

Si conclude che già il profilo del n° 20, che è il minore di quelli in commercio, può essere impiegato per realizzare la nostra colonna.

H - TRAVI CARICATE DI PUNTA

Esercizio 61 — Calcolare i carichi assiali che può sopportare con grado di sicurezza $\nu = 5$ una trave ad ali larghe Differdange I P 24 nelle due diverse ipotesi che agli estremi sia incernierata senza attrito ovvero incastrata rigidamente e, in ognuno dei casi, per le due diverse lunghezze:

$$l = 4 \text{ m} \quad ; \quad l = 10 \text{ m}$$

Si assumano: $E = 2100 \text{ t/cm}^2$; $\sigma_R = 3800 \text{ Kg/cm}^2$; $k' = 760 \text{ Kg/cm}^2$.



La sollecitazione di *carico di punta*, per il suo frequente presentarsi nella pratica (si pensi alle aste compresse nelle travature reticolari, alle bielle negli organi delle macchine, ai piedritti o colonne di sostegno di architravi, ecc.) ma più specialmente per le sue caratteristiche tutto speciali, richiede da parte del progettista un'attenzione particolare.

Mentre in linea strettamente teorica un solido caricato di punta si presenta con la semplicità di un solido soggetto a forza normale semplice P (cfr. Ess. 14 ÷ 20) per cui la tensione nel punto generico della generica sezione trasversale si calcola con la nota formula:

$$\sigma = \frac{P}{A} ,$$

e il cui dimensionamento si fa limitando questa tensione al carico di sicurezza k'' , ragioni pratiche e sostanziali distinguono nettamente i due tipi di sollecitazione. Tra le ragioni di carattere pratico, la inevitabile eterogeneità del materiale, le imperfezioni di forma, l'impossibilità di realizzare le esatte condizioni di posa, ecc. inducono costantemente una certa

eccentricità nel carico; ciò sembrerebbe avvicinare le condizioni di un solido caricato di punta a quelle di un solido caricato parallelamente all'asse; ma la distinzione anche da questo caso è netta e sta nel fatto che l'eccentricità, sempre piccola quando si abbiano le debite cure nella posa in opera, è in ogni caso indeterminata sia in grandezza che in direzione, non potendosi prevedere a priori in che misura e con che modalità pesino esattamente in essa le varie cause che vi hanno influenza; e questa diversità non valga a diminuirla la circostanza che il metodo di calcolo che si segue per i solidi caricati di punta (almeno nel periodo elastico) si deduce al limite da quello per i solidi caricati parallelamente all'asse: ciò è, e deve rimanere, soltanto un espediente analitico.

La ragione sostanziale però che ancor più della detta eccentricità vale a differenziare la sollecitazione di forza normale semplice e quella di carico di punta, è quella stessa che differenzia il caso di carico parallelo all'asse e quello di forza normale eccentrica: *l'esiguità delle dimensioni trasversali del solido a confronto della sua lunghezza.*

Tale circostanza fa sì che, per un'azione flettente di natura qualsiasi, come vibrazioni elastiche, urti laterali ecc., che intervenga anche incidentalmente e per poco ad allontanare il solido dalla sua configurazione rettilinea, il carico assiale, *anche a prescindere dall'eccentricità*, desta lungo il solido dei momenti flettenti che tendono ad accentuare la deformazione: ciò che più e prima della semplice compressione può comprometterne la stabilità.

È questo il fenomeno della *inflessione laterale dei solidi caricati di punta*, ed è questo il pericolo che si tratta di prevenire col calcolo.

Ora è noto che questo calcolo procede diversamente secondochè tale pericolo si manifesti nel periodo elastico o nel periodo plastico della tensione σ_k corrispondente al carico che produce il cedimento laterale: *tensione critica*; la distinzione dei due periodi è legata, per ogni materiale, alle dimensioni del solido e alle sue condizioni di vincolo.

Quanto a queste ultime giova ricordare che, teoricamente, le configurazioni possibili di equilibrio dell'asse sono assimilabili a configurazioni sinoidali, con uno o più nodi. In relazione anche alle dimensioni del solido, si giudica allora del presentarsi dell'inflessione laterale nel periodo elastico o nel periodo plastico, in base al valore che assume il rapporto:

$$\lambda = \frac{l_1}{\rho_{\min}},$$

che prende notoriamente il nome di *grado di snellezza* o semplicemente di *snellezza della trave*; in tale rapporto, l_1 è la *lunghezza libera di flessione* della trave, definita come distanza fra due nodi consecutivi della sinusoide che rappresenta la configurazione deformata dell'asse — nonzione questa che consente di ricondurre ognuno dei casi più frequenti di vincolo a quello tipico di un solido incernierato agli estremi di lunghezza l_1 — e ρ_{\min} è il più piccolo dei raggi d'inerzia rispetto a quegli assi baricentrici che i vincoli consentono come possibili assi di flessione.

Precisamente: se λ supera un certo valore limite λ_P , l'inflessione laterale si presenta nel periodo elastico di σ_k ; se rimane al di sotto di detto limite (ma tuttavia supera un limite inferiore λ_i pure proprio di ogni materiale) l'inflessione si presenta nel periodo plastico.

Nel primo caso il *carico critico*, il carico cioè che produce tale inflessione — praticamente quindi il *carico di rottura* della trave — si determina colla formula di Eulero:

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l_1^2} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2};$$

nel secondo si determina invece, di solito, mediante formule empiriche come quelle di Tetmajer, o semipiriche come quella di Rankine-Schwarz, ovvero col metodo omega (ω), ecc.

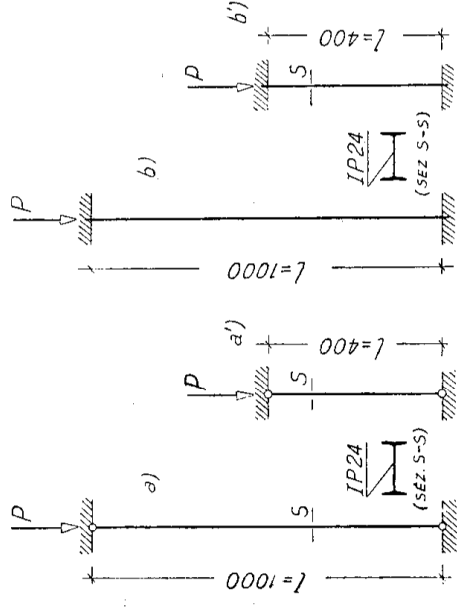
Secondo l'enunciato del problema, le caratteristiche elastico-meccaniche del materiale costituente la

trave sono quelle di un acciaio dolce; le caratteristiche geometriche del IP 24 sono poi queste altre:

$$A = 111 \text{ cm}^2 ; \quad r_{\min} = 6,11 \text{ cm} .$$

Determineremo i carichi ammissibili separatamente per le due condizioni di vincolo supposte:

a) *Trave vincolata agli estremi con cerniere prive di attrito (figura 68 a) e a')*).



