

CAPITOLO IV

IL METODO DEI COEFFICIENTI DI INFLUENZA

Si è avvertito nella «Premessa» che il metodo dei coefficienti di influenza è un metodo generale per la risoluzione dei sistemi iperstatici, alla stregua di quello basato sul principio dei l. v.; aggiungiamo ora che esso costituisce il modo più espressivo e più naturale di scrivere le equazioni di elasticità.

Tale metodo ha alle basi, da un lato il concetto di *coefficiente di influenza*, dall'altro il principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio o *principio di sovrapposizione degli effetti*.

Gli «effetti» che prende in esame sono solitamente spostamenti di punti o rotazioni di sezioni, e scrive le equazioni di elasticità imponendo, in tanti punti quante sono le incognite iperstatiche, la congruenza locale della deformazione; e ciò per un sistema comune vincolato, comunque caricato e in istato di coazione di qualsiasi natura.

Per bene intenderlo ed apprezzarne la naturale semplicità concettuale, sia S un sistema elastico n volte iperstatico, fra internamente ed esternamente, soggetto a date forze P ; per una certa scelta del sistema principale S_0 , si riguardino le corrispondenti n incognite iperstatiche $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$ come forze esplicite, al pari delle P : una condizione globale perchè queste incognite equivalgano staticamente ai vincoli rimossi, è palesemente quella che il sistema principale così caricato si deformi nell'identico modo del sistema effettivo, rispettando in particolare tutte

quelle restrizioni che imponevano a quest'ultimo i vincoli rimossi.

Per tradurre formalmente tale condizione globale, si fissi l'attenzione sul punto di applicazione i della X_i generica, e ne sia η_i lo spostamento nel sistema effettivo secondo la X_i stessa.

Al riguardo si osservi che η_i risulta certamente nullo quando rappresenta lo spostamento di un punto vincolato in modo rigido, e quando ha il significato di spostamento relativo di due punti contigui di S_0 resi indipendenti dalla sconnessione che ha annullata, e quindi introdotta, la X_i ; è invece in generale diverso da zero quando dipende da una variazione di temperatura, da un difetto di montaggio o di costruzione, da un cedimento vincolare, ecc., cioè, in genere, da uno stato di coazione.

Qualunque siano l'origine e la natura di η_i , noi lo riguarderemo sempre come una quantità nota del problema: se è nullo, perchè tale; se non è nullo, o perchè misurabile, in sede di verifica della struttura, o perchè in qualche modo preventivabile, in sede di progetto.

Ciò posto, la suddetta condizione nei confronti del punto i è da intendersi nel senso che, nel sistema principale S_0 , caricato dalle forze esplicite P , dalle iperstatiche X_k e soggetto a tutte le cause che determinano lo stato di coazione nel sistema effettivo, tale punto subisca ancora secondo la X_i lo spostamento η_i .

Se dunque si esprime nel sistema S_0 lo spostamento $\eta_i^{(w)}$ del punto i in funzione di tutte le cause note sudette (i carichi P , i cedimenti, la variazione termica, ecc.) e delle iperstatiche X_k , e si uguaglia l'espressione ottenuta al valore noto η_i , si ottiene una equazione fra le X_k , che costituisce l'equazione i^{sima} di elasticità.

Ora, l'espressione di $\eta_i^{(w)}$ nel sistema principale può essere ottenuta nel modo più semplice e naturale separando le varie cause e sommando quindi gli effetti.

Di queste cause, quelle che inducevano lo stato di coazione nel sistema effettivo, sono ora, come tali, rimosse dal sistema principale, nel senso che un cedi-

mento di vincolo, una variazione termica, ecc. non influenzano lo stato di tensione di tale sistema; compotano però bensì, in generale, un contributo non nullo nello spostamento del punto i ; limitandoci ai due tipi di cause ora elencate e separando, come detto, i contributi, indicheremo con η_{ic} quello dovuto ai cedimenti, con η_{it} quello dovuto alla variazione di temperatura. Quanto alla loro determinazione, è evidente che per η_{ic} bastano semplici considerazioni di cinematica elementare, e che anche per η_{it} la cosa è immediata quando siano noti il coefficiente di dilatazione termica α del materiale e la legge con cui avviene lo sbalzo di temperatura.

Se indichiamo inoltre con η_{ir} e η_{ix} i contributi del complesso dei carichi espliciti e delle iperstatiche, la condizione di congruenza nel punto i di cui dicevamo più sopra, si traduce nella forma sintetica:

$$(a) \quad \eta_i = \eta_{ic} + \eta_{it} + \eta_{ir} + \eta_{ix}.$$

È nella determinazione dei contributi η_{ir} e η_{ix} che entrano in gioco i coefficienti di influenza; il termine η_{ir} , che tiene conto, come detto, del complesso dei carichi espliciti, può infatti riguardarsi a sua volta come somma algebrica dei contributi dei singoli carichi P_r , agenti nelle varie sezioni r ; allo stesso modo quello η_{ix} , che tiene conto del complesso delle iperstatiche, può esserlo come somma algebrica dei contributi delle singole X_k , agenti nelle varie sezioni k .

D'altra parte, per la proporzionalità fra causa ed effetto, il contributo della singola P_r risulta P_r volte quello, che diremo η_{ir} , dovuto a una $P_r = 1$ nella stessa sezione r ; così come il contributo della singola X_k risulta X_k volte quello, che diremo η_{ik} , dovuto a una $X_k = 1$ nella stessa sezione k .

Estendendo la somma a tutte le forze P_r e rispettivamente alle n iperstatiche X_k , la (a) assume ora questa altra forma simbolica:

$$(a') \quad \eta_i = \eta_{ic} + \eta_{it} + \sum_r \eta_{ir} P_r + \sum_{k=1}^n \eta_{ik} X_k.$$

Le quantità η_{ir} e η_{ik} prendono il nome di *coefficienti di in-*

fluenza, e hanno dunque il significato di *contributo specifico* della forza generica P_r e rispettivamente della iperstatica generica X_k nel movimento del punto i .

Per dare alla (a') una forma più raccolta, indichiamo con:

$$(b) \quad \eta_{ia} = \eta_{ic} + \eta_{it} ,$$

la somma dei contributi dei cedimenti e della variazione di temperatura, a significare così nel complesso il *contributo delle autotensioni*; inoltre con:

$$(c) \quad \eta_{io} = \sum_r \eta_{ir} P_r ,$$

il contributo globale dei carichi espliciti.

La (a') diviene allora in definitiva:

$$(a'') \quad \eta_i = \eta_{ia} + \eta_{io} + \sum_{k=1}^n \eta_{ik} X_k .$$

Di siffatte equazioni, facendo variare i da 1 ad n , se ne ottengono n ; esse prendono il nome di equazioni di *Müller-Breslau*.

Secondo la (a'), ovvero le (c) ed (a''), per scrivere le equazioni di elasticità di un problema iperstatico — così come, ovviamente, per studiare la deformazione di un sistema elastico una volta risolto — non c'è che da calcolare i coefficienti di influenza η_{ir} e η_{ik} ; ciò che, si noti, si fa in modo uniforme e ricorrente esplorando il sistema principale con una forza o una coppia unitaria (*carico di esplorazione*) applicata volta a volta al posto di una P_r o di una X_k .

Quanto al calcolo effettivo di questi coefficienti, è poi appena necessario avvertire che esso può essere condotto con uno qualunque dei metodi a disposizione, e pertanto, anche, volta a volta il più adatto: la teoria elementare delle travi inflesse; il principio dei l.v.; il teorema di Castigliano; l'ellisse di elasticità; ecc..

Da questo punto di vista, i principi ora ricordati acquistano il carattere di mezzi di calcolo ausiliari, non più con fine a se stessi come metodi di risoluzione; c'è anzi da notare in proposito che, proprio per questo compito ristretto e per il fatto che si opera comunque

sopra un sistema isostatico, anche i metodi che, come il Teorema di Castigliano, sono applicabili alla risoluzione iperstatica con qualche accorgimento e limitazione, acquistano qui validità generale.

Si noti infine che nella (a'), o nelle (c) ed (a''), le quantità P_r e X_k sono adimensionali, rappresentando nient'altro che le intensità dei carichi e delle iperstatiche.

Esercizio 46 — Risolvere la trave di fig. 72a) nell'ipotesi che l'incastro subisca un cedimento angolare α e contemporaneamente l'appoggio B un cedimento verticale η_B , ambedue di tipo anelastico.

Il sistema è una volta iperstatico esternamente.

Come sistema principale può essere scelta indifferente la mensola che si ottiene rimuovendo l'appoggio in B (fig. 72b)), e quindi *ruotata di α* sull'orizzontale; ovvero la trave semplice con appoggi *non* di livello, che si ottiene sostituendo in luogo dell'incastro A una cerniera fissa (fig. 72c)): nel primo caso viene introdotta come incognita iperstatica la reazione X del carrello rimosso; nel secondo il momento di incastro X'.

