} = B'_{oq} + B''_{oq} = -\frac{1}{l} \left[Q \left(h_2 - \frac{h_1}{2} \right) + Q' \sin \alpha \frac{h_2 - h_1}{2} \right] + Q' \frac{\cos \alpha}{2},$$

che si trasformano immediatamente nella (a) e nella (b), quando vi si introducano per $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ le espressioni:

$$\sin \alpha = \frac{h_2 - h_1}{l'}; \quad \cos \alpha = \frac{l}{l'}.$$

* * *

Ci siamo fermati a separare l'effetto delle forze orizzontali e verticali, per render ragione del prevedibile senso che spetta alla reazione B_{oq} ; mentre infatti le forze del primo tipo (che per l'intera altezza della struttura valgono $qh_1 + cq(h_2 - h_1) = q[h_1 + c(h_2 - h_1)]$) danno luogo a una B'_{oq} rivolta verso il basso, quelle del secondo tipo (che per la larghezza complessiva valgono cql) danno luogo a una B''_{oq} rivolta verso l'alto; a meno quindi di una struttura fortemente ribassata — come può capitare ad esempio per ampie tettoie di padiglioni da esposizione — è più probabile che preponderi l'effetto delle prime forze su quello delle seconde, e che pertanto la B_{oq} risulti rivolta verso il basso.

D'altronde è immediato giudicare, caso per caso, in funzione esplicita anche della inclinazione α , quando si presenti per B_{oq} un senso o l'altro, ovvero, eventualmente, quando il vincolo risulti scarico in direzione verticale ($B_{oq} = 0$).

Dalla (b), o dalla (b'), quando vi si introducano Q

e Q' in funzione di q, l, h_1 ed α , si deduce infatti per B_{oq} , dopo facili trasformazioni, l'espressione:

$$(b'') \quad B_{oq} = -q \left[\frac{h_1}{l} \left(\frac{h_1}{2} + l \operatorname{tg} \alpha \right) - \frac{cl}{2} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \right] .$$

Risulta allora $B_{oq} \gtrless 0$ secondochè:

$$\frac{h_1}{l} \left(\frac{h_1}{2} + l \operatorname{tg} \alpha \right) \gtrless \frac{cl}{2} (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) ,$$

cioè anche:

$$\frac{h_1}{l} \left[\frac{h_1}{l} + 2 \operatorname{tg} \alpha \right] \gtrless c (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) .$$

Tale relazione permette intanto di affermare che per inclinazioni $\alpha \geq 45^\circ$, per le quali il primo membro risulta sicuramente maggiore del secondo, è $B_{oq} < 0$; di ordinario però, nei nostri climi, è $\alpha < 45^\circ$ e più precisamente $\alpha < 30^\circ$; per un α assegnato in questi limiti, si può allora giudicare per quali valori del rapporto $\rho = \frac{h_1}{l}$ fra l'altezza del ritto e la luce del portale (*ribassamento*) risulti B_{oq} positivo, negativo o nullo, risolvendo in ρ la disuguaglianza:

$$\rho^2 + 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \rho - c (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \gtrless 0 ,$$

delle cui radici ha ovviamente significato per noi solo quella positiva:

$$\bar{\rho} = \operatorname{tg} \alpha \left[\sqrt{(1 - c) + c/\operatorname{tg}^2 \alpha} - 1 \right] .$$

Calcolato dunque che sia, in base al valore assegnato di α e a quello da assumere per c , questo ribassamento limite $\bar{\rho}$, si può senz'altro affermare che B_{oq} spierà verso l'alto (> 0), verso il basso (< 0) o sarà nullo, secondochè il ribassamento ρ della struttura in esame risulti:

$$\rho \gtrless \bar{\rho} .$$

I tre casi ora detti sono anche distinguibili, in modo forse più evidente, dal punto di vista geometrico.

Detta infatti K_0 (fig. 6) l'intersezione fra l'asse del ritto e l'orizzontale per B , è ovvio che risulterà $B_{0q} = 0$ se la risultante $\mathbf{R}$ di Q e di Q' , che passa per l'intersezione I degli assi geometrici (normali nei punti di mezzo) del ritto e dell'elemento di falda, passa per K_0 ; risulterà invece $B_{0q} > 0$ se la $\mathbf{R}$ passa per un punto K_+ posto sul ritto (linea di azione di A_{0q}) al di sopra di K_0 ; risulterà infine $B_{0q} < 0$ se l'intersezione fra $\mathbf{R}$ e il ritto cade in un punto K_- posto al di sotto di K_0 .

