

Dott. Ing. OTELO MAGINI

Dottore in Matematica Pura e in Fisica Pura

Assistente di Scienza delle Costruzioni nell' Università di Pisa

E S E R C I Z I
di
Scienza delle Costruzioni

Volume 1°

Teoria Generale dell'Elasticità - Problema di S. Venant

Travi Inflesse - Carico di Punta

—*—

3ª Edizione

**COLOMBO CURSI
EDITORE - PISA**

194155



Dr. Grayson

Dott. Ing. OTELO MAGINI

Dottore in Matematica Pura e in Fisica Pura

Assistente di Scienza delle Costruzioni nell' Università di Pisa

ESERCIZI

di

Scienza delle Costruzioni

Volume 1°

Teoria Generale dell'Elasticità - Problema di S. Venant

Travi Inflesse - Carico di Punta



3ª Edizione

Industria Tipografica - COLOMBO CURSI - Via S. Maria 9 r, Pisa

1948

Le copie non firmate dall'Autore sono contraffatte

J. Longini

N° 1549

Editore - COLOMBO CURSI
Via S. Maria, 9 r. — PISA

PREFAZIONE

Questo volume contiene ed amplia due precedenti edizioni in litografia di "Esercizi di Scienza delle Costruzioni" (Ed. Viretto - Torino) destinate agli Studenti di Ingegneria dell'Università di Pisa e agli Allievi dei Corpi Tecnici della Accademia Navale di Livorno.

Il suo contenuto segue infatti ancora nelle linee essenziali, come le precedenti edizioni, lo svolgimento delle esercitazioni del corso di Scienza delle Costruzioni che tiene da anni nei due Istituti il Prof. Dr. Ing. L. F. Donato.

Scopo del libro è quello di fissare attraverso facili applicazioni, senza troppo sforzo e col minor numero di lacune possibile, i concetti fondamentali e i mezzi di calcolo della Scienza delle Costruzioni.

È per avvicinare il più possibile questo intento che, da un lato, nei primi esercizi relativi a ogni nuovo argomento, sono stati fatti dei richiami di teoria, più o meno ampi a seconda dell'importanza e della difficoltà dell'argomento; dall'altro, è stato dato un sistematico rilievo alla parte numerica, nella convinzione che il trovarsi in ogni problema davanti a dei risultati numerici sia di notevole aiuto per lo Studente, abituandolo all'impostazione e allo sviluppo del calcolo e procurandogli il significato concreto dei simboli, le loro dimensioni, il loro ordine di grandezza.

A tale riguardo hanno ricevuto in questa edizione uno sviluppo ancor più organico, ponendoli in stretto collegamento numerico quanto a dati e a risultati, i primi tre capitoli, relativi allo studio della deformazione e dello stato di tensione in un punto e dell'energia potenziale elastica. Solo raramente infatti capita di riscontrare negli Studenti concetti solidi e precisi su tali argomenti.

Dopo questa parte sulla teoria generale dell'elasticità, viene trattato gradatamente nei suoi casi semplici e composti il problema di de S. Venant, con que-

siti vari, per i diversi casi, che vanno dal calcolo di verifica a quello di progetto; vengono quindi trattati in varie condizioni di carico e di vincolo le travi inflesse isostatiche ed iperstatiche, le travi di ugual resistenza a forza normale e a flessione e quelle soggette a fenomeni di fatica; esaminato diffusamente è infine il carico di punta, prima in travi isolate sotto diverse condizioni di vincolo, poi in travi facenti già parte di strutture semplici, onde avviare a riconoscere e a studiare, a suo tempo, questo genere di sollecitazione nelle strutture delle costruzioni in l. f. e c. a.

Nell'accingermi a rivedere questa edizione, era mio desiderio di includere nel volume anche la parte relativa alla risoluzione dei sistemi iperstatici; ma, da un lato, varie difficoltà di ordine pratico che hanno ritardato di alcuni mesi il lavoro tipografico, dall'altro la circostanza che il volume, per un maggiore sviluppo della materia sul previsto, avrebbe così ricevuto una mole forse eccessiva, mi hanno consigliato a riservare questa parte a un volumetto a sè, che, se le condizioni di lavoro miglioreranno, dovrebbe uscire fra qualche mese.

Rinnovo qui la mia gratitudine al Chiar.mo Prof. Dr. Ing. L. F. Donato per avermi già consigliata questa raccolta e guidato fin dalle precedenti edizioni nella scelta e nella presentazione più adatta degli esercizi.

Un cordiale ringraziamento debbo anche all'Editore C. Corsi per la lodevole attenzione con cui ha curato la veste tipografica.