L'equazione di elasticità per i due casi si scrive sostanzialmente allo stesso modo; salvo ad esprimere:

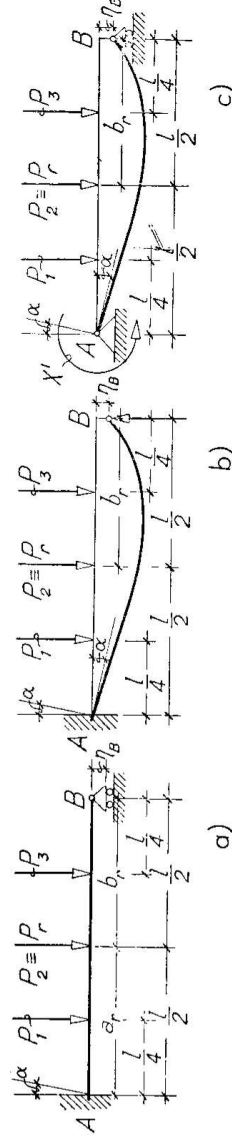


Fig. 72

nel primo caso, che lo spostamento verticale della mensola di fig. 72b) — spostamento nel quale hanno parte la rotazione α della sezione d'incastro, i carichi P_r e la iperstatica X — deve risultare uguale a η_B ; nel secondo caso, invece, che la rotazione della sezione A

sull'appoggio nella trave semplice AB di fig. 72c) — rotazione nella quale hanno parte la differenza di quota η_B fra i due appoggi, i carichi P_r e la iperstatica X' — deve risultare uguale ad α .

In simboli, e con ovvio significato, nel primo caso:

$$(1) \quad \eta_B = (\eta_\alpha + \eta_P + \eta_X)_B ;$$

nel secondo:

$$(2) \quad \alpha = (\alpha_{\eta_B} + \alpha_P + \alpha_{X'})_A .$$

Si tratta di rendere espliciti questi singoli contributi.

Per quanto riguarda quelli dovuti ai cedimenti anelastici, da semplici considerazioni cinematiche risulta in modo immediato:

$$(a) \quad \eta_\alpha = \alpha l \quad ; \quad \alpha_{\eta_B} = \frac{\eta_B}{l} .$$

Per quelli dei carichi espliciti, detti nei due casi η_{Br} e α_{Ar} i relativi coefficienti di influenza, è invece;

$$(b) \quad \eta_P = \sum_r^3 \eta_{Br} P_r \quad ; \quad \alpha_P = \sum_r^3 \alpha_{Ar} P_r .$$

Finalmente, per il contributo della rispettiva iperstatica, detto corrispondentemente η_{BB} ed $\alpha_{A,1}$ il relativo coefficiente di influenza, è:

$$(c) \quad \eta_X = \eta_{BB} X \quad ; \quad \alpha_{X'} = \alpha_{A,1} X' .$$

Con ciò le (1) e (2) prendono queste altre forme:

$$(1') \quad \eta_B = \alpha l + \sum_r^3 \eta_{Br} P_r + \eta_{BB} X ;$$

$$(2') \quad \alpha = \frac{\eta_B}{l} + \sum_r^3 \alpha_{Ar} P_r + \alpha_{A,1} X' .$$

Per esprimere qui i vari coefficienti di influenza, ci varremo, dato il particolare tipo di struttura, della teoria elementare delle travi inflesse.

Il significato di η_{Br} e di η_{BB} è infatti quello di freccia di una mensola caricata in una sezione intermedia, quella dove agisce il carico P_r , ovvero all'estremo libero dalla forza uno.

Con le notazioni di fig. 72b), e dette η_{rr} ed α_r l'inflexione e la rotazione sotto al carico, è allora notoriamente e di seguito:

$$\eta_{rr} = \eta_{rr} + \alpha_r b_r = \frac{1 \cdot a_r^3}{3EJ} + \frac{1 \cdot a_r^2}{2EJ} b_r = \frac{a_r^2(2l + b_r)}{6EJ} ;$$

da cui anche, in particolare, per $a_r = l$, $b_r = 0$: $\eta_{rr} = \frac{l^3}{3EJ}$.

In modo analogo, con le stesse notazioni, ricordiamo che α_{rr} , cioè la rotazione della sezione sull'appoggio nella trave semplice per il carico $P_r = 1$, è:

$$\alpha_{rr} = \frac{1 \cdot b_r(l^2 - b_r^2)}{6EJl} ; \quad \left| \beta_{rr} = \frac{1 \cdot a_r(l^2 - a_r^2)}{6EJl} \right| ,$$

e che α_{rr} , cioè la rotazione della sezione A per un momento $M=1$ nella stessa sezione, vale:

$$\alpha_{rr} = \frac{1 \cdot l}{3EJ} .$$

Sostituendo nelle (1') e (2') e osservando che con i segni previsti per X e per X' nelle figg. 72b) e c), i relativi contributi risultano di segno opposto a quelli dei corrispondenti coefficienti di influenza dati di sopra, si ha nel primo modo l'equazione:

$$(1'') \quad \eta_{rr} = \alpha l + \sum_r \frac{a_r^2(2l + b_r)}{6EJ} P_r - \frac{l^3}{3EJ} X ;$$

nel secondo:

$$(2'') \quad \alpha = \frac{\eta_{rr}}{l} + \sum_r \frac{b_r(l^2 - b_r^2)}{6EJl} P_r - \frac{l}{3EJ} X' ;$$

da queste si deduce subito, rispettivamente:

$$(d) \quad X = \frac{3EJ}{l^3} (\alpha l - \eta_{rr}) + \frac{1}{2l^3} \sum_r a_r^2 (2l + b_r) P_r ;$$

$$(e) \quad X' = \frac{3EJ}{l} \left(\frac{\eta_{rr}}{l} - \alpha \right) + \frac{1}{2l^2} \sum_r b_r (l^2 - b_r^2) P_r .$$

Per una riprova della soluzione nei due casi, basterebbe per es. provare che nel primo caso il momento d'incastro M_A nella mensola caricata dai carichi P_r e dalla X con l'espressione (d), risulta proprio uguale

ad X' con l'espressione (c) [o viceversa, nel secondo caso, che partendo da X' si perviene ad X]; è infatti di seguito, osservando che $b_r = l - a_r$, ovvero $a_r = l - b_r$:

$$\begin{aligned} M_1 = Xl - \sum P_r a_r &= \frac{3EJ}{l^2} (\alpha l - \eta_B) + \frac{1}{2l^2} \sum a_r^2 (2l + b_r) P_r - \sum P_r a_r = \\ &= \frac{3EJ}{l} \left(\alpha - \frac{\eta_B}{l} \right) - \frac{1}{2l^2} \sum P_r b_r (l^2 - b_r^2) = -X', \end{aligned}$$

che è appunto quanto volevamo provare, essendo anche ovvia la ragione del cambiamento di segno.

Esercizio 47 — Risolvere la trave continua simmetrica a tre campate di fig. 73 a), gravata da quattro carichi concentrati in posizione pure simmetrica, nelle tre seguenti ipotesi per quanto riguarda i vincoli:

a) che gli appoggi siano rigidi e di livello (fig. 73 a));

b) che gli appoggi centrali C_1 e C_2 subiscano i cedimenti anelastici δ_1 e δ_2 (fig. 73 b));

c) che gli stessi appoggi C_1 e C_2 siano costituiti da due pendoli elastici di uguale lunghezza h e uguale sezione Ω (fig. 73 c)).

—♦—

Si ricorda che la trave continua, quando è semplicemente appoggiata agli estremi, è tante volte iperstatica per quanti sono i suoi appoggi intermedi.

Un mezzo specifico di risoluzione di questa struttura è notoriamente costituito dalla equazione dei tre momenti ⁽¹⁾, la quale nasce scegliendo come incognite iperstatiche i momenti sugli appoggi, cioè come sistema principale l'insieme di altrettante travi semplici indipendenti per quante sono le luci della trave continua, e imponendo che le rotazioni delle sezioni terminali delle due travi contigue sull'appoggio C_m generico siano uguali ed opposte; in simboli $\alpha_{m+1} + \beta_m = 0$.