La lunghezza libera di flessione coincide, per questa condizione, con la lunghezza effettiva della trave: $l_1 \equiv l$. Per $l = 10 \text{ m}$ è allora:

$$\lambda = \frac{1000}{6,11} \cong 164 .$$

Poichè allora per l' acciaio dolce è $\lambda_P = 105$, il carico critico ci è fornito in questo caso dalla formula di Eulero:

$$P_k = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} = \frac{9,86 \times 2150 \times 111}{164^2} = \frac{2\,352\,089}{26\,896} \cong 87 \text{ t} ;$$

il carico ammissibile col grado di sicurezza richiesto $\nu = 5$ è allora:

$$P_a = \frac{P_k}{\nu} = \frac{87}{5} \cong 17,4 \text{ t} .$$

Per $l = 4 \text{ m}$ è invece:

$$\lambda = \frac{400}{6,11} \cong 65,5 ,$$

e l'inflessione laterale si produce pertanto nel periodo plastico della tensione critica σ_k . Usando per es. la formula empirica del Tetmajer, che per l' acciaio dolce fornisce tale tensione sotto l'espressione:

$$\sigma_k = 3,10 - 0,0114 \lambda ,$$

si ha per il carico ammissibile il valore:

$$P_a = \frac{P_k}{\gamma} = \frac{A \sigma_k}{\gamma} = \frac{111 (3,10 - 0,0114 \times 65,5)}{5} \cong 52,24 \text{ t} .$$

Con la formula di Rankine - Schwarz:

$$P_a = \frac{k'' A}{1 + \beta \lambda^2} ,$$

che fornisce direttamente il carico ammissibile e nella quale, trattandosi di acciaio, è da porre per il coefficiente β il valore $\beta = 0,00014$, avremmo invece ottenuto:

$$P_a = \frac{0,760 \times 111}{1 + 0,00014 \times 65,5^2} = \frac{84,36}{1 + 0,6} \cong 52,7 \text{ t} ,$$

valore di poco diverso da quello di sopra.

b) *Trave incastrata agli estremi* (fig. 68 b) e b').

Supponiamo in un primo tempo che gli incastri siano rigidi; essi sono allora atti a ridurre la lunghezza libera di flessione della trave alla metà della sua lunghezza effettiva: $l_1 = l/2$; per $l = 10 \text{ m}$ è così $l_1 = 500 \text{ cm}$, e conseguentemente:

$$\lambda = \frac{500}{6,11} \cong 82 ;$$

impiegando ad es. la formula di Tetmajer risulta:

$$P_a = \frac{A \sigma_k}{\gamma} = \frac{111 (3,10 - 0,0114 \times 82)}{5} \cong 48,1 \text{ t} .$$

Per $l = 4 \text{ m}$ è analogamente $l_1 = 200 \text{ cm}$, e quindi:

$$\lambda = \frac{200}{6,11} = 32,7$$

e dalla stessa formula:

$$P_a = \frac{111 (3,10 - 0,0114 \times 32,7)}{5} \cong 60,5 \text{ t} .$$

Se invece, più rispondentemente al vero, gli inca-

stri non sono rigidi, sicchè la loro facoltà a ridurre la lunghezza libera di flessione è minore di quella riconosciuta di sopra, possiamo ritenere che sia $l_1 = 0,75 l$.

Per $l = 10$ m è allora:

$$l_1 = 0,75 \times 10 = 7,5 \text{ m} = 750 \text{ cm}, \quad \lambda = \frac{750}{6,11} = 123,$$

e dalla formula di Eulero:

$$P_a = \frac{P_k}{\nu} = \frac{\pi^2 EA}{\nu \lambda^2} = \frac{9,86 \times 2150 \times 111}{5 \times 123^2} \cong 31,1 \text{ t}.$$

Per $l = 4$ m è invece:

$$l_1 = 0,75 \times 4 = 3,0 \text{ m} = 300 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{300}{6,11} = 49,1$$

e dalla formula di Tetmajer:

$$P_a = \frac{111 (3,1 - 0,0114 \times 49,1)}{5} \cong 56,4 \text{ t}.$$

Si notino i notevoli scarti che subiscono al variazione della lunghezza e della condizione di vincolo i carichi critici, e quindi i carichi ammissibili. La Tabella che segue dà al proposito una visione riassuntiva.

Lunghezza l	Vincoli agli estremi							
	Cerniere		Perfetti		Incastri		Imperfetti	
	λ	P_a t	λ	P_k t	λ	P_k t	λ	P_k t
4	65,5	~ 52,5	32,7	60,5	60,5	49,1	49,1	56,4
10	164	17,4	82	48,1	48,1	123	123	31,1

Esercizio 62 — Progettare con grado di sicurezza $\nu = 3,5$ come profilato ad ali larghe Differdange IP, una colonna lunga 6 m incernierata agli estremi senza attrito e destinata a un carico $P = 80$ t,

Il materiale base sia un acciaio semiduro di caratteristiche elasticomeccaniche:

$$E = 2150 \text{ t/cm}^2, \quad \sigma_R = 6 \text{ t/cm}^2.$$

Da quanto si è richiamato all'Esercizio precedente sulla sollecitazione di carico di punta, per realizzare la trave in sede di progetto non si può che procedere per tentativi, stante l'incertezza iniziale sulla via da seguire per la ricerca del carico critico.

Dovremo quindi nel caso nostro prefissare un n° del profilato e, sulle sue caratteristiche geometriche, determinare la snellezza che ne consegue per la trave in riguardo alla lunghezza e alle condizioni di vincolo assegnate; potremo allora, dal confronto di λ con λ_P , giudicare se l'inflessione laterale si presenta nel periodo elastico o in quello plastico, calcolare il carico critico P_k e, dividendo questo per ν , il carico ammissibile P_a ; perchè il profilato prescelto soddisfi al problema, dovrà risultare P non superiore a P_a .

Prefissando qui in un primo tentativo il IP 28, per il quale le caratteristiche geometriche che interessano sono:

$$A = 144 \text{ cm}^2; \quad \rho_{\min} = 7,14 \text{ cm},$$

ed essendo d'altra parte (cfr. l'Esercizio precedente) $l_1 \equiv l = 6 \text{ m}$, risulta:

$$\lambda = \frac{600}{7,14} = 84.$$

Poichè allora per l'acciaio semiduro la snellezza limite λ_P — al di sopra della quale è da adottare per la ricerca di P_k la formula di Eulero — vale $\lambda_P = 89$, dovremo usare una delle formule relative al periodo plastico.

Quella di Tetmajer, ad es., dà per la tensione critica l'espressione:

$$\sigma_k = 3,35 - 0,0062 \lambda$$

da cui per il carico critico quest'altra:

$$P_k = A \sigma_k = A (3,35 - 0,0062 \lambda).$$

Coi nostri dati numerici risulta:

$$P_k = 144 (3,35 - 0,0062 \times 84) \cong 407 \text{ t ,}$$

e quindi per il carico ammissibile con grado di sicurezza $\nu = 3,5$ il valore:

$$P_a = \frac{P_k}{\nu} = \frac{407}{3,5} = 116 \text{ t ,}$$

di troppo superiore a quello cui la colonna è destinata. Con la formula di Rankine - Schwarz, essendo da assumersi:

$$k'' = \frac{\sigma_R}{\nu} = \frac{6}{3,5} \cong 1,71 \text{ t/cm}^2 \text{ ,}$$

avremmo ottenuto:

$$P_a = \frac{k'' A}{1 + \beta \lambda^2} = \frac{1,71 \times 154}{1 + 0,00014 \times 82^2} \cong 124 \text{ t ,}$$

valore ancora superiore al precedente.

