

F - TRAVI SOLLECITATE DINAMICAMENTE

**Esercizio 58** — Un'asta cilindrica è soggetta ripetutamente a una forza di trazione fino a 2000 Kg. Dimensionarla con sezione circolare piena, impiegando acciaio 52.

La ripetizione del carico induce nei materiali quei fenomeni di degradazione, noti sotto il nome di *fenomeni di fatica*, in conseguenza dei quali la loro resistenza risulta sensibilmente inferiore a quella che posseggono nell'analoga sollecitazione statica, cioè per carico crescente lentamente e sempre in un senso da zero fino al massimo che produce la rottura.

Le condizioni di stabilità in questo genere di sollecitazioni che, ricordiamo, diconsi a *carico oscillante* se la ripetizione si compie fra limiti del medesimo segno, a *carico invertito* se si compie invece tra limiti di segno opposto, si stabiliscono o con riguardo ai diagrammi dei *limiti di fatica* (limiti che prendono il posto di quelli elastici nelle analoghe sollecitazioni statiche) o in base al metodo analitico che si fonda sulla formula di Launhardt-Weyrauch.

Seguendo quest'ultima via, ricordiamo che essa riconduce la trattazione del caso delle sollecitazioni dinamiche a quello delle corrispondenti sollecitazioni statiche, introducendo al posto della resistenza statica la *resistenza al lavoro*:

$$(99) \quad \sigma_l = \frac{2}{3} \sigma_R \left( 1 \pm \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \right),$$

dove  $\sigma_{\min}$  e  $\sigma_{\max}$  sono le tensioni numericamente minima e massima indotte nell'oscillazione del carico, e dove il segno è da assumersi positivo o negativo secondochè questi estremi hanno o meno il medesimo segno. Sulle basi della (99) che, introducendo in luogo delle tensioni le sollecitazioni estreme  $S_{\min}$  ed  $S_{\max}$ , può scriversi anche:

$$\sigma_l = \frac{2}{3} \sigma_R \left( 1 \pm \frac{1}{2} \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right),$$

il dimensionamento degli organi sollecitati dinamicamente

mente si eseguisce dunque semplicemente introducendo gli ordinari coefficienti di sicurezza.

Nel caso attuale ( $S_{\min} = 0$ , sicchè la resistenza al lavoro coincide con la *resistenza originaria*:  $\sigma_0 = \frac{2}{3} \sigma_R$ ) risulta:

$$\sigma_l = \frac{2}{3} \sigma_R = \frac{2}{3} \times 52 \cong 34,7 \text{ Kg/mm}^2 .$$

Nell'equazione di stabilità relativa alla sollecitazione a forza normale semplice:

$$\frac{N}{A} \leq k ,$$

ammettendo un grado di sicurezza  $v = 5$  -valore, invero, piuttosto elevato, come è consigliabile tutte le volte che il pezzo in progetto abbia funzioni delicate, per modo che alla sua rottura siano imputabili conseguenze particolarmente gravi- risulta per il carico di sicurezza il valore:

$$k = \frac{\sigma_l}{v} = \frac{34,5}{5} = 6,9 \text{ Kg/mm}^2 ;$$

e quindi per la sezione trasversale  $A$  da assegnare all'asta, la limitazione:

$$A \geq \frac{N}{k} = \frac{2000}{6,9} = 288 \text{ mm}^2 ,$$

la quale richiede il diametro minimo (cfr. un Manuale):  
 $d_{\min} = 19,2 \text{ mm}$ .

**Esercizio 59** — L'accoppiamento di un albero di trasmissione all'albero motore avente diametro  $d = 100 \text{ mm}$ , è realizzato mediante due piatti a disco riuniti con sei bulloni ugualmente intervallati sopra una circonferenza di  $350 \text{ mm}$  di diametro. Progettare i bulloni in acciaio 42, nell'ipotesi che la potenza da trasmettere sia di  $150 \text{ HP}$  a  $80$  giri/minuto e di voler assicurare l'invertibilità della marcia.

I bulloni risultano sollecitati a taglio, il quale,

per l'invertibilità della marcia, può svilupparsi nei due sensi; si è pertanto in presenza di una sollecitazione dinamica del tipo a *forze invertite*, con carico cioè variabile fra limiti dello stesso valore assoluto e di segno opposto.