Possono però essere scelte come incognite le reazioni degli stessi appoggi intermedi, rimuovendo que-

⁽¹⁾ Per la sua applicazione v. Magini: Esercizi di Sc. delle Costr., Vol. I - Ediz. C. Cursi - Pisa - Pag. 159.

sti ultimi e assumendo quindi come sistema principale la trave semplicemente appoggiata agli estremi. Con

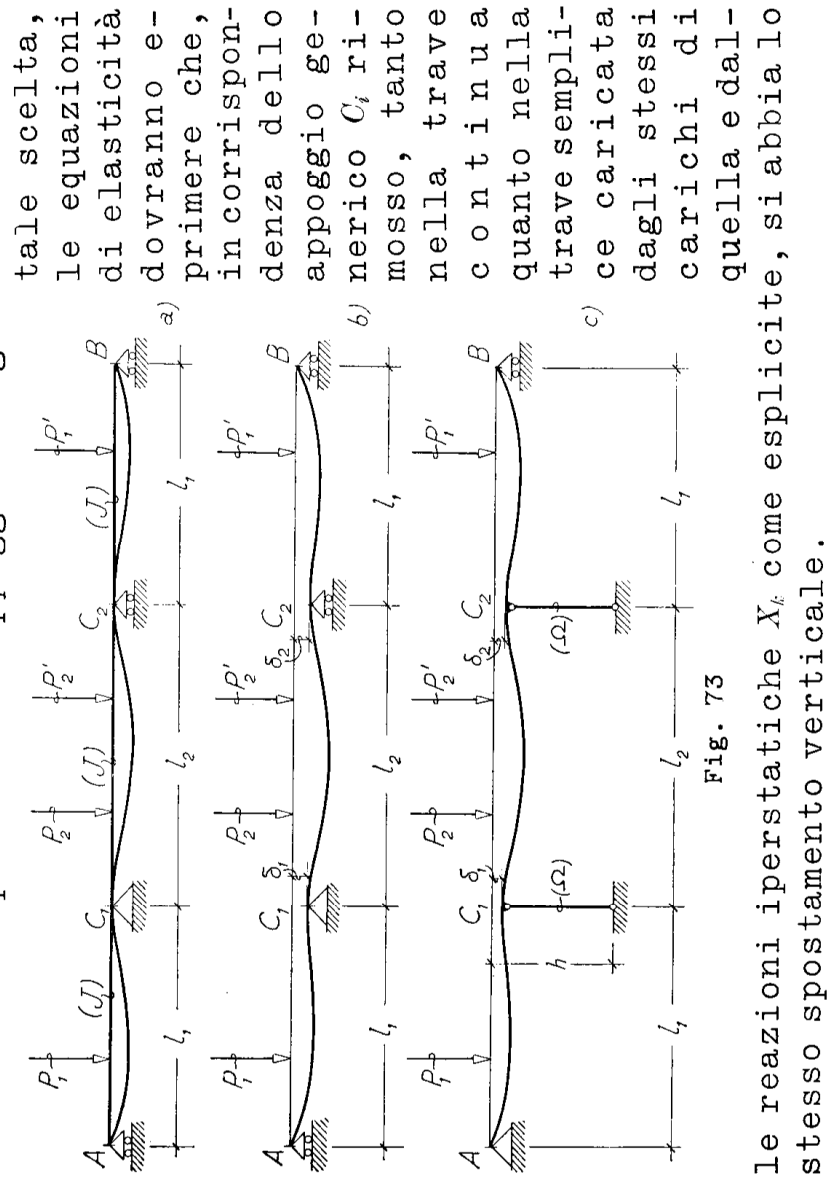


Fig. 73

le reazioni iperstatiche X_k come esplicite, si abbia lo stesso spostamento verticale.

Nel caso nostro, le tre diverse ipotesi di vincolo fatte all'enunciato possono essere studiate formalmente tutte insieme, mettendo

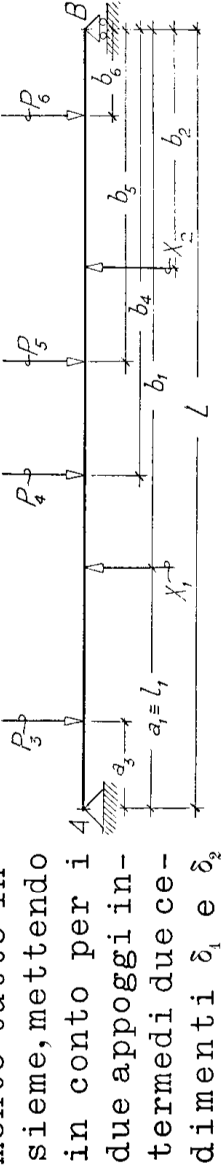


Fig. 74

supponendoli poi una volta uguali a zero, per avere il caso dei vincoli rigidi, una volta di tipo elastico, per avere il caso dei pendoli.

Nella detta condizione, numerando per comodità di notazioni i carichi di seguito alle incognite (fig. 74), le due equazioni di elasticità occorrenti si scriveranno per disteso:

$$(a) \quad \begin{cases} \delta_1 = \eta_{111} X_1 + \eta_{112} X_2 + \eta_{113} P_3 + \eta_{114} P_4 + \eta_{115} P_5 + \eta_{116} P_6 \\ \delta_2 = \eta_{221} X_1 + \eta_{222} X_2 + \eta_{223} P_3 + \eta_{224} P_4 + \eta_{225} P_5 + \eta_{226} P_6, \end{cases}$$

dove i coefficienti di influenza η_{ik} hanno il noto significato.

La simmetria del sistema e il Teorema di Maxwell portano intanto alle seguenti coincidenze:

$$\eta_{21} = \eta_{12} \quad ; \quad \eta_{32} = \eta_{11} \quad ; \quad \eta_{23} = \eta_{16} \quad ; \quad \eta_{24} = \eta_{15} \quad ; \quad \eta_{25} = \eta_{14} \quad ; \quad \eta_{26} = \eta_{13} \quad ,$$

in base alle quali le (a) divengono:

$$(a') \quad \begin{cases} \delta_1 = \eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2 + \eta_{13} P_3 + \eta_{14} P_4 + \eta_{15} P_5 + \eta_{16} P_6 \\ \delta_2 = \eta_{12} X_1 + \eta_{11} X_2 + \eta_{16} P_3 + \eta_{15} P_4 + \eta_{14} P_5 + \eta_{13} P_6 \end{cases}$$

Da queste, sommando e sottraendo, si deduce subito nella somma e nella differenza delle due incognite il sistema:

$$(b) \quad \begin{cases} X_1 + X_2 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{\eta_{11} + \eta_{12}} = \frac{(P_3 + P_6)(\eta_{13} + \eta_{16}) + (P_4 + P_5)(\eta_{14} + \eta_{15})}{\eta_{11} + \eta_{12}} \\ X_1 - X_2 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\eta_{11} - \eta_{12}} = \frac{(P_3 - P_6)(\eta_{13} + \eta_{16}) + (P_4 - P_5)(\eta_{14} + \eta_{15})}{\eta_{11} - \eta_{12}} \end{cases}$$

dalle quali, ancora per somma e differenza, si ricava la soluzione generale:

$$(1) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\eta_{11}\delta_1 - \eta_{12}\delta_2}{\eta_{11}^2 - \eta_{12}^2} = \frac{(\eta_{11}P_3 - \eta_{12}P_6)(\eta_{13} + \eta_{16}) + (\eta_{11}P_4 - \eta_{12}P_5)(\eta_{14} + \eta_{15})}{\eta_{11}^2 - \eta_{12}^2} \\ X_2 = \frac{\eta_{11}\delta_2 - \eta_{12}\delta_1}{\eta_{11}^2 - \eta_{12}^2} = \frac{(\eta_{11}P_6 - \eta_{12}P_3)(\eta_{13} + \eta_{16}) + (\eta_{11}P_5 - \eta_{12}P_4)(\eta_{14} + \eta_{15})}{\eta_{11}^2 - \eta_{12}^2} \end{cases}$$

Sempre con δ_1 e δ_2 generici, si deducono da qui immediatamente le soluzioni per tutti i possibili casi particolari.

Così per carico simmetrico: $P_3 = P_6 = P$; $P_4 = P_5 = Q$, risulta:

$$(2) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\eta_{11}\delta_1 - \eta_{12}\delta_2}{\eta_{11}^2 - \eta_{12}^2} = \frac{P(\eta_{13} + \eta_{16}) + Q(\eta_{14} + \eta_{15})}{\eta_{11} + \eta_{12}} \\ X_2 = \frac{\eta_{11}\delta_2 - \eta_{12}\delta_1}{\eta_{11}^2 - \eta_{12}^2} = \frac{P(\eta_{13} + \eta_{16}) + Q(\eta_{14} + \eta_{15})}{\eta_{11} + \eta_{12}} \end{cases} ;$$

più in particolare ancora, se i carichi sono tutti uguali, cioè $P = Q$:

$$(2') \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\eta_{11}\delta_1 - \eta_{12}\delta_2}{\eta_{11}^2 - \eta_{12}^2} = \frac{P(\eta_{13} + \eta_{14} + \eta_{15} + \eta_{16})}{\eta_{11} + \eta_{12}} \\ X_2 = \frac{\eta_{11}\delta_2 - \eta_{12}\delta_1}{\eta_{11}^2 - \eta_{12}^2} = \frac{P(\eta_{13} + \eta_{14} + \eta_{15} + \eta_{16})}{\eta_{11} + \eta_{12}} \end{cases}$$

Se, oltre alla simmetria o alla uguaglianza dei carichi, fossero uguali anche i cedimenti: $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, le (2) e (2') si cambierebbero rispettivamente in queste altre:

$$(3) \quad X_1 \equiv X_2 = X = \frac{\delta - [P(\eta_{13} + \eta_{16}) + Q(\eta_{14} + \eta_{15})]}{\eta_{11} + \eta_{12}};$$

$$(3') \quad X_1 \equiv X_2 = X = \frac{\delta - P(\eta_{13} + \eta_{14} + \eta_{15} + \eta_{16})}{\eta_{11} + \eta_{12}},$$

risultando quindi uguali le due iperstatiche.