Il IP 26 ha invece le caratteristiche:

$$A = 121 \text{ cm}^2 \text{ ,} \quad \rho_{\min} = 6,61 \text{ cm}$$

sicchè:

$$\lambda = \frac{600}{6,61} \cong 90,8 \text{ .}$$

Facendo ricorso ora, com'è lecito per essere $\lambda > 89$, alla formula di Eulero, si ottiene di seguito:

$$P_k = \frac{\pi^2 EA}{\lambda^2} = \frac{9,86 \times 2150 \times 121}{90,8^2} \cong 331 \text{ t ,}$$

da cui:

$$P_a = \frac{P_k}{\nu} = \frac{311}{3,5} = 89 \text{ t .}$$

Poichè, da analogo calcolo, per il IP 24 il carico ammissibile risulta minore di 80 t ($P_a = 69,8$ t) si conclude che il IP 26 è il minimo numero atto a realizzare la nostra colonna.

Esercizio 63 — Determinare la sezione rettangolare con le dimensioni b ed h nel rapporto $h = 7/5 b$, che si deve assegnare a una trave in legno di lunghezza $l = 5 m$ incernierata agli estremi, perchè sopporti con grado di sicurezza $\nu = 8$ un carico assiale $P = 8 t$.

—♦—

Fra gli assi di flessione della sezione trasversale, essendo la trave libera di inflettersi in tutti i piani per il suo asse, il più pericoloso è notoriamente la mediana maggiore; il grado di sicurezza ν dovrà allora essere assicurato nel piano per tale asse. Il raggio di inerzia relativo ha la nota espressione:

$$\rho = \frac{b \sqrt{3}}{6}$$

e allora, essendo $l_1 \equiv l = 500$ cm, ne risulta per λ quest'altra:

$$\lambda = \frac{l_1}{\rho} = \frac{2 l \sqrt{3}}{b} \cong \frac{1730}{b}.$$

Ciò posto, il dimensionamento della sezione resistente della trave può essere raggiunto per successiva approssimazione, assegnando cioè via via, a partire da un primo valore arbitrario, valori sempre più convenienti per b .

Piuttosto però che avventurarci, senza alcun orientamento, in tentativi che soltanto con una buona pratica costruttiva possono andare direttamente a segno, conviene individuare prima, anche se di massima, l'ordine di grandezza delle dimensioni della sezione trasversale; ciò può farsi determinando quelle che le competono al limite del periodo elastico, per la snellezza cioè coincidente col limite inferiore λ_P ; calcolato allora il corrispondente carico critico e messo a confronto, in base al grado di sicurezza ν , con quello al quale la trave è destinata, si potrà infatti giudicare in che senso dovranno eventualmente essere variate le dimensioni trovate; insieme poi, anche, se l'inflexione laterale per la trave nelle condizioni effettive si manifesterà nel periodo elastico o in quello plastico della tensione critica σ_k .

Poichè per il legno è da ritenersi $\lambda_P = 100$, introdotto questo valore nell'espressione di λ , si ricava per b il valore limite:

$$b_P = 17,3 \text{ cm},$$

e quindi, tenendo presente la relazione che lega b ed h , per l'area A della sezione trasversale quest'altro:

$$A_P = b_P h_P = \frac{7}{5} \times \overline{17,3^2} = 420 \text{ cm}^2.$$

La formula di Eulero, essendo per il legno mediamente $E = 100 \text{ t/cm}^2$, fornisce allora per il carico critico limite il valore:

$$P_{kP} = \frac{9,86 \times 100 \times 420}{100^2} = 41,4 \text{ t}.$$

Poichè il carico critico della trave da progettare, capace di assicurare il grado di sicurezza $\nu = 8$, deve risultare:

$$P_k = 8P = 8 \times 8 = 64 \text{ t},$$

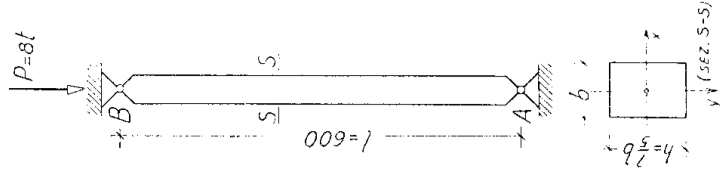


Fig. 69 i risultati di sopra ci avvertono che le dimensioni trovate sono in difetto; e poichè aumentandole risulta $\lambda < \lambda_P$, dicono di più che la nostra trave andrà soggetta a carico di punta necessariamente nel periodo plastico; siccome poi, d'altra parte, la differenza fra i due carichi critici non è eccessiva, per arrivare alla soluzione definitiva sarà sufficiente un piccolo scostamento dai valori b_P e h_P .

Posto così ad es. $b = 20$ cm, si ha:

$$h = \frac{7}{5} b = 28 \text{ cm}; \quad A = 20 \times 28 = 560 \text{ cm}^2; \quad \lambda = \frac{1730}{20} = 86,5,$$

e impiegando la formula di Tetmajer relativa al legno:

$$\sigma_k = 0,293 - 0,00194 \lambda,$$

si ricava subito per il carico ammissibile il valore:

$$P_a = \frac{A \sigma_k}{\gamma} = \frac{560 (0,293 - 0,00194 \times 86,5)}{8} = 8,75 \text{ t} ,$$

di poco superiore a quello assegnato.

Poichè scendendo a $b = 19 \text{ cm}$, il carico ammissibile scende sensibilmente ($P_a = 7,35 \text{ t}$) ed è preferibile adottare delle dimensioni intere, possiamo senz'altro assumere come definitivi per tali dimensioni i valori:

$$b = 20 \text{ cm} \quad ; \quad h = 28 \text{ cm} .$$

Esercizio 64 — Realizzare nel modo più economico come profilato normale a I una trave di lunghezza $l = 7 \text{ m}$, atta a reggere con grado di sicurezza $\gamma = 5$ il carico assiale $P = 26 \text{ t}$, nell'ipotesi che sia incastrata agli estremi.

Non essendo esplicitamente assegnato il grado d'incastrato, assumeremo, com'è sempre consigliabile in pratica (cfr. l'Esercizio 61):

$$l_1 = 0,75 \text{ l} = 0,75 \times 700 = 525 \text{ cm} .$$

Prevedendo come sufficiente il NP I 280, le cui caratteristiche geometriche, facilmente desumibili sui dati dei manuali, sono:

$$A = 61,1 \text{ cm}^2 \quad ; \quad \rho_{\min} = \sqrt{\frac{364}{61,1}} \cong 7,72 \text{ cm} ,$$

si trova:

$$\lambda = \frac{525}{7,72} \cong 68,1 ,$$

e dalla formula di Tetmajer, supposto di impiegare un acciaio dolce:

$$P_a = \frac{A \sigma_k}{\gamma} = \frac{61,1 (3,10 - 0,0114 \times 68,1)}{5} \cong 28,4 \text{ t} .$$

Il NP I 260 darebbe invece:

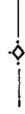
$$A = 53,4 \text{ cm}^2; \quad \rho_{\min} = \sqrt{\frac{288}{53,4}} \cong 7,34 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{525}{7,34} \cong 71,5;$$

$$P_a = \frac{53,4 (3,10 - 0,0114 \times 71,5)}{5} \cong 24,4 \text{ t}.$$

Per assicurare il grado voluto di sicurezza, il minimo profilo normale a I che può essere impiegato è dunque il NP I 280.