L'AUTORE

Pisa, 29 Maggio 1948

I N D I C E

| | |
|--------------------------|----------|
| PREFAZIONE | pag. III |
| INDICE | , V |
| ERRATA CORRIGE | , VIII |
| PREMESSA | , I |

CAP. I - Deformazione dell'intorno di un punto.

| | |
|-----------------------|--------|
| Esercizio 1 | pag. 9 |
| » 2 | , 12 |
| » 3 | , 16 |

CAP. II - Stato di tensione in un punto.

A - Stato triassiale.

| | |
|-----------------------|---------|
| Esercizio 4 | pag. 19 |
| » 5 | , 23 |
| » 6 | , 26 |
| » 7 | , 30 |
| » 8 | , 32 |

B - Stato biassiale.

| | |
|-----------------------|---------|
| Esercizio 9 | pag. 35 |
| » 10 | , 37 |
| » 11 | , 38 |

CAP. III - Energia potenziale e solidi omogenei e isotropi.

| | |
|------------------------|---------|
| Esercizio 12 | pag. 42 |
|------------------------|---------|

CAP. IV - I casi semplici e composti del problema di S. Venant.

| | |
|------------------------|---------|
| Esercizio 13 | pag. 47 |
|------------------------|---------|

A - Forza normale semplice.

| | |
|------------------------|---------|
| Esercizio 14 | pag. 51 |
| » 15 | , 55 |
| » 16 | , 56 |

| | | |
|--------------|------|----|
| Esercizio 17 | pag. | 57 |
| » 18 | » | 59 |
| » 19 | » | 62 |
| » 20 | » | 63 |

B - Flessione semplice.

| | | |
|--------------|------|----|
| Esercizio 21 | pag. | 64 |
| » 22 | » | 70 |
| » 23 | » | 73 |

C - Torsione semplice.

| | | |
|--------------|------|----|
| Esercizio 24 | pag. | 77 |
| » 25 | » | 81 |
| » 26 | » | 84 |
| » 27 | » | 86 |

D - Taglio semplice.

| | | |
|--------------|------|----|
| Esercizio 28 | pag. | 87 |
| » 29 | » | 92 |

E - Flessione e taglio.

| | | |
|--------------|------|----|
| Esercizio 30 | pag. | 93 |
| » 31 | » | 98 |

F - Forza normale eccentrica.

| | | |
|--------------|------|-----|
| Esercizio 32 | pag. | 101 |
| » 33 | » | 103 |
| » 34 | » | 106 |
| » 35 | » | 108 |
| » 36 | » | 110 |
| » 37 | » | 113 |

G - Forza normale flessione e taglio.

| | | |
|--------------|------|-----|
| Esercizio 38 | pag. | 117 |
|--------------|------|-----|

H - Flessione torsione e taglio.

| | | |
|--------------|------|-----|
| Esercizio 39 | pag. | 121 |
|--------------|------|-----|

CAP. V - Travi inflesse.

A - Travi ad una luce.

| | | |
|--------------|------|-----|
| Esercizio 40 | pag. | 124 |
| » 41 | » | 127 |
| » 42 | » | 130 |
| » 43 | » | 134 |
| » 44 | » | 137 |
| » 45 | » | 141 |
| » 46 | » | 146 |

| | | |
|--|-----------|----------|
| Esercizio 47 | • • • • • | pag. 149 |
| „ 48 | • • • • • | „ 152 |
| „ 49 | • • • • • | „ 155 |
| B - Travi continue. | | |
| Esercizio 50 | • • • • • | pag. 159 |
| „ 51 | • • • • • | „ 163 |
| „ 52 | • • • • • | „ 166 |
| C - Travi Gerber o a mensola. | | |
| Esercizio 53 | • • • • • | pag. 168 |
| D - Travi a carico indiretto. | | |
| Esercizio 54 | • • • • • | pag. 170 |
| E - Travi di ugual resistenza. | | |
| Esercizio 55 | • • • • • | pag. 172 |
| „ 56 | • • • • • | „ 175 |
| „ 57 | • • • • • | „ 179 |
| F - Travi sollecitate dinamicamente. | | |
| Esercizio 58 | • • • • • | pag. 182 |
| „ 59 | • • • • • | „ 183 |
| G - Travi caricate parallelamente all'asse. | | |
| Esercizio 60 | • • • • • | pag. 185 |
| H - Travi caricate di punta. | | |
| Esercizio 61 | • • • • • | pag. 189 |
| „ 62 | • • • • • | „ 194 |
| „ 63 | • • • • • | „ 197 |
| „ 64 | • • • • • | „ 199 |
| „ 65 | • • • • • | „ 200 |
| „ 66 | • • • • • | „ 201 |
| „ 67 | • • • • • | „ 204 |
| „ 68 | • • • • • | „ 207 |
| „ 69 | • • • • • | „ 210 |
| „ 70 | • • • • • | „ 213 |