Specificando ora la natura dei cedimenti δ_1 e δ_2 , si avrebbero, come dicevamo di sopra, dalle (1) a (3') le possibili soluzioni nelle tre diverse ipotesi dell'enunciato.

Per vincoli rigidi e di livello ($\delta_1 = \delta_2 = 0$), ci fermiamo appena sul caso, esaminato per ultimo, di carichi tutti uguali, nel quale dalla (3') è subito:

$$(4) \quad X = - \frac{\eta_{13} + \eta_{14} + \eta_{15} + \eta_{16}}{\eta_{11} + \eta_{12}} P,$$

e ciò solo per rilevare che il segno negativo sta semplicemente a significare che il senso, comune, delle due incognite X_1 e X_2 , è opposto a quello delle forze P , se il carico di esplorazione $P = I$ col quale vengono calcolati i coefficienti di influenza η_{ik} al numeratore e al denominatore conserva costantemente senso invertito, per modo che altrettanto avviene del segno di tutti gli η_{ik} .

Nel caso dei due pendoli elastici di lunghezza e sezione comuni h ed Ω , i cedimenti δ_1 e δ_2 sono rispettivamente le note funzioni di X_1 e X_2 :

$$(c) \quad \delta_1 = - \frac{X_1 h}{E \Omega} \quad ; \quad \delta_2 = - \frac{X_2 h}{E \Omega},$$

nelle quali, col segno negativo si è voluta mettere in evidenza la discordanza fra il senso delle incognite, che sono delle *reazioni*, e il segno dei cedimenti, che sono invece dovuti alle *azioni* sui pendoli.

Introducendo le (c) nelle (a'), si hanno le nuove equazioni:

$$(a'') \quad \begin{cases} 0 = \left(\eta_{11} + \frac{h}{E\Omega} \right) X_1 + \left(\eta_{12} + \frac{h}{E\Omega} \right) X_2 + \eta_{13} P_3 + \eta_{14} P_4 + \eta_{15} P_5 + \eta_{16} P_6 \\ 0 = \left(\eta_{12} + \frac{h}{E\Omega} \right) X_1 + \left(\eta_{11} + \frac{h}{E\Omega} \right) X_2 + \eta_{16} P_3 + \eta_{15} P_4 + \eta_{14} P_5 + \eta_{13} P_6, \end{cases}$$

dalle quali, procedendo allo stesso modo di sopra, sarebbe facile dedurre la soluzione generale corrispondente alla (1).

Anzichè ripetere la risoluzione ci possiamo però valere, come detto, delle soluzioni già trovate di sopra nei singoli casi particolari; per semplicità, ci fermiamo su quello corrispondente alla (3') dove basta porre $\delta = Xh/E\Omega$; sicchè risulta in modo immediato:

$$(4') \quad X = - \frac{PE\Omega(\eta_{13} + \eta_{14} + \eta_{15} + \eta_{16})}{E\Omega(\eta_{11} + \eta_{12}) + h};$$

si noti che, com'è necessario, il valore assoluto della X è ora inferiore a quello fornito dalla (4), corrispondente, per vincoli rigidi, alla stessa condizione di carico.

Di tutte le soluzioni date di sopra si ottiene poi la forma esplicita, esprimendovi coi dati del problema i coefficienti di influenza η_{ik} ($k=1, 2, \dots, n$).

Ci possiamo valere utilmente per questo, come già all'Esercizio precedente, della Teoria elementare delle travi inflesse, dalla quale basta ricordare che in una trave semplice di luce L e rigidezza a flessione EJ , l'abbassamento della sezione di ascisse a_r e b_r dagli appoggi per effetto del carico $P=1$ nella sezione di ascisse a_s e b_s , cioè il nostro coefficiente generico η_{rs} , ha l'espressione:

$$(d) \quad \eta_{rs} = \frac{a_r b_s (L^2 - a_r^2 - b_s^2)}{6EJL} \quad \text{se } r \text{ è a sinistra di } s;$$

ha invece l'espressione simmetrica:

$$(d') \quad \eta_{rs} = \frac{a_s b_r (L^2 - a_s^2 - b_r^2)}{6EJL} \quad \text{se } r \text{ è a destra di } s.$$

In particolare per $r \equiv s$, cioè quando il carico è sulla sezione r di cui si vuole lo spostamento, risulta:

$$(e) \quad \eta_{rr} = \frac{a_r^2 b_r^2}{2EJL}.$$

Per noi è stabilmente $r \equiv 1$ cioè $a_r \equiv a_1 = l_1$, $b_r \equiv b_1 = (l_2 + l_1)$ e, a meno del carico P_3 , tutti gli altri lasciano a sinistra tale sezione; dalla (d') è quindi:

$$\eta_{13} = \frac{a_3 b_1 (L^2 - a_3^2 - b_1^2)}{6 E J L};$$

dalla (e) è invece:

$$\eta_{11} = \frac{a_1^2 b_1^2}{3 E J L};$$

dalla (d) infine, per tutti e quattro i rimanenti coefficienti, è:

$$\begin{aligned} \eta_{12} &= \frac{a_1 b_2 (L^2 - a_1^2 - b_2^2)}{6 E J L} & ; & \quad \eta_{14} = \frac{a_1 b_4 (L^2 - a_1^2 - b_4^2)}{6 E J L} ; \\ \eta_{15} &= \frac{a_1 b_5 (L^2 - a_1^2 - b_5^2)}{6 E J L} & ; & \quad \eta_{16} = \frac{a_1 b_6 (L^2 - a_1^2 - b_6^2)}{6 E J L} . \end{aligned}$$

Non resta ormai che introdurre nelle (1) ÷ (4') queste espressioni, e per la luce il valore $L = 2l_1 + l_2$, per avere nella forma definitiva la soluzione in ognuno dei singoli casi esaminati.

Esercizio 48 — Risolvere l'arco semicircolare di fig. 75 a) caricato uniformemente sull'intera luce, nella ipotesi che gli incastrî consentano due cedimenti angolari α fra loro uguali.

—♦—

Malgrado gli incastrî non siano perfetti, per la supposta uguaglianza dei loro cedimenti angolari, la struttura si deforma lo stesso simmetricamente: come conseguenza, la sezione in chiave C dell'arco non può spostarsi orizzontalmente nè ruotare.

Di questa circostanza si può approfittare per una scelta conveniente delle incognite iperstatiche, tagliando l'arco in chiave, dove le caratteristiche della sollecitazione, e quindi le incognite iperstatiche, si riducono a due: la forza normale X_1 e il momento flettente X_2 (fig. 75 b)). Pensare queste caratteristi-

che come esplicitate nella sezione terminale C della mensola che residua ad es. a sinistra dopo il taglio, equivale manifestamente a mettere in conto la presenza della mensola di destra.

Con detta scelta, le due equazioni di elasticità si scriveranno allora imponendo che siano nulli per la sezione C lo spostamento orizzontale ξ_c e la rotazione ϑ_c .