Esercizio 65 — Una colonna AB lunga $l = 7 \text{ m}$ incastrata all'estremità inferiore e vincolata superiormente a cerniera, è destinata a un carico assiale di compressione $P = 80 \text{ t}$.

Verificarne la stabilità nella ipotesi che sia formata da un profilo ad ali larghe Differdange IP 30.



Sebbene in queste condizioni di vincolo (fig. 70), a differenza degli altri casi finora esaminati, la configurazione della deformata più semplice sotto il primo carico critico non sia strettamente assimilabile a una porzione di sinusoide, pure è lecito, con buona approssimazione, assumere per la lunghezza libera di flessione il valore:

$$l_1 = \frac{2}{3} l = \frac{2}{3} \times 700 \cong 467 \text{ cm}.$$

Poichè allora le caratteristiche del IP 30 sono:

$$A = 154 \text{ cm}^2, \quad \rho_{\min} = 7,65 \text{ cm},$$

risulta:

$$\lambda = \frac{467}{7,65} \cong 61.$$

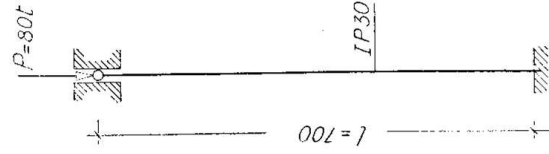


Fig. 70

Supposto che il materiale base sia un acciaio semiduro, per cui la snellezza limite vale $\lambda_P = 89$, e che si intenda raggiungere almeno un grado di sicurezza $\nu = 5$,

dalla relativa formula di Tetmajer si ha per il carico ammissibile:

$$P_a = \frac{A \sigma_k}{\nu} = \frac{154 (3,35 - 0,0062 \times 61)}{5} \cong 91,6 \text{ t},$$

valore assai superiore a quello cui la trave è destinata.

Usando la formula di Rankine-Schwarz, poichè per l'acciaio semiduro è $\sigma_R = 6 \text{ t/cm}^2$, e quindi per $\nu = 5$:

$$k'' = \sigma_R/\nu = 6/5 = 1,2 \text{ t/cm}^2,$$

risulterebbe invece per P_a quest'altro valore:

$$P_a = \frac{k'' A}{1 + \beta \lambda^2} = \frac{1,2 \times 154}{1 + 0,00014 \times 61^2} \cong 121 \text{ t},$$

il quale conferma con anche maggior larghezza la conclusione cui si era giunti di sopra.

Esercizio 66 — La biella di accoppiamento delle ruote di una locomotiva può riguardarsi come una trave prismatica di lunghezza $l = 1,80 \text{ m}$ a sezione rettangolare con dimensioni b e $h = 3b$. Le teste articolate ai perni delle manovelle degli assi accoppiati, possono ritenersi girevoli senza attrito per la flessione nel piano verticale, incastrate per la flessione nel piano orizzontale.

Si realizzi la biella in acciaio dolce ($E = 2150 \text{ t/cm}^2$, $\sigma_E = 2000 \text{ kg/cm}^2$) con grado di sicurezza $\nu = 8$, prescindendo dal peso proprio e dalla forza centrifuga che si genera nel movimento del sistema, e nell'ipotesi che su ciascuna ruota degli assi accoppiati gravi il carico $Q = 8 \text{ t}$ e che il coefficiente di aderenza fra ruote e guide sia $a = 1/4$.

Avendo ammesso per il coefficiente di aderenza fra ruote e guide il valore $a = 1/4$, il carico utile, cioè quello a cui deve resistere stabilmente la biella, vale:

$$P = \frac{1}{4} Q = 2 \text{ t}.$$

Da tale carico la biella risulta impegnata di punta.

Nel piano verticale, la lunghezza libera di flessione della biella, stanti le condizioni di vincolo ammesse nell'enunciato, coincide con la lunghezza effettiva: $l_1 \equiv l = 1,8$ m. L'asse di flessione relativo è d'altronde quello indicato con x nella figura 71b); le espressioni del momento e del raggio d'inerzia e, quindi, della snellezza che interessano detto piano, tenuto conto della relazione $h = 3b$, sono perciò le seguenti;

$$J_x = \frac{1}{12} bt^3 = \frac{1}{36} h^4; \quad \rho_x = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{h\sqrt{3}}{6};$$

$$\lambda_1 = \frac{6l}{h\sqrt{3}} = \frac{2l\sqrt{3}}{h} \cong \frac{623}{h}.$$

Nel piano orizzontale, la lunghezza libera di flessione si riduce invece alla metà di quella effettiva:

$$l_1 = \frac{1}{2} l = 0,9 \text{ m};$$

L'asse di flessione diviene l'asse y e gli elementi di cui sopra prendono la forma:

$$J_y = \frac{1}{12} hb^3 = \frac{1}{4} b^4; \quad \rho_y = \frac{b\sqrt{3}}{6}; \quad \lambda_2 = \frac{6l_1}{b\sqrt{3}} = \frac{l\sqrt{3}}{b} \cong \frac{311}{b}.$$

Per progettare la biella, dovremo, come al solito, procedere per tentativi; potremo però qui seguire due vie: o ricercare separatamente le soluzioni nei due piani orizzontale e verticale, e confrontarle quindi fra loro scegliendo la più restrittiva — quella cioè che assegna alla sezione trasversale, come minime, le dimensioni maggiori — ovvero dimensionare per uno dei due piani e verificare quindi per l'altro. Fra le due vie, quest'ultima si presenta però come la più conveniente: delle due snellezze sopra indicate, in virtù della relazione stabilita fra le dimensioni della sezione, è infatti in ogni caso maggiore quella relativa al piano orizzontale, l'altra risultando soltanto i $2/3$ di essa; ciò significa che, malgrado l'incastro, il piano orizzontale si presenta come più pericoloso

per l'inflessione laterale. Svincolandoci dalla detta relazione, potremmo evidentemente raggiungere la condizione di ugual resistenza nei due piani, imponendo l'uguaglianza delle due snellezze; ciò porterebbe, anzichè a quella fissata, a quest'altra relazione fra b ed h : $h = 2b$. Noi conserveremo però la prima.

Come già notammo all'Esercizio 63, potremmo anche qui, onde evitare eventuali tentativi inutili, deter-

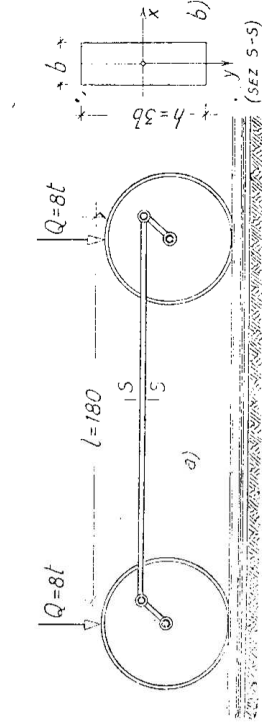


Fig. 71

minare le dimensioni che la biella richiederebbe al limite del periodo elastico, quando fosse cioè $\lambda_2 \equiv \lambda_P = 105$.