ERRATA CORRIGE

- Pag. 12 riga + 12 anzichè: *il* terzo leggi: *un* terzo
- » 34 formula (20) » $\sum \left(\frac{y_i^2}{\sigma_{ip}} \right) = 1$ » $\sum \left(\frac{y_i}{\sigma_{ip}} \right)^2 = 1$
- » 39 riga + 17 » *descrivere* » *descriere*
- » 41 riga - 5 » $\overline{OS'} = - 2,2 \text{ t/cm}^2$ » $\overline{OS'} = - 0,2 \text{ t/cm}^2$
- » 74 riga + 8 » $\text{tg } \psi = \frac{J_x}{J_y} \text{tg } 60^\circ$ » $\text{tg } \psi = - \frac{J_x}{J_y} \text{tg } 60^\circ$
-

PREMESSA

Il problema fondamentale della Scienza delle Costruzioni è quello di riconoscere se una struttura, realizzata con un certo materiale, è atta a sopportare stabilmente le azioni alle quali è destinata.

Tali azioni possono essere quelle provocate da carichi statici, da carichi dinamici, da variazioni di temperatura o di volume, da cedimenti di vincoli e da difetti di montaggio o di costruzione.

Tutte queste azioni, dalle zone ove hanno direttamente origine, fluiscono per la struttura e la interzano diversamente nelle diverse parti: a seconda della sua configurazione, delle sue dimensioni, dei collegamenti fra le sue membrature, del complesso dei vincoli esterni che le sono imposti, ecc.; finiscono così, di solito, coll'impegnare questi ultimi e, almeno che si tratti di organi mobili di macchine, è allora in essi che devono trovare il loro naturale equilibrio.

Per un caso concreto, si pensi ad es. a un arco piano incastrato agli estremi, sul quale, in determinati punti, agiscano determinate forze esplicitate; da tali punti, queste forze faranno risentire i loro effetti lungo tutto l'arco, impegnandolo, in generale, diversamente nelle sue diverse sezioni trasversali e finendo quindi agli incastri; ivi richiederanno da parte dei corpi vincolanti due ben determinate reazioni, capaci di equilibrare il complesso delle forze esplici-

te; dicendo, in tal caso, che la struttura deve essere stabile, si intende significare che essa deve poter assolvere ovunque, e con un certo margine di sicurezza se non si vogliono correr sorprese, al compito a cui è chiamata. Al proposito si intuisce, però, che fra le varie sezioni dell'arco ve ne sarà qualcuna, se non forse una sola, impegnata più delle altre: o in quanto si trova a passare per essa un complesso statico più gravoso che nelle altre, ovvero, a parità di questo, perchè essa costituisce, per così dire, un passaggio più stretto a tale complesso: *sezione pericolosa*; ove pertanto sapessimo individuarla ⁽⁴⁾ e giudicare in essa della stabilità, resterebbe senz'altro concluso circa la stabilità dell'arco.

È palese però, d'altra parte, che quel complesso statico, nell'attraversare la sezione, la interesserà diversamente elemento per elemento di superficie, e che fra tali elementi ve ne sarà quindi qualcuno impegnato in condizioni più gravose degli altri; sicchè la stabilità della sezione sarebbe senz'altro assicurata quando lo fosse in questo elemento, in questo punto.

Il problema fondamentale sopra accennato, almeno per il caso di un sistema piano, consiste dunque nella indagine preventiva della sezione pericolosa e, in questa, del *punto pericoloso*; e nel giudicare quindi successivamente delle condizioni del materiale in questo punto.

Ora per tale indagine preventiva è necessario, di solito, conoscere anzitutto le reazioni dei vincoli, vale a dire, dunque, tutte le forze esterne in gioco sul sistema; la determinazione delle reazioni però, agevole e immediata nel caso dei sistemi isostatici — in quanto allora anche staticamente determinati, cioè risolvibili con le sole equazioni della Statica dei cor-

⁽⁴⁾ Nel caso particolare delle *travi prismatiche*, sono notoriamente elementi essenziali di giudizio al proposito i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione, i quali si costruiscono subito una volta note le reazioni dei vincoli (Per i sistemi isostatici cfr. MAGINI: *Statica Grafica* — Introduzione alla Scienza delle Costruzioni; Cap. XV. Ed. C. Corsi, Pisa 1947).

pi rigidi— non lo è più altrettanto se il sistema è iperstatico: in tal caso essa è raggiungibile solo tenendo conto della deformabilità dei corpi, in quanto imponendo alle ulteriori incognite del problema (*incognite iperstatiche*) il rispetto della deformazione, è possibile scrivere tutte le equazioni occorrenti.