In questi parametri hanno parte, da una parte, il cedimento angolare α della

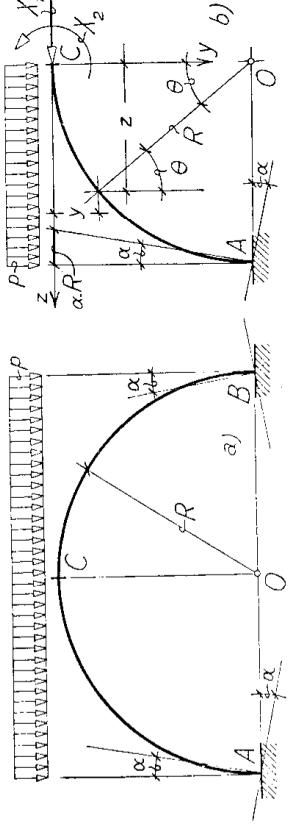


Fig. 75

sezione di incastro, dall'altro il carico uniforme p esteso alla mezza luce e le due iperstatiche X_1 e X_2 ; in simboli dovrà dunque risultare:

$$(a) \quad \begin{cases} \xi_c = \alpha R + \xi_{cp} + \xi_{c1} X_1 + \xi_{c2} X_2 = 0 \\ \vartheta_c = \alpha + \vartheta_{cp} + \vartheta_{c1} X_1 + \vartheta_{c2} X_2 = 0, \end{cases}$$

dove i coefficienti ξ e ϑ hanno un ovvio significato, e dove αR rappresenta lo spostamento orizzontale del punto generico della tangente all'arco in chiave, e quindi anche quello della chiave stessa, per effetto della rotazione anelastica α della sezione di incastro. Tutti i termini suddetti, cioè i contributi del carico uniforme e i coefficienti di influenza ξ_{c1} e ϑ_{c1} , possono essere resi espliciti in modo comodo ad es. mediante il teorema di Castigliano.

Se ne indica qui di seguito il calcolo ordinatamente tenendo conto, per brevità, del solo momento flettente. Per valutare ξ_{cp} , basta pensare applicata in C lungo la tangente - retta secondo cui si vuole lo spostamento - una forza arbitraria P_m , e valerci quindi della (a') di pag. 136, dopo naturalmente avervi reso esplicito Φ_1 mediante M .

Ora, con le notazioni di fig. 75b), in cui si deve pensare P_m in luogo della X_1 e che manchi X_2 , è semplice:

$$M_x = P_m y - \frac{pz^2}{2} = P_m R (1 - \cos \vartheta) - \frac{pR^2}{2} \sin^2 \vartheta \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial P_m} = R (1 - \cos \vartheta)$$

Applicando la citata (a') di pag. 136, è dunque:

$$(1) \quad \xi_{cp} = \left(\int_s^M \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial P_m} ds \right)_{P_m=0} = \frac{1}{EJ} \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{pR^2 \sin^3 \vartheta}{2} \right) R(1 - \cos \vartheta) R d\vartheta = -\frac{pR^4(3\pi-8)}{24EJ}.$$

Per avere ϑ_{cp} , basterà invece pensare applicata in O un momento M_m arbitrario e procedere ora secondo la (b') di pag. 136; la condizione di carico da prendere in esame sulla mensola, è quindi quella stessa della fig. 75b) quando si pensi M_m in luogo di X_2 e manchi invece la X_1 ; è allora:

$$M_x = M_m - \frac{pz^2}{2} = M_m - \frac{pR^2}{2} \sin^2 \vartheta \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial M_m} = 1,$$

e dalla citata (b') di pag. 136:

$$(2) \quad \vartheta_{cp} = \left(\int_s^M \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_m} ds \right)_{M_m=0} = \frac{1}{EJ} \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{pR^2 \sin^3 \vartheta}{2} \right) R d\vartheta = -\frac{\pi p R^3}{8 EJ}.$$

Per avere ξ_{ci} , si deve invece rimuovere dalla mensola il carico $pl/2$, la iperstatica X_2 e applicare unicamente una $X_1 = I$; è allora:

$$M = X_1 y = X_1 R(1 - \cos \vartheta) \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial X_1} = R(1 - \cos \vartheta),$$

e di seguito:

$$(3) \quad \xi_{ci} = \left(\int_s^M \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X_1} ds \right)_{X_1=I} = \frac{1}{EJ} \int_0^{\pi/2} [R(1 - \cos \vartheta)] R d\vartheta = \frac{R^3}{4EJ} (3\pi - 8).$$

In modo analogo a come si è proceduto per ϑ_{cp} , per avere ϑ_{ci} basterà applicare con la $X_1 = I$ un momento M_m arbitrario in O e servirci della stessa (b') di pag. 136; risulta così:

$$M = Iy + M_m = IR(1 - \cos \vartheta) + M_m \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial M_m} = 1,$$

e quindi:

$$(4) \quad \vartheta_{ci} = \left(\int_s^M \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_m} ds \right)_{M_m=0} = \frac{1}{EJ} \int_0^{\pi/2} R(1 - \cos \vartheta) R d\vartheta = \frac{R^2}{2EJ} (\pi - 2).$$

Per il teorema di Maxwell è ora anche $\xi_{c2} = \vartheta_{ci}$, in quanto per avere ξ_{c2} si dovrebbe applicare in O , sim-

metricamente a come fatto per ϑ_{α} , una $X_2=1$ e una P_m arbitraria, da fare poi uguale a zero.

Finalmente, in modo simmetrico a quello seguito per ξ_{α} , per avere ϑ_{α} basta applicare in C la sola $X_2=1$; è dunque:

$$M = X_2 \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = 1$$

e di seguito:

$$(5) \quad \vartheta_{\alpha} = \left(\int_s^M \frac{\partial M}{\partial X_2} ds \right)_{X_2=1} = \frac{1}{EJ} \int_0^{\pi/2} (1) R d\vartheta = \frac{\pi R}{2 EJ}$$

Introdotti i coefficienti da (1) a (5) nelle (a), queste prendono la forma esplicita:

$$(a') \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha R - \frac{p R^3 (3\pi - 4)}{24 EJ} + \frac{R^3 (3\pi - 8)}{4 EJ} X_1 + \frac{R^2 (\pi - 2)}{2 EJ} X_2 = 0 \\ \alpha - \frac{\pi p R^3}{8 EJ} + \frac{R^2 (\pi - 2)}{2 EJ} X_1 + \frac{\pi R}{2 EJ} X_2 = 0, \end{array} \right.$$

ovvero anche, riducendo a forma intera, quest'altra:

$$(a'') \quad \left\{ \begin{array}{l} 24 EJ \alpha - p R^3 (3\pi - 4) + 6 R^3 (3\pi - 8) X_1 + 12 R (\pi - 2) X_2 = 0 \\ 8 EJ \pi - \pi p R^3 + 4 R^2 (\pi - 2) X_1 + 4 \pi R X_2 = 0. \end{array} \right.$$

Sottraendo dalla prima la seconda moltiplicata per 3, si ricava subito la semplice combinazione:

$$2p R^2 + 3R (\pi - 4) X_1 - 12 X_2 = 0,$$

dalla quale ad es.:

$$(b) \quad X_2 = \frac{p R^2}{6} + \frac{R (\pi - 4)}{4} X_1.$$

Sostituendo nella seconda delle (a''), si ottiene allora per X_1 la soluzione:

$$(c) \quad X_1 = \frac{\pi p R^3 - 24 EJ \alpha}{3 R^2 (\pi^2 - 8)} = \frac{\pi p R}{3 (\pi^2 - 8)} - \frac{8 EJ \alpha}{R^2 (\pi^2 - 8)} = X_{\eta} - X_{\alpha};$$

e quindi, tornando alla (b), per X_2 quest'altra:

$$(d) \quad X_2 = \frac{p R^3 (3\pi^2 - 4\pi - 16) - 24 EJ \alpha (4 - \pi)}{12 R (\pi^2 - 8)} = \frac{p R^2 (3\pi^2 - 4\pi - 16)}{12 (\pi^2 - 8)} - \frac{2 EJ \alpha (4 - \pi)}{R (\pi^2 - 8)} = X_{\eta p} - X_{2\alpha}.$$

Nelle (c) e (d) sono stati separati i contributi del carico p e del cedimento α , ed è palese l'effetto di que-

sto ultimo; per incastri perfetti, la soluzione è poi rappresentata naturalmente dalla prima parte soltanto delle (c) e (d): $(X_{ip}; X_{sp})$.

Per avere delle espressioni approssimate di X_1 e di X_2 , ma più semplici, potremmo introdurre nelle (c) e (d) $\pi = 3,1415$.

Esercizio 49 — Esaminare il sistema di fig. 76 a) costituito da un arco circolare di rigidezza EJ , corda l e freccia f , attraversato a quota δ_1 sulla corda da una trave prismatica di rigidezza EJ_1 , nella ipotesi che le due membrature siano perfettamente incastrate alle estremità e solidarizzate nei punti E ed F di attraversamento. Delle due membrature, soltanto l'arco è gravato direttamente da un carico uniforme p su tutta la luce.