Seguendo il calcolo ormai noto, troveremo così per b_P , h_P e per il carico critico corrispondente a queste condizioni, i valori rispettivi:

$$b_P = 2,9 \text{ cm} ; \quad h_P = 8,88 \text{ cm} ; \quad P_{kP} = 51 \text{ t} .$$

Poichè però il carico critico nelle condizioni effettive deve invece appena risultare:

$$P_k = \nu P = 8 \times 2 = 16 \text{ t} ,$$

le dimensioni così trovate ci servono solo relativamente; conservano comunque sempre il pregio di un certo riferimento, soprattutto in quanto ci indicano il campo di funzionamento della biella: dovendo infatti aumentarne la snellezza col diminuire le dimensioni della sezione, tale campo risulta necessariamente quello elastico.

Fissiamo per un primo tentativo $b = 2$ cm; è allora:

$$h = 3 \times 2 = 6 \text{ cm} ; \quad \lambda_2 = \frac{311}{2} = 155,5 ;$$

e dalla formula di Eulero, per $\nu = 8$, si ottiene il carico ammissibile:

$$P_a = \frac{P_k}{\nu} = \frac{\pi^2 EA}{\nu \lambda^2} = \frac{9,86 \times 2150 \times 2 \times 6}{8 \times 155,5^2} = 1,31 \text{ t} .$$

Mentre il valore $b_P = 2,9$ cm è dunque eccessivo, quello $b = 2$ cm ora fissato risulta insufficiente; tra questi due limiti riesce però ormai facile individuare il valore giusto.

Posto ad es. $b = 2,3$ cm, risulta:

$$h = 2,3 \times 3 = 6,9 \text{ cm}; \quad \lambda_2 = \frac{311}{2,3} = 135;$$

$$P_a = \frac{9,86 \times 2150 \times 2,3 \times 6,9}{8 \times 135^2} = 2,3 \text{ t}$$

valore quest'ultimo di poco superiore a quello cui la biella è destinata.

Volendo, potremmo spingere ulteriormente l'approssimazione; in pratica risultano però più che sufficienti i valori arrotondati:

$$b = 2,2 \text{ cm}; \quad h = 7 \text{ cm}.$$

Esercizio 67 — Si calcoli con sezione circolare piena e con grado di sicurezza $\gamma = 7$ la biella di collegamento allo stantuffo di una macchina a vapore, destinata alla massima compressione $P = 20$ t. Si sa che la biella ha la lunghezza $l = 150$ cm e che il materiale base è un acciaio con carico di snervamento $\sigma_s = 3,1$ t/cm².

—♦—

Poichè la biella sopporta la massima compressione in corrispondenza della posizione in cui il suo asse risulta allineato con quello del cilindro, dal carico $P = 20$ t essa risulta caricata di punta.

Quanto alle condizioni di vincolo, sarebbe già sufficiente approssimazione ammettere un incastro imperfetto agli estremi, per modo da assumere $l_1 = 0,75$ l.

È però a vantaggio della stabilità — e far ciò torna sempre opportuno quando, come qui, si tratta di un organo di piccole dimensioni cui sono però in compenso affidate mansioni delicate — supporre la biella incernierata agli estremi, cioè assumere per la lunghezza

libera di flessione il massimo valore raggiungibile $I_1 = I$ (*).

Detto r il raggio della sezione trasversale della biella, è noto che rispetto all'asse baricentrico geometrico è:

$$J = \frac{\pi r^4}{4}; \quad \rho = \frac{r}{2};$$

relativamente a ogni piano per l'asse, la snellezza ha perciò l'espressione:

$$\lambda = \frac{I_1}{\rho} = \frac{l}{\rho} = \frac{2l}{r} = \frac{300}{r}.$$

Data la speciale forma della sezione — e questa idea potrebbe d'altronde sorgere anche per forme meno semplici — potremmo pensare di individuare il diametro della biella limitando, in base alla formula di Eulero, il momento di inerzia J della sua sezione trasversale al valore minimo:

$$J_{\min} = \frac{P_k I_1^2}{\pi^2 E},$$

quando si identificasse ivi il carico critico P_k col prodotto del carico cui la trave è destinata per il coefficiente ν di sicurezza; tale procedimento non è però lecito, in quanto, dato che assegnare il carico critico importa anche una determinata snellezza, imporre al modo suddetto un minimo a J , equivale a vincolare automaticamente la snellezza al periodo elastico; d'altra parte, attribuendo, come si farebbe in tal modo, valore incondizionato alla formula di Eulero, cioè validità di costante al termine E che vi compare, si può arrivare all'assurdo che ne risulti invece per la trave una snellezza inferiore a λ_P .

È proprio questo assurdo che si risconterebbe nel caso attuale; risulterebbe infatti:

$$P_k = \nu P = 7 \times 20 = 140 \text{ t},$$

(*) Si intende escluso naturalmente il caso di un estremo incastrato e l'altro libero.

sicchè sostituendo nella espressione di J_{\min} , con $E = 2150 \text{ t/cm}^2$:

$$J_{\min} = \frac{140 \times 150^2}{9,86 \times 2150} \cong 149 \text{ cm}^4$$

e quindi anche:

$$r = \sqrt[4]{\frac{4 J_{\min}}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{4 \times 149}{\pi}} \cong 3,7 \text{ cm};$$

ora la snellezza corrispondente a questo valore del raggio è:

$$\lambda = \frac{300}{r} = \frac{300}{3,7} \cong 81,$$

che è inferiore al valore limite $\lambda_P = 105$ caratteristico dell'acciaio ordinario; e l'assurdo, insistiamo, nasce dal fatto che per $\lambda = 81$ il termine E che compare nella formula di Eulero non ha più alcun significato.

Logica come operazione a sè, e insieme capace di una buona indicazione di massima, è invece, come già altre volte abbiamo avuto occasione di consigliare, quella di fissare dei limiti per le dimensioni della sezione trasversale sul confronto del carico νP col carico critico che compete alla snellezza limite λ_P .

Da:

$$\lambda_P = \frac{300}{r_P} = 105$$

si ricava:

$$r_P = \frac{300}{105} \cong 2,86 \text{ cm},$$

che corrisponde alla sezione:

$$A \cong 25,7 \text{ cm}^2.$$

È pertanto:

$$P_{lit} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda_P^2} = \frac{9,86 \times 2150 \times 25,7}{105^2} \cong 49,4 \text{ t},$$

valore notevolmente inferiore alle 140 tonnellate da raggiungere; ciò dice che la biella, dovendo avere un raggio maggiore di r_P , lavorerà a carico di punta necessariamente nel periodo plastico della tensione σ_k .

Nel tentativo di stabilire un limite superiore per r , fissiamo ad es. $r = 5$ cm; è allora:

$$A = 78,54 \text{ cm}^2; \quad \lambda = \frac{300}{5} = 60$$

e per il carico ammissibile col voluto grado di sicurezza, utilizzando ad es. la formula di Tetmajer, il valore:

$$P_a = \frac{A \sigma_k}{\nu} = \frac{78,54 (3,10 - 0,0114 \times 60)}{7} = 27,1 \text{ t},$$

che supera P .

Colla formula di Rankine-Schwarz, essendo per l'acciaio dolce $\sigma_R = 3,8 \text{ t/cm}^2$ e quindi $k'' = 3,8/7 \cong 0,543 \text{ t/cm}^2$, troveremo:

$$P_a = \frac{k'' A}{1 + \beta \lambda^2} = \frac{0,543 \times 78,54}{1 + 0,00014 \times 60^2} \cong 28,4 \text{ t},$$

valore di poco discosto da quello di sopra.