Già per questa parte dell'indagine preventiva, i mezzi a disposizione non sono dunque, in generale, più sufficienti.

Quand'anche però dessimo come risolta in tutti i casi questa prima parte, l'altra, quella di individuare la sezione e il punto pericolosi, resterebbe comunque insoluta; e ciò, si noti, non solo nel caso dei sistemi iperstatici ma, financo, in quello dei sistemi isostatici. Per tale ricerca potremmo infatti rifarci, come già per la determinazione delle caratteristiche della sollecitazione una volta note le reazioni dei vincoli, al principio di azione e reazione della Meccanica del corpo rigido; ma può tale principio illuminarci sulla modalità con la quale le varie caratteristiche agiscono nell'interno di una sezione e quindi nella ricerca del punto pericoloso? Evidentemente no, in quanto, nell'ipotesi della rigidità, il principio non può che individuare l'azione statica globale relativa a una data sezione, mentre sono invece infinite le distribuzioni superficiali possibili fra loro staticamente equivalenti; per modo che il problema di individuare fra tutte quella effettiva, risulta necessariamente indeterminato.

L'indeterminazione però, come già nella ricerca delle reazioni iperstatiche, scompare, anche qui, quando ci si rifaccia alle leggi che regolano la deformazione dei corpi.

Nell'una e nell'altra parte del problema, dunque, da tali leggi non si scappa, se si vuole renderci organicamente conto di come vadano le cose, e non procedere invece ammettendo a ogni passo nuove ipotesi che, anche se consigliate dall'intuizione o dall'esperienza, tolgono in ogni caso il loro rigore a conseguenze magari vere e, soprattutto, organicità e snellezza alla

trattazione; nella quale il problema, non v'ha dubbio, deve invece essere affrontato in tutta la sua generalità, per scendere poi, ogni volta che occorra e in modo automatico, all'interpretazione del caso particolare.

Fissare queste leggi spetta alla Teoria Matematica dell'Elasticità, il cui studio resta pertanto giustificato come necessaria premessa al problema di resistenza e di stabilità che è alla base della Scienza delle Costruzioni.

* * *

Al riguardo, quanto precede mette bene in luce una esigenza precipua di questo studio.

Giacchè infatti la deformazione globale di un corpo elastico soggetto a date forze esterne (esplicite e reazioni vincolari) si presenta come la naturale risultanza delle deformazioni elementari degli intorni dei suoi punti, e lo scopo finale è d'altronde quello di investigare lo stato di cose nel punto pericoloso, si può dire che fisicamente e logicamente tutto muove dalla legge in cui si assetta in regime di equilibrio l'intorno di un punto; e allora tutto lo studio preliminare al problema che ci interessa, è ricondotto essenzialmente alla formulazione di questa legge: pochi elementi, pochi concetti basilari e insieme modestissimi mezzi, potranno quindi essere sufficienti ad affrontare l'impalcatura apparentemente complessa del nostro problema.

Per renderci conto, prima ancora di conoscerli, del ruolo che giocheranno questi elementi, si consideri per un momento il fenomeno della deformazione nel suo aspetto fisico. Al variare delle forze esterne da zero a dati valori finali, il corpo elastico cambia gradatamente di forma, vale a dire i suoi punti, abbandonando la propria posizione iniziale, subiscono spostamenti mano mano variabili; in tale processo, l'intorno di primo ordine di questi punti cambia allora di configurazione, rispettando in ogni caso, com'è pur ovvio ammettere, una legge di continuità nella compagine del solido; l'ipotesi che questo sia *perfettamente elastico* im-

plica che, facendo seguire alle forze, a partire dalla configurazione raggiunta, ad es. l'esatto processo inverso, questa configurazione si modifichi gradatamente a ritroso per ritornare quella iniziale punto per punto ⁽¹⁾.

A spese di chi può compiersi questo processo inverso? La risposta sta nel mettere in conto un altro elemento essenziale del fenomeno, fin qui trascurato: lo stato di costrizione interna che nasce nel solido, per il fatto che questo si oppone a ogni cambiamento di forma che non gli sia naturale; nasce così intorno a ogni punto una distribuzione di *reazioni elastiche* che, nel processo di andata, va mano mano intensificandosi al variare delle forze esterne.