Si prende in esame questo esempio, già piuttosto complesso, non tanto per darne la soluzione — ciò che, in vero, porterebbe in lungo negli sviluppi — quanto per dare un'idea di come si conduca lo studio di un sistema

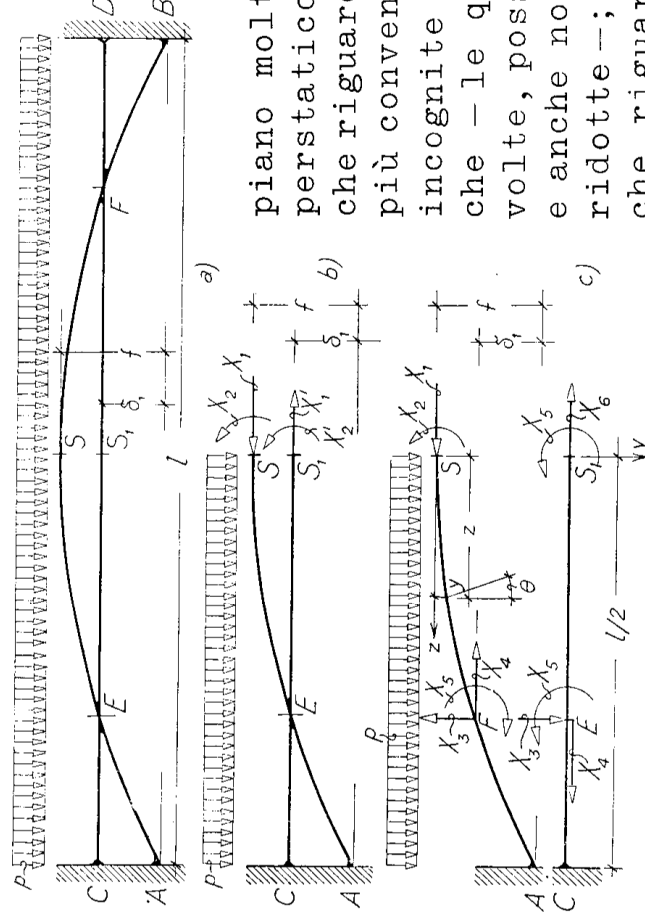


Fig. 76

spondenti equazioni di elasticità.

Costruttivamente il sistema può rappresentare un anello di volta per copertura a spinta eliminata da una catena passante; tenendo conto di tutte le condi-

zioni di vincolo, fra interne ed esterne, che gli sono imposte, un tale sistema risulta 42 volte iperstatico, come si riconosce subito sciogliendo la solidarietà nei due punti E ed F di attraversamento e sopprimendo gli incastri ad es. nelle sezioni B e D di destra; così facendo, si vengono infatti a rimuovere ogni volta tre condizioni semplici di vincolo.

Per la simmetria della struttura e del carico, il numero delle incognite risulta invece ridotto esattamente alla metà; in virtù di detta circostanza, che comporta simmetria anche nella deformazione, le sezioni S ed S_1 di mezzeria dell'arco e della trave non possono infatti uscire dal loro piano; tagliando allora il sistema in corrispondenza di tali sezioni, l'azione di vincolo ed es. della parte di destra su quella di sinistra viene rappresentata dalle caratteristiche della sollecitazione nelle sezioni medesime, caratteristiche che si riducono a una forza normale X_1 e a un momento flettente X_2 nell'arco e a due analoghe X_1' e X_2' nella trave, essendo nulle nelle stesse sezioni le forze di taglio (fig. 76 b)).

D'altra parte, nel punto E di solidarietà, le due membrature si trasmettono un'interazione che può essere risolta in una componente verticale X_3 , in una componente orizzontale X_4 e in un momento X_5 ; quest'ultimo poi, per il fatto che il taglio è nullo non soltanto nella sezione S_1 ma in tutto il tronco ES_1 della trave — sicchè in questo tronco il momento è costante — coincide con quello che abbiamo indicato sopra con X_2' nella sezione S_1 ; chiamando allora con X_6 la forza normale, già indicata con X_1' , in questa stessa sezione, restano precisate e ordinate le sei incognite del problema.

Per vederle figurare tutte esplicitamente, basta, oltre al taglio eseguito col piano di simmetria, sciogliere la solidarietà nel punto E (fig. 76 b)). Il sistema principale risulta così costituito da due mensole, di cui quella ad arco gravata dal carico uniforme p per tutta la luce, dalle incognite X_1 e X_2 nella sezione di estremità S e dalle tre incognite X_3 , X_4 e X_5 nella sezione E ; quella rettilinea, gravata in E da queste

stesse ultime tre incognite, di cui il momento X_5 si trasmette inalterato lungo tutto il tronco ES_1 , e in più, in questo medesimo tronco, dalla forza assiale X_6 .

Le sei condizioni che si traducono nelle sei equazioni di elasticità occorrenti, dovranno esprimere rispettivamente:

- a) che è nullo lo spostamento orizzontale della sezione estrema S dell'arco;
- b) che è nulla la rotazione della stessa sezione;
- c) che è nullo lo spostamento verticale relativo dei due punti contigui H dell'arco e della trave resi indipendenti nel rimuovere la solidarietà;
- d) che è nullo lo spostamento orizzontale relativo degli stessi due punti;
- e) che è nulla la rotazione relativa delle due sezioni contigue H di cui sopra;
- f) che è nullo ades. lo spostamento orizzontale della mezzeria S_1 della trave.

Indicando con η il generico di questi parametri, affetto dallo stesso indice della iperstatica secondo cui esso è valutato e con un apice o due apici secondo che si riferisce all'arco o alla trave, le dette equazioni si scriveranno in forma sintetica così:

$$\begin{array}{ll}
 1^a) & \eta'_1 = \eta'_{1p} + \eta'_{1t} X_t + \eta'_{1s} X_s + \eta'_{15} X_5 = 0 \\
 2^a) & \eta'_2 = \eta'_{2p} + \eta'_{2t} X_t + \eta'_{2s} X_s + \eta'_{25} X_5 = 0 \\
 3^a) & \eta'_3 - \eta''_3 = \eta'_{3p} + \eta'_{3t} X_t + \eta'_{3s} X_s + (\eta'_{3t} - \eta''_{3t}) X_t + (\eta'_{3s} - \eta''_{3s}) X_s - \eta''_{36} X_6 = 0 \\
 4^a) & \eta'_4 - \eta''_4 = \eta'_{4p} + \eta'_{4t} X_t + \eta'_{4s} X_s + (\eta'_{4t} - \eta''_{4t}) X_t + (\eta'_{4s} - \eta''_{4s}) X_s - \eta''_{46} X_6 = 0 \\
 5^a) & \eta'_5 - \eta''_5 = \eta'_{5p} + \eta'_{5t} X_t + \eta'_{5s} X_s + (\eta'_{5t} - \eta''_{5t}) X_t + (\eta'_{5s} - \eta''_{5s}) X_s - \eta''_{56} X_6 = 0 \\
 6^a) & \eta''_6 = \eta''_{6s} X_s + \eta''_{6t} X_t + \eta''_{65} X_5 + \eta''_{66} X_6 = 0,
 \end{array}$$

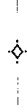
dove sono state poste in rilievo le varie cause che danno contributo nei singoli parametri e dove è stato formalmente distinto se si tratta di spostamento relativo o di spostamento assoluto.

Quanto abbiamo richiamato ai due esercizi precedenti dalla Teoria elementare delle travi inflesse e sull'applicazione del teorema di Castigliano per il cal-

colo di spostamenti e di rotazioni, ci pone in grado di esprimere in forma esplicita tutti i contributi γ'_{ip} del carico e i singoli coefficienti di influenza γ'_{ik} ed γ''_{ik} .

Evitiamo, per tale ragione, di ripeterci, lasciando indicato nella forma sintetica il sistema delle sei equazioni nelle sei incognite $X_1, X_2, \dots, X_6$; tanto più che, come accennato più sopra, la risoluzione finale porterebbe un onere fuori del nostro scopo (¹).

Esercizio 50 — Il sistema di fig. 77 è costituito da un complesso di sei travi di uguale sezione, di cui tre disposte secondo i lati di un triangolo equilatero, le altre tre secondo i tronchi delle rispettive mediane fino al baricentro, dove sono perfettamente incastrate a un nodo rigido D ; nell'ipotesi che nei vertici del triangolo le tre travi siano solidali, studiare il sistema sotto l'azione di una forza P nel vertice C comunque obliqua al suo piano.



Per un'idea pratica del sistema in esame, si pensi ad un volante di automobile conformato a triangolo, sul cui vertice C venga esercitata una qualunque azione obliqua nello spazio.

Riguardato come spaziale, il sistema si presenta a tutta prima 18 volte iperstatico, come si riconosce tagliando due delle aste radiali, ad es. le AD e CD nelle sezioni S_1 ed S_2 , e ulteriormente il contorno chiuso che ne risulta in un'altra sezione S_3 ad es. dell'asta BC (fig. 77b)), e introducendo in ciascuno dei tre tagli le relative sei caratteristiche della sollecitazione.