Fra i due limiti $r = 2,86$ cm e $r = 5$ cm così stabiliti, riesce ormai facile individuare una soluzione soddisfacente.

Posto per es. $r = 4,4$ cm, sicchè $A = 60,8 \text{ cm}^2$, $\lambda = 300/4,4 \cong 68,2$, risulta:

$$P_a = \frac{60,8 (3,10 - 0,0114 \times 68,2)}{7} = 20,2 \text{ t},$$

che coincide quasi esattamente col valore richiesto.

La biella può dunque essere realizzata con un tondo in acciaio dolce $\phi = 88$ mm.

Esercizio 68 — Progettare con profilati normali a doppio T, realizzando per le singole aste le disposizioni schematiche indicate, il sistema elastico sotto raffigurato, assumendo $k' = k'' = k = 1,4 \text{ t/cm}^2$ e $\nu = 3$ per il grado di sicurezza a carico di punta.

Il sistema è isostatico, in quanto i due puntoni ED , DF (fig. 72) annullano il grado di labilità che induco-

no nel sistema lineare $ACDB$ le due cerniere C e D . La trave CD si trova così nelle condizioni di una trave semplicemente appoggiata agli estremi e caricata uniformemente. Il suo dimensionamento si eseguisce perciò coi noti metodi per le travi inflesse; trascurando il taglio — che nella sezione più cimentata a flessione (la mezzeria) è nullo — dovrà risultare soddisfatta dal momento W_x della sezione trasversale la condizione:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{k} = \frac{pl^2}{8k} = \frac{0,05 \times 200^2}{8 \times 1,4} \cong 179 \text{ cm}^3.$$

Il minimo NP I che vi soddisfa è quello del n° 190, per cui $W_x = 186 \text{ cm}^3$; il margine di 7 cm^3 è sufficiente, come facile a verificarsi, ad assorbire il contributo che al momento flettente massimo deriva dal peso proprio, in ragione (cfr. un Manuale) di $g \cong 24 \text{ Kg/m} = 0,024 \text{ t/m}$.

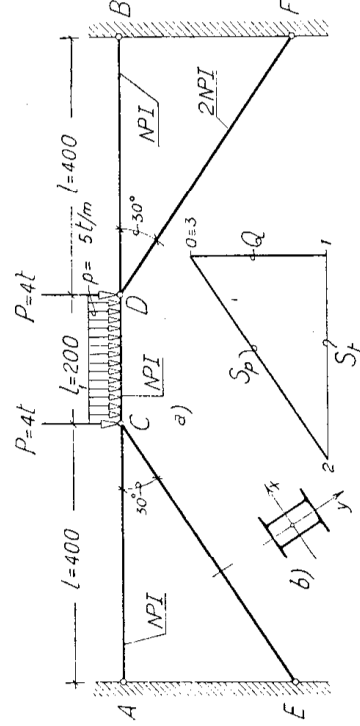


Fig. 72

Attraverso ognuna delle cerniere C e D , si scarica sul complesso elastico che vi fa capo, costituito ad es. per la cerniera C dal tirante AC e dal puntone EC , il carico:

$$Q = P + \frac{1}{2} l_1 (p + g) = 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times (5 + 0,024) \cong 9 \text{ t};$$

il peso proprio dà anche a questo riguardo un contributo trascurabile di fronte al sovraccarico.

Il carico Q si distribuisce fra il puntone e il tirante nella seguente misura (cfr. anche la fig. 72 c):

$$S_p = \frac{Q}{\sin 30^\circ} = \frac{9}{0,5} = 18 \text{ t}; \quad S_t = S_p \cos 30^\circ = 15,6 \text{ t}.$$

Il dimensionamento del tirante, da realizzarsi secondo lo schema previsto mediante un sol NP I, si ese-

guisce semplicemente sulla condizione di stabilità per la sollecitazione a forza normale:

$$A_t \geq \frac{S_t}{k} = \frac{15,6}{1,4} = 11,1 \text{ cm}^2 ;$$

fra i profilati normali a I il più economico soddisfacente a questa condizione è quello del n° 110, per cui $A = 12,3 \text{ cm}^2$ (in pratica, per un progetto esecutivo, avremmo dovuto tener conto dell'indebolimento conseguente alla sistemazione dei dispositivi di attacco a cerniera).

Per l'asta CE , caricata di punta, stanti le condizioni di vincolo supposte, la lunghezza libera di flessione coincide con quella effettiva:

$$l_1 = \frac{l'}{\cos 30} = \frac{4}{0,866} = 4,62 \text{ m} .$$

Ritenendo sufficienti due NPI 140 accoppiati, con le ali aderenti al modo che indica la fig. 72b), si hanno per i momenti di inerzia rispetto all'asse x (inflessione nel piano verticale) e rispetto ad y (inflessione nel piano per l'asse normale al precedente) i due valori (cfr. un Manuale):

$$\bar{J}_x = 2J_x = 2 \times 573 = 1146 \text{ cm}^4 ;$$

$$\bar{J}_y = 2(J_y + Ab^2) = 2(35,2 + 18,3 \times \overline{3,3^2}) = 469 \text{ cm}^4 .$$

L'inflessione nel secondo dei due piani detti è dunque la più pericolosa; il raggio (minimo) di inerzia relativo è:

$$\rho_{\min} = \sqrt{\frac{\bar{J}_y}{2A}} = \sqrt{\frac{469}{2 \times 18,3}} \cong 3,58 \text{ cm} .$$

sicchè:

$$\lambda = \frac{462}{3,58} = 129 ,$$

e:

$$P_a = \frac{P_k}{\nu} = \frac{\pi^2 E \bar{A}}{\nu \lambda^2} = \frac{9,86 \times 2150 \times 36,6}{3 \times 129^2} \cong 15,7 \text{ t} ,$$

valor inferiore alle 18 t da raggiungere.

Per una coppia di NPI 160 è invece:

$$\bar{J}_y = 2 (54,7 + 22,8 \times \sqrt{3,7^2}) = 733,4 \text{ cm}^4; \quad \bar{A} = 2 \times 22,8 = 45,6 \text{ cm}^2,$$

$$\rho_{\min} = \sqrt{\frac{\bar{J}}{\bar{A}}} = \sqrt{\frac{733,4}{45,6}} = 4,025 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{462}{4,025} \cong 115$$

e quindi per il carico ammissibile:

$$P_a = \frac{\pi^2 EA}{\nu \lambda^2} = \frac{9,86 \times 2150 \times 45,6}{3 \times 115^2} = 24,4 \text{ t};$$

il modo più economico di realizzare i puntone i puntone è dunque quello di impiegare una coppia di NPI 160.

Esercizio 69 — Progettare in acciaio ordinario da costruzione, con grado di sicurezza $\nu = 3,5$, il puntone di falda r_s della travatura reticolare avente lo schema in figura e per la condizione di carico ivi indicata, supposto di volerlo realizzare mediante una coppia di angolari a lati disuguali con rapporto di ali 2:3.