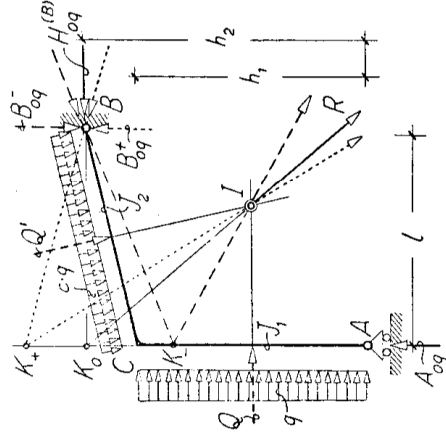


Fig. 6

* * *

Esprimendo in ogni caso nelle (a), (b) e (c) i carichi totali Q e Q' in funzione di q , di c e delle quote l , h_1 e h_2 del sistema, le tre componenti di reazione A_{0q} , B_{0q} e $H_{0q}^{(B)}$ prendono in definitiva le forme riportate nella Tabella I, insieme a quelle relative alle altre due condizioni di carico p e $X=1$, le quali non richiedono alcuna giustificazione speciale.

TABELLA I/2

Parametri delle reazioni dei vincoli	Condizione di carico		
	q	p	$X = 1$
A_0	$q \left\{ \frac{h_1}{l} \left(h_2 - \frac{h_1}{2} \right) + \frac{cl}{2} \left[1 + \left(\frac{h_2 - h_1}{l} \right)^2 \right] \right\}$	$+\frac{pl}{2}$	$+\frac{h_2}{l}$
B_0	$q \left\{ \frac{h_1}{l} \left(h_2 - \frac{h_1}{2} \right) - \frac{cl}{2} \left[1 - \left(\frac{h_2 - h_1}{l} \right)^2 \right] \right\}$	$+\frac{pl}{2}$	$+\frac{h_2}{l}$
$H_0^{(B)}$	$-q [h_1 + c(h_2 - h_1)]$	0	-1

Con riguardo a queste tre condizioni di carico sul sistema principale, e supponendo per la prima $B_{0q} < 0$, la fig. 5 a) b) e c) mostra i corrispondenti diagrammi del momento flettente; nei tre casi, tale caratteristica varia sul ritto e sull'elemento di falda secondo le

leggi sintetiche indicate nelle prime tre righe della Tabella II/2, leggi che sono state scritte riferendoci costantemente alle forze alla sinistra, a partire sempre dall'estremo A.

TABELLA II/2

Caratteristiche	TRONCO	
	AC ($0 \leq y \leq h_1$)	CB ($0 \leq z \leq l$)
M_{0q}	$-\frac{qy^2}{2}$	$-qh_1\left(\frac{h_1}{2} + ztg\alpha\right) + A_{0q}z - \frac{cqz^2}{2}(1 + t g^2\alpha)$
M_{0p}	0	$+\frac{pz^2}{2}(1-z)$
M_1	$-1 \cdot y$	$-1 \cdot (h_1 + ztg\alpha) + 1 \cdot \frac{h_2}{2}z = -1 \cdot \frac{h_1}{l}(1-z)$
M	$-\frac{qy^2}{2} + 0 - 1 \cdot yX$	$-qh_1\left(\frac{h_1}{2} + ztg\alpha\right) + A_{0q}z - \frac{cqz^2}{2}(1 + t g^2\alpha) + \frac{pz^2}{2}(1-z) +$ $-1 \cdot \frac{h_1}{l}(1-z)X$
MM_1	$+1\left[\frac{qy^2}{2} + 1 \cdot yX\right]y$	$1 \cdot \left[qh_1\left(\frac{h_1}{2} + ztg\alpha\right) - A_{0q}z + \frac{cqz^2}{2}(1 + t g^2\alpha) - \frac{pz^2}{2}(1-z) +\right.$ $\left.+ 1 \cdot \frac{h_1}{l}(1-z)X\right]\frac{h_1}{l}(1-z)$

Le leggi effettive di M sui due tronchi per la condizione complessiva di carico, e quelle del prodotto MM_1 da integrare, ai sensi dell'equazione (4), lungo il contorno, sono infine indicate, ancora in forma sintetica, nelle ultime due righe della stessa Tabella.

Abbiamo trascurato volutamente le altre due caratteristiche della sollecitazione (N e T), da un lato per non complicare ulteriormente gli sviluppi formali, dall'altro perchè, come già avvertito all'Esercizio I, è sufficiente di solito tener conto del solo momento flettente.

Introducendo allora, in quest'ordine di approssimazione, nel secondo membro della (4) le leggi trovate di sopra per MM_1 ed osservando che, per l'ipotesi della rigidità dei vincoli, il primo membro della medesima risulta nullo - tale essendo, nel sistema effettivo, lo spostamento orizzontale η della cerniera A in cui è stata introdotta l'iperstatica X - a determinare tale incognita si ha in definitiva l'equazione:

$$0 = \int_0^{h_1} \frac{1}{EJ_1} \left(\frac{qy^2}{2} + 1.yX \right) y dy + \int_0^l \frac{1}{EJ_2} \left[qh_1 \left(\frac{h_1}{2} + ztg\alpha \right) - A_{oq}z + \right. \\ \left. + \frac{cqz^2}{2} (1 + tg^2\alpha) - \frac{pz}{2} (l-z) + 1.\frac{h_1}{l} (l-z) X \right] \frac{h_1}{l} (l-z) dz ,$$

dove si sono indicate con EJ_1 ed EJ_2 le flessorrigidezze del ritto e dell'elemento di falda.