Di fatto però il sistema è piano e d'altronde la condizione più generale di carico assegnata in C può

(¹) D'altronde, per chi desiderasse lo studio fino alla risoluzione numerica di un sistema del genere, ma con tre iperstatiche in più per la presenza di un montante di collegamento fra le due strutture in corrispondenza delle sezioni S ed S_1 di mezzeria e solidale con esse, può essere consultato il mio lavoro «*Sullo studio di un sistema combinato arco-travi*», Atti dell'Ist. di Sc. delle Costr. dell'Università di Pisa, Pubbl. n° 2 — Ed. C. Cursi, nel quale sono date le leggi analitiche e grafiche (*linee di influenza*) secondo cui variano le singole iperstatiche interne al muoversi di un carico verticale unitario sull'arco.

essere studiata in modo comodo sovrapponendo tre condizioni semplici distinte, capaci di ridurre notevolmente una ad una, e quindi anche nella loro combinazione, il grado di iperstaticità.

Assumiamo infatti il riferimento cartesiano ortogonale $C(x, y, z)$ con l'asse x radiale, l'asse y nel piano del sistema e l'asse z normale a questo piano, orientati ad es. come indica la (fig. 77a) e b)).

Detto ψ l'angolo che la retta d'azione della forza fa col piano (x, y) e φ quello che la sua proiezione r su tale piano fa con l'asse x , la P resta risolta ordinatamente nelle seguenti tre componenti secondo x, y e z :

$$(a) \quad P_1 = P \cos \psi \cos \varphi ; \quad P_2 = P \cos \psi \sin \varphi ; \quad P_3 = P \sin \psi .$$

L'effetto di P , per ogni coppia di valori degli angoli ψ e φ , può pertanto essere studiato sovrapponendo gli effetti di tre forze distinte P_1, P_2 e P_3 di cui la prima radiale, la seconda tangente in C al circolo circoscritto al triangolo, la terza normale al piano del sistema.

Si esaminano perciò di seguito separatamente queste tre condizioni.

A) La condizione di carico P_1 (radiale).

La linea d'azione di P_1 , cioè l'asse x , è asse di simmetria per il sistema e per la deformazione. Ciò porta come conseguenza, oltre al fatto che nelle due aste AC e BC le caratteristiche della sollecitazione sono le stesse, che la sezione di mezzo K dell'asta AB opposta al vertice caricato non esce dal suo piano.

D'altra parte, per quanto riguarda le caratteristiche in tale sezione, il taglio è nullo per simmetria, sicchè vi rimangono costanti la forza normale e il momento flettente.

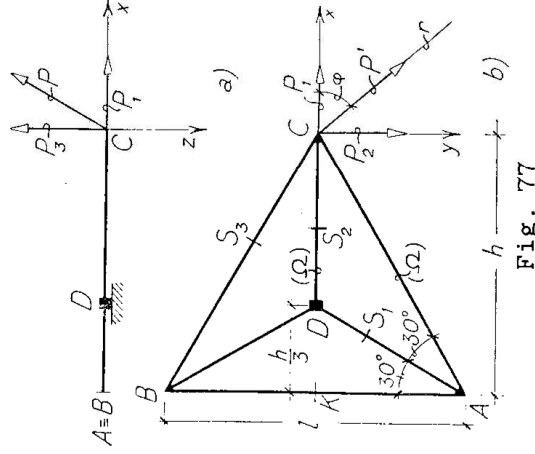


Fig. 77

Nelle altre due aste di contorno AC e BC si hanno invece le tre caratteristiche N , M e T .

Al proposito, un esame anche sommario della deformazione, consentirebbe queste prime precisazioni: agli estremi di ognuna di queste aste, per es. la AC , si hanno momenti M_A ed M_C di segno opposto; lungo l'asta, il taglio — così come la forza normale — resta poi costante: niente è però possibile dire a priori, quando si voglia considerare la deformazione di una di queste aste nel suo aspetto completo, circa la posizione del punto di passaggio del momento, cioè del punto di curvatura nulla, giacchè nessuna palese relazione a priori sussiste fra i valori di M_A ed M_C agli estremi. Si

conclude, ciò con dimeno, che le incognite iperstatiche nella condizione di carico in esame si riducono al massimo a cinque: le due caratteristiche N ed M nell'asta AB , e le tre caratteristiche N , T ed M in una sezione da prefissare nell'asta AC .

Per la scelta più conveniente di tale sezione, si osservi che, ancora per simmetria, l'estremo C caricato si muove nella direzione dell'asta radiale DC .

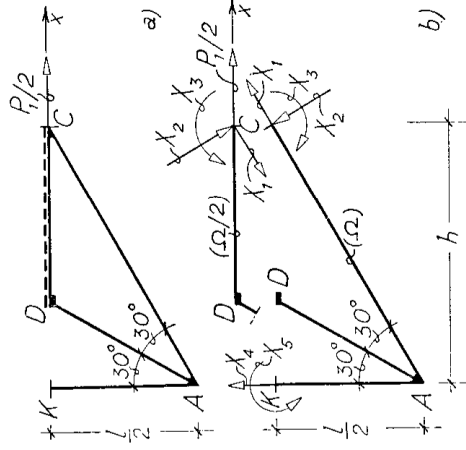


Fig. 78

Dimezzato allora in modo completo il sistema mediante il piano verticale per l'asse x di simmetria, dimezzando cioè, insieme, l'asta radiale CD e il carico P_1 , e immaginato di vincolare per tutta la sua lunghezza la semiasta BC mediante un appoggio scorrevole continuo che ne lasci libera solo la deformazione assiale (fig. 78a) si operi ulteriormente un taglio nella sezione terminale C dell'asta AC , introducendo così come incognite iperstatiche le caratteristiche N , M e T in tale sezione.

Numereremo le cinque incognite a partire da queste ultime e nell'ordine indicato in fig. 78b.

Le condizioni locali di congruenza che si traducono nelle cinque equazioni di elasticità occorrenti a determinare tali incognite, esprimeranno allora:

da un lato che risultino nulli lo spostamento assiale ξ_K e la rotazione ϑ_K della mezzeria K dell'asta AB ;

dall'altro che risultino nulli: lo spostamento relativo secondo la X_1 dei due estremi contigui C resi indipendenti con il taglio; lo spostamento relativo di questi stessi punti nella direzione della X_2 , e la rotazione assoluta della sezione C dell'asta AC .

Indicando, in conformità a quanto già fatto allo Esercizio precedente, con η il generico dei detti parametri di spostamento, affetto dallo stesso indice della iperstatica alla quale si riferisce e da un apice se è relativo al movimento di un punto o sezione del sistema triangolare esterno, da due apici invece se è relativo all'estremo C del semielemento interno DC , le cinque equazioni per la condizione di carico radiale prendono le seguenti forme simboliche:

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \eta'_1 - \eta''_1 = \frac{\eta''_{11}}{\eta_{12}} \frac{P_i \cos 30}{2} + (\eta'_{11} - \eta''_{11}) X_1 + (\eta'_{12} - \eta''_{12}) X_2 + (\eta'_{13} - \eta''_{13}) X_3 + \eta'_{14} X_4 + \eta'_{15} X_5 = 0; \\ \eta'_2 - \eta''_2 = -\frac{\eta''_{22}}{\eta_{22}} \frac{P_i \sin 30}{2} + (\eta'_{21} - \eta''_{21}) X_1 + (\eta'_{22} - \eta''_{22}) X_2 + (\eta'_{23} - \eta''_{23}) X_3 + \eta'_{24} X_4 + \eta'_{25} X_5 = 0; \\ \eta'_3 = \eta'_{31} X_1 + \eta'_{32} X_2 + \eta'_{33} X_3 + \eta'_{34} X_4 + \eta'_{35} X_5 = 0; \\ \eta'_4 = \eta'_{41} X_1 + \eta'_{42} X_2 + \eta'_{43} X_3 + \eta'_{44} X_4 + \eta'_{45} X_5 = 0; \\ \eta'_5 = \eta'_{51} X_1 + \eta'_{52} X_2 + \eta'_{53} X_3 + \eta'_{54} X_4 + \eta'_{55} X_5 = 0. \end{array} \right.$$

Per una migliore comprensione di queste equazioni, si precisa che i contributi degli spostamenti dell'estremo C dell'elemento DC nelle direzioni delle incognite X_1 e X_2 per parte della forza esplicita $P_i/2$, sono stati valutati come prodotti dei rispettivi coefficienti di influenza η''_{ii} e η''_{i2} per le componenti $P_i \cos 30/2$ e $P_i \sin 30/2$ della forza stessa sulle rette d'azione delle dette incognite; che le prime due equazioni annullano degli spostamenti relativi, le rimanenti tre degli spostamenti assoluti; che infine sono state scritte, per ragioni di uniformità, in forma completa, senza cioè tenervi conto delle coincidenze che si verificano fra i coefficienti di influenza in ragione del teorema di Maxwell.