I due fatti: il manifestarsi e lo svilupparsi della deformazione, il presentarsi e l'intensificarsi delle reazioni elastiche, vanno di pari passo; come conseguenza, il corpo immagazzina allora una energia di deformazione a carattere posizionale, che va cioè mano mano crescendo fino allo stadio finale: è appunto in virtù di questa energia se, allo svanire delle forze esterne, il corpo può riguadagnare la sua configurazione iniziale.

Osservati da tale punto di vista, questi due fatti sono dunque effetti distinti di una stessa causa: le forze esterne. Si intuisce però che fra essi, in quanto concomitanti e per quanto è sostanzialmente implicito nella premessa che l'uno svanisca con l'altro, non può che sussistere un intimo legame, cosiffatto che uno qualunque dei due possa essere considerato come funzione dell'altro; e allora è anche possibile, considerando il regime di equilibrio raggiunto nel suo stato attuale, prescindere in astratto dalla vera causa prima e riguardare ognuno dei due fatti come causa dell'altro e quindi questo come effetto del primo, in un legame di stretta dipendenza reciproca.

⁽¹⁾ Naturalmente si intende esclusa con ciò la possibilità di un moto rigido di tutto il corpo, al che dovrà sapersi opporre, come qui supponiamo, il complesso dei vincoli che gli sono imposti.

È evidente il vantaggio che offre questo secondo punto di vista: per esso infatti ognuno dei due aspetti del fenomeno della deformazione, quello geometrico ⁽¹⁾ e quello statico, può essere studiato a sè, indipendentemente cioè non solo dalla causa vera che lo ha determinato, ma anche dall'altro, così da riconoscerne più comodamente le proprietà specifiche e individuare quegli elementi che valgono a caratterizzarlo.

È in tal modo che le nozioni, fin qui intuitive, di stato di tensione e di deformazione dell'intorno di un punto, diventano di dominio della Teoria Matematica dell'Elasticità, acquistando il rigore di concetti regolati da precise leggi geometriche ed analitiche, le quali sono esse appunto a individuare quegli elementi da cui ciascuno dei due aspetti resta caratterizzato; per rifondere, dopo, questi due aspetti nell'unico sotto cui si presenta di fatto il fenomeno, basterà allora stabilire fra i detti elementi quel legame che sia il più idoneo a tradurre la suaccennata legge di dipendenza reciproca.

* * *

Non si può negare valore a questa impostazione matematica del problema, per quanto nella sua astrazione tolga senza dubbio ad esso, per così dire, il suo calore fisico e raggiunga il rigore che le è proprio solo fondandosi su ipotesi restrittive, che sono poi in effetti prive di un fedele riscontro reale.

E invero questa facile obiezione, mentre può reggere finchè si resti in problemi costruttivi semplici, in cui l'esperienza o l'intuizione possono ancora fare da guida sicura per altre vie, cade invece inevitabilmente in quei problemi complessi, e sono ormai i più, che la tecnica costruttiva si trova pure ad affrontare e per i quali non si ha invece niente di altrettanto

⁽¹⁾ La deformazione di un corpo fisico si presenta invero come un fenomeno molto più complesso, che può comportare fino a un cambiamento di stato del corpo; quello geometrico sotto cui si è soliti riguardarla è soltanto uno dei molteplici aspetti, anche se di solito il più appariscente.

semplice da invocare; sicchè l'unico indizio su di essi in qualche modo probativo è quello che ci deriva dalla loro impostazione teorica.

Noi analizzeremo perciò separatamente, come detto sopra, la deformazione e lo stato di tensione dell'intorno di un punto, per ben fissare, attraverso facili applicazioni, quegli elementi che valgono a caratterizzare l'uno e l'altro stato in condizioni generali e particolari; passeremo quindi, attraverso la nozione di potenziale, ai principi fondamentali che regolano l'equilibrio elastico.

Tutto ciò, in un primo tempo, per un solido con proprietà generali; ci restringeremo in un secondo tempo all'ipotesi del *solido omogeneo e isotropo*, in quanto questa ipotesi, pur allontanandoci più che mai dalla realtà fisica, comporta notevoli semplificazioni negli sviluppi formali e aiuta meglio in una, sia pure fittizia, interpretazione fisica dei risultati che vengono via via stabiliti.

Ci fermeremo quindi, come solido tipico omogeneo ed isotropo, al solido di S. Venant, per studiarvi i vari casi di sollecitazione semplice e composta; questi casi costituiranno poi la sistematica schematizzazione dei reali problemi costruttivi sulle travi, isostatice e iperstatiche, e sui sistemi elastici piani comunque complessi.