Eseguendo le facili integrazioni, sostituendo alla reazione A_{oq} — qui conservata, per ragioni di ingombro, nella sua notazione sintetica — l'espressione fornita dalla Tabella I/2, o la sua equivalente in funzione di $tg\alpha$, cioè:

$$A_{oq} = q \left[\frac{h_1}{l} \left(h_2 - \frac{h_1}{2} \right) + \frac{cl}{2} (1 + tg^2\alpha) \right] ;$$

moltiplicando quindi i due membri per EJ_1 e posto $\vartheta = J_1/J_2$, si riconosce facilmente per la equazione la soluzione:

$$(a) \quad 1.X = - \frac{h_1^2 (3h_1 + 4\vartheta l) - c\vartheta l^2 (1 + tg^2\alpha)}{8h_1 (h_1 + \vartheta l)} q + \frac{\vartheta l^3}{8h_1 (h_1 + \vartheta l)} p = X_q + X_p ,$$

nella quale si è avuto cura di separare espressamente i contributi X_q e X_p di q e di p .

Ancora come nell'Esercizio precedente, si riconosce che il vento e la neve influiscono sui vincoli in senso opposto.

La fig. 7a) e b) mostra l'andamento del diagramma dei momenti effettivi per queste due condizioni di carichi isolate.

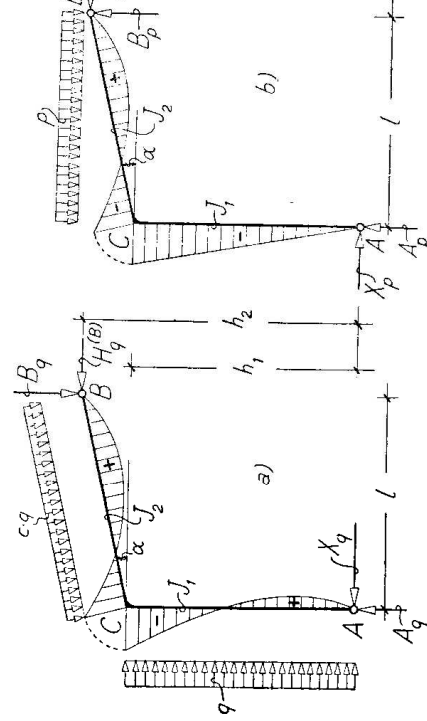


Fig. 7

Per quanto riguarda invece la condizione completa, si hanno più semplicemente le leggi di M sui due tronchi, una volta nota in valore e segno la X , introducendo

dola nella quarta riga della Tabella II; oltrechè tracciare il diagramma effettivo dei momenti, è allora possibile, in particolare, individuare in ciascuno dei tronchi la sezione di momento massimo, e giudicare quindi della relativa stabilità in base al prefissato valore k del carico di sicurezza del materiale.

La sezione in parola per il ritto è quella per cui $\frac{dM}{dy}=0$, cioè, per la legge di M di cui alla citata Tabella, quella di ordinata:

$$\bar{y} = -\frac{X}{q};$$

per l'elemento di falda è, in modo analogo, la sezione di ascissa $\bar{z}$ alla quale $\frac{dM}{dz}=0$, cioè, per la legge di M di cui alla stessa Tabella, quella per la quale è:

$$-Qtg\alpha + A_{oy} - \frac{cq}{\cos^2\alpha}\bar{z} + p\left(\frac{l}{2} - \bar{z}\right) + 1 \cdot \frac{h_1}{l}X = 0.$$

Sostituendo ivi a Q e ad A_{oy} le espressioni già utilizzate di sopra, e posto $\mu = \frac{h_1}{l}$, si ricava di seguito:

$$\bar{z} = \frac{q[h_1^2 + cl^2(1 + tg^2\alpha)] + pl^2 + 2h_1X}{2l[cq(1 + tg^2\alpha) + p]} = \frac{\cos^2\alpha[\mu qh_1 + pl + 2\mu X] + cql}{2(cq + p\cos^2\alpha)}.$$

Introdotti allora nelle espressioni di M per i due tronchi questi particolari valori di y e di z , si ricavano i rispettivi momenti massimi, in base ai quali è da condurre la verifica di stabilità dei due tronchi medesimi, sui valori noti dei loro momenti di inerzia J_1 ed J_2 .

Un caso particolare importante è quello per cui il ritto e l'elemento di falda hanno lo stesso momento di inerzia: $J_1=J_2=J$; la soluzione relativa a questo caso si deduce ovviamente dalla (a) facendovi $\vartheta=1$; per quanto riguarda la stabilità del sistema, è poi chiaro che basta verificarla per quella delle due sezioni ora dette che va soggetta al maggiore dei due massimi calcolati.