Per determinare lo sforzo S a cui il puntone va soggetto nella condizione di carico assegnata, è sufficiente conoscere la reazione B del vincolo di destra. Poichè i carichi Q e $Q/2$ sulla falda sinistra sono a questa normali (fig. 73), dalla equazione di equilibrio alla rotazione intorno al punto di vincolo A per il sistema carichi-reazioni:

$$P \left(l + \frac{l}{2} + \frac{3}{2} l \right) + Ql + \frac{Q}{2} \times 2l - 2lB = 0,$$

si ottiene subito e di seguito coi nostri dati:

$$B = \frac{Pl \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) + 2lQ}{2l} = \frac{3 \times 4 \times \frac{6}{2} + 2\sqrt{4^2 + 3^2}}{8} = 5,75 \text{ t}.$$

Tagliando ora la travatura con la sezione di Ritter re-

lativa al puntone rs (fig. 73), l'equazione di equilibrio alla rotazione per le forze sulla porzione che rimane alla destra intorno al polo m del puntone stesso, distante da questo di δ , diviene:

$$S\delta + P \frac{l}{2} - Bl = 0 .$$

Per valutare con esattezza la distanza δ , si osservi che nel riferimento cartesiano ortogonale avente per origine il punto A e per asse x la congiungente AB , il puntone rs , in quanto congiunge i punti $B \equiv (0,8)$ m, $r \equiv (4,3)$ m, ha per equazione normale:

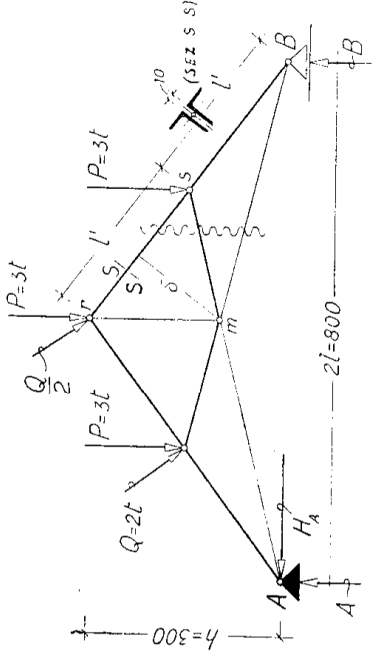


Fig. 73

$$\frac{3x + 4y - 24}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3x + 4y - 24}{5} = 0 ;$$

poichè allora il polo m , che coincide ovviamente col baricentro del triangolo ArB , ha per coordinate $(4,1)$ m, la sua distanza δ dalla falda risulta:

$$\delta = - \frac{3 \times 4 + 4 \times 1 - 24}{5} = 1,6 \text{ m} .$$

Risolvendo per S la detta equazione di equilibrio e sostituendo i dati, si ha in definitiva:

$$S = \frac{Bl - P \frac{l}{2}}{\delta} = \frac{5,75 \times 4 - 3 \times 2}{1,6} \cong 10,63 \text{ t} .$$

Prevediamo come atto a realizzare il puntone una coppia di angolari $50 \times 75/9$, disposti con le ali più lunghe parallelamente al piano medio (verticale) della travatura; giacchè, da un lato, per il singolo angoloare l'area vale $A = 10,5 \text{ cm}^2$, il momento di inerzia rispetto al proprio asse baricentrico y_0 parallelo all'ala più lunga vale $J_{y_0} = 20,2 \text{ cm}^4$ e il bordo esterno

della stessa ala dista dal baricentro di $w_1 = 1,32$ cm (cfr. un Manuale); dall'altro i bordi esterni delle ali affacciate è richiesto che distino in opera di 10 mm ⁽¹⁾, trasportandoci all'asse verticale y di simmetria per l'intera sezione si ottiene:

$$J_y = J_{y_0} + 2A(w_1 + 0,5)^2 = 2 \times 20,2 + 2 \times 10,5 \times 1,82^2 \cong 110 \text{ cm}^4,$$

e quindi per il corrispondente raggio di inerzia:

$$\rho_y = \sqrt{\frac{J_y}{2A}} = \sqrt{\frac{110}{21}} \cong 2,29 \text{ cm}.$$

Poichè il raggio di inerzia di ciascun angolare rispetto all'asse orizzontale x_0 vale invece $\rho_{x_0} = 2,33$ cm —raggio di inerzia che per altro non subisce variazione nel trasporto di cui sopra, sicchè tale valore ha anche quello ρ_x dell'intera sezione ⁽²⁾— si conclude che il minimo raggio di inerzia della sezione composta è $\rho_y = 2,29$ cm.

La snellezza del puntone, essendo $l = 2,5$ m la sua lunghezza, risulta dunque:

$$\lambda = \frac{250}{2,29} \cong 109.$$

Dalla formula di Eulero, per $E = 2150 \text{ t/cm}^2$ e $\nu = 3,5$ si ricava in conseguenza per il carico ammissibile sul puntone così realizzato il valore:

$$P_a = \frac{\pi^2 EA}{\nu \lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 2150 \times 21}{3,5 \times 109^2} \cong 10,75 \text{ t},$$

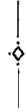
che supera solo di poco lo sforzo $S = 10,63$ t che il puntone deve di fatto sopportare.

Nello stretto grado di sicurezza $\nu = 3,5$ previsto, il puntone può dunque essere realizzato mediante una coppia di angolari $50 \times 75/9$.

⁽¹⁾ Nella pratica questa distanza corrisponde allo spessore delle piastre che vengono disposte in corrispondenza dei nodi, per il collegamento delle aste che vi fanno capo.

⁽²⁾ Cfr. Magini l.c. n. 96.

Esercizio 70 — Una trave in acciaio a sezione cava quadrata con lato esterno $a = 200\text{ mm}$ e spessore $s = 10\text{ mm}$, è incernierata a un estremo senza attrito e rinforzata in mezzzeria da una coppia di sacttoni in tubo $\phi\ 50\text{ mm}$ dello stesso spessore, inclinati di 45° sull'orizzontale. Nell'ipotesi che la trave venga gravata per tutta la lunghezza $2l = 8\text{ m}$ da un carico ripartito p , si domanda il massimo valore raggiungibile per l'intensità di questo, assumendo $k = 1\text{ t/cm}^2$ e un grado di sicurezza $\gamma = 3,5$ a carico di punta.



Poichè il carico totale, per qualunque valore della intensità p , equivale ad una forza $2pl$ agente secondo la verticale per la mezzzeria della trave, la cerniera A resta impegnata unicamente in direzione orizzontale; decomponendo il carico $2pl$ secondo l'asse della trave e secondo quello del sistema dei due puntoni (fig. 74c))

le reazioni H_A ed R_D valgono pertanto:

$$H_A = 2pl ;$$

$$R_D = 2pl\sqrt{2} .$$

A queste reazioni fa riscontro sulla trave un diagramma parabolico di momento

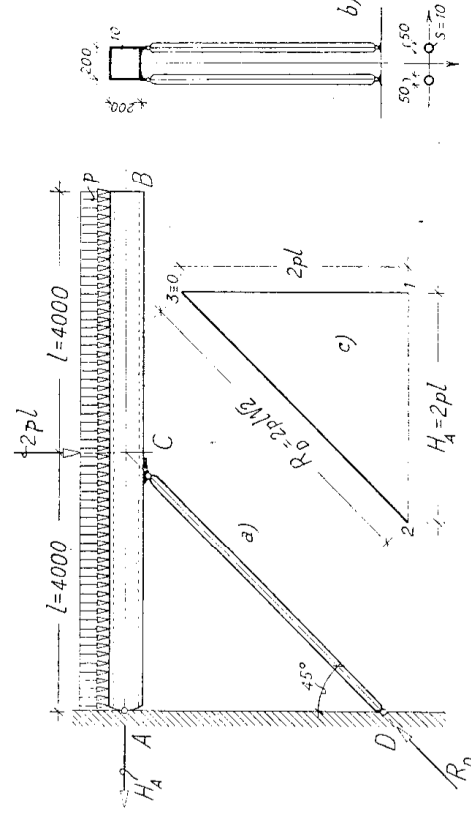


Fig. 74

ti negativi, simmetrico rispetto alla mezzzeria, con valore nullo in corrispondenza degli estremi A e B e massimo alla mezzzeria pari a:

$$M_C = - \frac{pl^2}{2} .$$

Il taglio, negativo nel tronco AC positivo invece nel tronco CB , ha corrispondentemente andamento lineare, con valore nullo agli estremi e ugual valore assoluto a sinistra e a destra della mezzzeria pari a:

$$| T_{\max} | = pl .$$

Giacchè, finalmente, tutte le sezioni del tronco AC

sono soggette a una forza di trazione costante pari ad H_A , si conclude che nella trave la sezione pericolosa è quella immediatamente a sinistra della mezzeria, soggetta ad un tempo alle tre caratteristiche:

$$N \equiv H_A = + 2 pl; \quad M \equiv M_C = - \frac{pl^2}{2}; \quad T = - pl.$$

Al crescere del carico p , la stabilità del sistema potrà allora essere compromessa o in detta sezione per quanto riguarda la trave, ovvero nei due puntoni che sono soggetti a carico di punta; il massimo valore ammissibile richiesto per p sarà allora il più piccolo fra i due massimi ammissibili compatibilmente col grado di sicurezza fissato per la trave e per i puntoni.

Ricerchiamo perciò separatamente questi due massimi. Ammesso che i due puntoni, in virtù di opportuni collegamenti trasversali, funzionino insieme, così che non vi sia possibile separatamente un'inflessione preattura, essi assorbiranno ciascuno costantemente l'esatta metà del carico $R_D = 2pl\sqrt{2}$; poichè il raggio minimo di inerzia del complesso — quello rispetto all'asse trasverso — è lo stesso che per ciascuna delle sezioni cave ⁽¹⁾ e precisamente, essendone $d_e = 50$ mm e $d_i = 50 - 2 \times 10 = 30$ mm i diametri esterno ed interno:

$$\rho_{\min} \equiv \rho = \sqrt{\frac{J}{A}} = \sqrt{\frac{\pi (d_e^4 - d_i^4)}{16 \pi (d_e^2 - d_i^2)}} = \sqrt{\frac{50^4 - 30^4}{16 (50^2 - 30^2)}} \cong 14,6 = 1,46 \text{ cm},$$

e d'altra parte la lunghezza l_1 libera di flessione per i puntoni è:

$$l_1 \equiv l' = l\sqrt{2} = 400\sqrt{2} \cong 566 \text{ cm},$$

la loro snellezza λ risulta:

$$\lambda = \frac{l_1}{\rho_{\min}} = \frac{566}{1,46} \cong 385.$$

Dalla formula di Eulero si ottiene allora per il carico ammissibile sull'insieme dei due puntoni ($A =$

⁽¹⁾ Cfr. Magini I. c. n. 96.

$= \pi (d_e^2 - d_i^2)/2 = \pi (25 - 9)/2 \cong 25,1 \text{ cm}^2$ con grado di sicurezza $\nu = 3,5$ il valore:

$$P_a = \frac{P_k}{\nu} = \frac{\pi^2 E A}{\nu \lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 2100 \times 25,1}{3,5 \times 385^2} \cong 1,02 \text{ t}.$$

A tale valore corrisponde per l'intensità massima ammissibile del carico p sulla trave, quest'altro:

$$\max p_a = \frac{P_a}{2l\sqrt{2}} = \frac{1,02}{2 \times 4\sqrt{2}} \cong 0,09 \text{ t/m} = 90 \text{ Kg/m}.$$

D'altro lato, la sezione della trave ha le seguenti caratteristiche geometriche:

$$A = 20^2 - 18^2 = 76 \text{ cm}^2; \quad J_x = \frac{1}{12} (20^4 - 18^4) \cong 4585 \text{ cm}^4.$$

Le tre caratteristiche della sollecitazione M , N e T immediatamente a sinistra della mezzeria, destano quindi in tale sezione le tensioni:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M}{J} y = \frac{2pl}{A} - \frac{pl^2}{2J_x} y; \quad \tau = \frac{pl}{J} \frac{S_r}{b_r}.$$

Al bordo esterno superiore, dove le tensioni normali dovute alla forza normale e al momento flettente, ambedue positive, si sommano aritmeticamente, si ha allora in funzione di p la tensione massima:

$$\sigma'_{\max} = p \left[\frac{2l}{A} + \frac{l^2 a}{4J_x} \right] = p \left[\frac{2 \times 400}{76} + \frac{400^2 \times 20}{4 \times 4585} \right] \cong 185 p.$$

Contenendo questa tensione nel limite assegnato $k = 1 \text{ t/cm}^2$, risulterebbe per p il massimo valore ammissibile:

$$\max p_a = \frac{1}{185} \text{ t/cm} = \frac{100000}{185} \text{ Kg/m} \cong 542 \text{ Kg/m}.$$

Per giudicare della stabilità della sezione, dovremo notoriamente (Es. 34) determinare le tensioni ideali alla corda di passaggio dal ramo orizzontale superiore ai rami verticali; ma la cosa è ormai qui priva di

interesse, giacchè quand'anche all'altezza di tale corda le cose andassero peggio che al bordo superiore, già il risultato sopra stabilito assicura che a decidere della stabilità del sistema è anzitutto il carico di punta nei rinforzi; sicchè si può senz'altro concludere che la massima intensità raggiungibile per il carico ripartito sulla trave è $p = 90 \text{ Kg/m}$.

Si avverta che da solo il peso proprio della trave ($\gamma = 7,86 \text{ g/cm}^3 = 0,00786 \text{ Kg/cm}^3$) incide in questo valore per la quota:

$$g = 100 p A = 0,786 \times 76 \cong 60 \text{ kg/m} ,$$

per modo che la quota di carico utile resta appena $\frac{1}{3}$ dell'intensità massima.

Se invece non avessimo dovuto preoccuparci del carico di punta, con riguardo soltanto alla sezione resistente dei puntoni — ammesso anche per essi lo stesso carico di sicurezza $k = 1 \text{ t/cm}^2$ — avremmo potuto raggiungere il carico complessivo:

$$P = k A = 25,1 \times 1000 = 25100 \text{ kg} ,$$

corrispondente a un carico uniforme sulla trave di:

$$p = \frac{P}{2l\sqrt{2}} = \frac{25100}{8\sqrt{2}} \cong 2240 \text{ Kg/m} ,$$

con una quota utile di $2240 - 60 = 2180 \text{ Kg/m}$, più che 70 volte maggiore di quella riscontrata di sopra.

Questo, se occorre, per un'idea ancor più concreta di quanto incida il fenomeno dell'inflexione laterale, specie per forti valori della snellezza, nella riduzione dei carichi ammissibili sopra una data membratura.