B) La condizione di carico P_2 (*tangenziale*)

Anche in questo caso, l'analisi della deformazione porta a stabilire alcune circostanze essenziali per la riduzione del numero delle incognite iperstatiche e per la scelta delle condizioni che si traducono nelle equazioni di elasticità.

Tali circostanze sono:

— l'asta AB è soggetta agli estremi a momenti di segno opposto e, perchè scarica, a taglio costante; ma per la invertibilità della deformazione dell'asta invertendo il senso della forza P_2 , il punto di flessore della deformata deve cadere nel punto di mezzo K dell'asta: i momenti agli estremi devono quindi risultare uguali e contrari; d'altra parte, poichè l'asse x è ora asse di antisimmetria, nella sezione K è nulla, oltrechè M , anche la forza normale N ⁽¹⁾. Le caratteristiche della sollecitazione in K si riducono così alla sola forza di taglio T ;

— nell'asta AC invece, in cui si hanno — come nella condizione di carico esaminata in A) — una forza normale e un taglio costanti, per l'impossibilità ancora di stabilire a priori la posizione del punto di flessore, occorre introdurre come terza incognita iperstatica il momento in una sezione prefissata. Anche qui, per uniformità con quanto già fatto in A), sceglieremo la sezione C (fig. 79b), dopo avere ancora dimezzato al modo di prima il sistema mediante l'asse x di emissimmetria, comprese l'asta radiale DC e la forza P_2 (fig. 79a)).

Applicate come esplicitate alle due faccie del taglio operato in C le tre corrispondenti caratteristiche della sollecitazione X_1 , X_2 e X_3 e detto, per uniformità

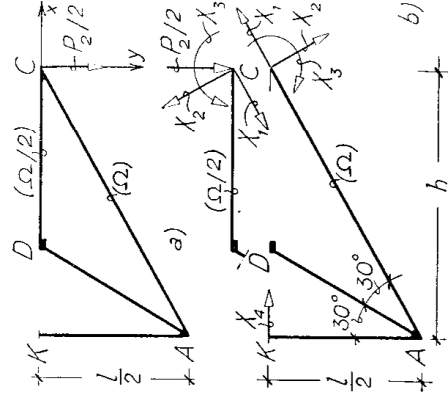


Fig. 79

⁽¹⁾ L'antisimmetria vale d'altronde da sola ad eliminare in K le caratteristiche simmetriche (N ed M).

di notazioni, X_4 , il talio nella sezione K , le quattro equazioni di elasticità occorrenti a determinare queste quattro incognite si scriveranno ora imponendo:

- a) che sia nullo lo spostamento relativo dei due punti contigui C di fig. 79b) nella direzione della X_1 ;
- b) che sia nullo lo spostamento relativo degli stessi punti nella direzione della X_2 ;
- c) che sia nulla la rotazione relativa delle due sezioni contigue C , rese indipendenti col taglio eseguito;
- d) che sia nullo lo spostamento assiale del punto di mezzo K dell'asta AB , obbligato ovviamente a rimanere sull'asse di antisimmetria.

Con notazioni analoghe a quelle seguite in A) per i coefficienti di influenza, tali equazioni si scrivono rispettivamente e ordinatamente:

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta'_1 - \eta''_1 = \frac{\eta''_{11} P_2 \sin 30}{2} + (\eta'_{11} - \eta''_{11}) X_1 + (\eta'_{12} - \eta''_{12}) X_2 + (\eta'_{13} - \eta''_{13}) X_3 + \eta'_{14} X_4 = 0 \\ \eta'_2 - \eta''_2 = -\frac{\eta''_{22} P_2 \cos 30}{2} + (\eta'_{21} - \eta''_{21}) X_1 + (\eta'_{22} - \eta''_{22}) X_2 + (\eta'_{23} - \eta''_{23}) X_3 + \eta'_{24} X_4 = 0 \\ \eta'_3 - \eta''_3 = \frac{1}{2} (\eta''_{31} \sin 30 - \eta''_{32} \cos 30) P_2 + (\eta'_{31} - \eta''_{31}) X_1 + (\eta'_{32} - \eta''_{32}) X_2 + (\eta'_{33} - \eta''_{33}) X_3 + \eta'_{34} X_4 = 0 \\ \eta'_4 = \eta'_{41} X_1 + \eta'_{42} X_2 + \eta'_{43} X_3 + \eta'_{44} X_4 = 0, \end{array} \right.$$

e al proposito valgono le stesse osservazioni fatte per le (A).

C) La condizione di carico P_3 (normale al piano del sistema).

Il piano (x, z) è piano di simmetria, oltrechè per il carico e per il sistema, anche per la deformazione.

Ne consegue che nell'asta AB si annullano insieme le caratteristiche N, T ed M_t , e vi è quindi al massimo diverso da zero, e necessariamente costante, il momento flettente nel piano verticale per l'asse.

Nelle due aste laterali AC e BC si hanno invece sicuramente taglio e flessione e presumibilmente torsione, destinata a tradursi in parte nella suddetta flessione dell'asta AB ; delle aste radiali poi, la DC è

soggetta a flessione e taglio, le altre due, simmetricamente, a flessione, taglio e torsione.

Come incognite iperstatiche, in tutto al massimo quattro, possiamo assumere, in conformità ai due casi esaminati di sopra, le tre dette caratteristiche X_1 , X_2 e X_3 (rispettivamente: taglio, momento flettente e momento torcente) nella sezione C , e il momento flettente X_4 nell'asta AB , dopo avere ancora dimezzato il sistema, compreso il carico P_3 , col piano di simmetria, e annullata la solidarietà in C fra la semiasta DC radiale e quella di contorno AC .

Le condizioni da sfruttare per scrivere le equazioni di elasticità saranno allora le seguenti:

- a) che sia nullo nel sistema principale lo spostamento relativo verticale dei due punti contigui C resi indipendenti con il taglio eseguito;
- b) che sia nulla la rotazione relativa nel piano di simmetria delle due sezioni contigue C rese indipendenti come sopra;
- c) che sia nulla la rotazione assoluta normalmente al piano di simmetria della sezione terminale C dell'asta AC ;
- d) che sia nulla la rotazione assoluta della sezione K normalmente allo stesso piano.

Con notazioni in tutto conformi a quelle seguite nei due casi esaminati di sopra, tali condizioni si traducono formalmente come segue:

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma'_1 - \gamma''_1 = -\frac{1}{2} \gamma''_{11} P_3 + (\gamma'_{11} - \gamma''_{11}) X_1 + (\gamma'_{12} - \gamma''_{12}) X_2 + (\gamma'_{13} - \gamma''_{13}) X_3 + \gamma'_{14} X_4 = 0 \\ \gamma'_{12} - \gamma''_{12} = \frac{1}{2} \gamma''_{12} P_3 + (\gamma'_{12} - \gamma''_{12}) X_1 + (\gamma'_{22} - \gamma''_{22}) X_2 + (\gamma'_{23} - \gamma''_{23}) X_3 + \gamma'_{24} X_4 = 0 \\ \gamma'_{13} = \gamma'_{133} X_3 + \gamma'_{134} X_4 = 0 \\ \gamma'_{14} = \gamma'_{142} X_2 + \gamma'_{143} X_3 + \gamma'_{144} X_4 = 0 \end{array} \right.$$

a proposito delle quali valgono le stesse avvertenze fatte per le (A) e per le (B).

Come si è avvertito in principio, si intende qui di lasciare indicati i tre sistemi di equazioni ottenuti per le tre condizioni di carico prese in esame.

È chiaro, ciò non di meno, che per renderli espli-

citi, potremmo ad es. servirci indifferentemente o della Teoria elementare delle travi inflesse o del teorema di Castigliano; si hanno anzi, al riguardo, dagli Esercizi 47 e 48, praticamente tutti gli elementi ora necessari.

D) La condizione di carico P .

Per sovrapposizione dei risultati stabiliti nelle tre condizioni semplici P_1 , P_2 e P_3 in cui si è risolta, per ogni coppia di valori degli angoli ϕ e φ , la condizione generale P di carico assegnata in C , si può studiare quest'ultima condizione.

Al riguardo ci limitiamo qui ad analizzare lo stato di sollecitazione risultante nelle singole membrature,

TABELLA I/50

ASTA	Condizione di carico			P
	$P_1 = P \cos \phi \cos \varphi$	$P_2 = P \cos \phi \sin \varphi$	$P_3 = P \sin \phi$	
AB	N M —	— M T	— M —	N M T
AC e BC	N M T —	N M T —	— M T M_1	N M T M_1
DC	N — —	— M T	— M T	N M T
AD e BD	N M T —	N M T —	— M T M_1	N M T M_1

e ciò facciamo, a scopo comparativo, valendoci della Tabella I/50, nella quale sono indicate qualitativamente, tronco per tronco, le caratteristiche che vi inducono le singole condizioni semplici e quindi, per sovrapposizione, anche la condizione P .