La (99) dell'Esercizio precedente, modificata, più conformemente all'esperienza, per i materiali duttili e per sforzi variabili tra limiti di segno opposto in quest'altra:

$$(99') \quad \sigma_l = \frac{2}{3} \sigma_R \left( 1 - 0,3 \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \right),$$

fornisce per la *resistenza a forze invertite*  $\sigma_l$  l'espressione:

$$\sigma_l \equiv \sigma_i = \frac{2}{3} \sigma_R (1 - 0,3) = 0,47 \sigma_R .$$

Detti:  $D$ , in mm, il diametro della circonferenza su cui sono distribuiti i bulloni;  $n$  il numero di giri al minuto;  $\mathcal{P}$  la potenza in cavalli;  $\mathcal{C}$ , in Kg, lo sforzo di taglio massimo che agisce, in uno dei due sensi, sul complesso dei sei bulloni, è ovviamente:

$$\mathcal{C} \frac{\pi n D}{60} = 75 \times 1000 \times \mathcal{P} ,$$

da cui, sostituendovi i valori assegnati:

$$\mathcal{C} = \frac{75 \times 150 \times 1000 \times 60}{\pi \times 350 \times 80} = 7670 \text{ Kg} .$$

Su ciascuno dei bulloni, ammessa un'uguale ripartizione fra essi, agisce allora il taglio:

$$T = \frac{\mathcal{C}}{6} = \frac{7670}{6} \cong 1280 \text{ Kg} .$$

Fissando un grado di sicurezza  $\nu = 4$ , poichè per il carico  $t$  di sicurezza al taglio è da assumersi:

$$t = \frac{4}{5} k ,$$

con  $k$  carico di sicurezza a trazione, risulta:

$$t = \frac{4}{5} k = \frac{4}{5} \frac{\sigma_i}{\nu} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sigma_R}{3} = 2,8 \text{ Kg/mm}^2 .$$

L'equazione di stabilità per il bullone, dettore  $d$  il diametro e nell'ipotesi che il taglio  $T$  si distribuisca uniformemente sulla sua sezione trasversale:

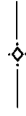
$$\frac{\pi d^2}{4} t \geq T ,$$

porta per sostituzione al valore minimo adottabile per il diametro  $d$ :

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{4T}{\pi t}} = \sqrt{\frac{4 \times 1280}{\pi \times 2,8}} = 24,1 \text{ mm} .$$

#### G - TRAVI CARICATE PARALLELAMENTE ALL'ASSE

**Esercizio 60** — Progettare con grado di sicurezza  $\nu = 3,5$  come profilato a doppio T ad ali larghe, una colonna di 4 m di altezza, destinata a un carico di compressione  $P = 10 t$  con eccentricità  $\delta = 19 \text{ cm}$ , nell'ipotesi che sia perfettamente incastrata al piede.



La sollecitazione assegnata, che per la sezione trasversale generica della trave è del tipo a forza normale eccentrica, rientra in effetto in quella di carico parallelo all'asse, data l'esiguità delle dimensioni trasversali della trave a confronto della sua lunghezza; non è più trascurabile infatti, per questa ragione, l'alterazione che subisce il braccio di leva del carico per la sezione corrente, in conseguenza della deformazione elastica.

La legge di variazione del momento flettente, che ove fosse lecito prescindere dalla detta alterazione

sarebbe rettangolare con ordinata  $P\delta$ , si cambia ora invece in quest'altra (fig. 67):

$$M_x = -P(\delta + f - \eta),$$

nella quale con  $f$  si è indicata la freccia della trave spostamento orizzontale del suo estremo libero— e con  $\eta$  l'ordinata corrente della linea elastica; come conseguenza, l'equazione differenziale di tale linea diventa:

$$EJ \frac{d^2 \eta}{dz^2} = P(\delta + f - \eta);$$

ovvero anche, posto:

$$-y = \delta + f - \eta,$$

sicchè:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{d^2 \eta}{dz^2},$$

e di più:

$$(100) \quad a^2 = \frac{P}{EJ},$$

quest'altra:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + a^2 y = 0.$$

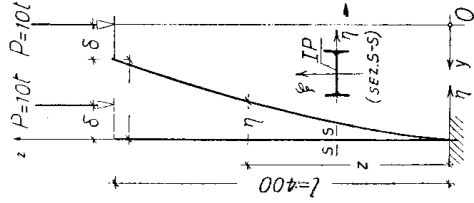


Fig. 67

È noto come da tale equazione differenziale, attraverso la corrispondente equazione algebrica caratteristica:

$$\lambda^2 + a^2 = 0,$$

e in virtù delle assegnate condizioni di vincolo, si pervenga alla seguente equazione della linea elastica in termini finiti:

$$(101) \quad \frac{\eta}{\delta} = \frac{1 - \cos(a z)}{\cos(a l)}.$$

Il momento massimo agisce come ovvio nella sezione

di incastro, per la quale il braccio di  $P$  raggiunge il massimo valore  $\delta + f$ ; dall'ultima scritta, in cui per  $z = l$  è da porre  $\eta = f$ , è dunque:

$$M_{\max} = - P (\delta + f) = - \frac{P \delta}{\cos (a l)} .$$

Le equazioni di stabilità in questa sezione, con riguardo al grado di sicurezza  $\nu$  assegnato, assumono allora la forma:

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma' = - \frac{\nu P}{A} + \frac{\nu P \delta y'}{J \cos (l \sqrt{\frac{\nu P}{EJ}})} \leq \sigma'_E \\ \sigma'' = - \frac{\nu P}{A} - \frac{\nu P \delta y''}{J \cos (l \sqrt{\frac{\nu P}{EJ}})} \geq \sigma''_E , \end{array} \right.$$

dove  $\sigma'_E$  e  $\sigma''_E$  rappresentano le tensioni al limite di elasticità del materiale a trazione e a compressione.

Queste espressioni della  $\sigma$  rivelano in modo eloquente la diversità fra la sollecitazione in esame e quella a forza normale eccentrica: mentre infatti in quest'ultima le tensioni crescono proporzionalmente al carico  $P$ , ed è quindi applicabile in tutto il periodo elastico il principio di sovrapposizione degli effetti, ora dette tensioni dipendono dal carico con legge trascendente, in quanto questo compare, secondo la posizione (100), nell'argomento del coseno a denominatore: può bene allora avvenire che, da un certo punto, un incremento anche piccolo di  $P$  determini un accrescimento talmente rapido delle tensioni, da raggiungere e oltrepassare i limiti di elasticità suddetti; è questa la circostanza che richiede una particolare attenzione nel proporzionare le travi caricate parallelamente all'asse.

Nel caso nostro, trattandosi di sezione simmetrica, delle due equazioni di stabilità è sufficiente considerarne una sola: quella che limita la massima com-

pressione e che possiamo scrivere anche così:

$$(102') \quad \nu P \left( \frac{1}{A} + \frac{\delta}{W_x \cos \left( l \sqrt{\frac{\nu P}{E_x J}} \right)} \right) \leq \sigma''_E,$$

dove  $\sigma''_E$  deve ora intendersi introdotto in valore assoluto.

Per trovare il profilo ad ali larghe che assicuri la stabilità con la massima economia, non possiamo che procedere per tentativi; sostituire cioè mano mano nel primo membro della (102') le caratteristiche corrispondenti a determinate sezioni, e adottare quindi la più piccola fra quante verificano la condizione richiesta.

I dati del problema sono:

$$\nu P = 3,5 \times 10 = 35 \text{ t}; \quad \delta = 19 \text{ cm}; \quad l = 4 \text{ m} = 400 \text{ cm};$$

assumeremo inoltre:

$$E = 2100 \text{ t/cm}^2; \quad \sigma''_E = 2000 \text{ Kg/cm}^2 = 2 \text{ t/cm}^2.$$

È allora:

$$al = \sqrt{\frac{\nu P \delta^3}{E_x J}} = \sqrt{\frac{35 \times 160\,000}{2100 J_x}} = \sqrt{\frac{2667}{J}};$$

e la (102') diviene:

$$(102'') \quad 35 \left( \frac{1}{A} + \frac{19}{W_x \cos \sqrt{\frac{2667}{J_x}}} \right) \leq 2$$

Riferendoci per un primo tentativo al profilo I ad ali larghe n° 20 che ha le seguenti caratteristiche geometriche:

$$A = 82,7 \text{ cm}^2; \quad J_x = 5950 \text{ cm}^4; \quad W_x = 595 \text{ cm}^3,$$

il primo membro della (102'') diviene:

$$35 \left( \frac{1}{82,7} + \frac{19}{595 \cos \sqrt{\frac{2667}{5940}}} \right) = 35 \left[ 0,0121 + \frac{19}{595 \cos(38' 20' 32'')} \right] = 1,848 \text{ t/cm}^2$$

valore che verifica la (102'').

Si conclude che già il profilo del n° 20, che è il minore di quelli in commercio, può essere impiegato per realizzare la nostra colonna.

#### H - TRAVI CARICATE DI PUNTA

**Esercizio 61** — Calcolare i carichi assiali che può sopportare con grado di sicurezza  $\nu = 5$  una trave ad ali larghe Differdange I P 24 nelle due diverse ipotesi che agli estremi sia incernierata senza attrito ovvero incastrata rigidamente e, in ognuno dei casi, per le due diverse lunghezze:

$$l = 4 \text{ m} \quad ; \quad l = 10 \text{ m}$$

Si assumano:  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$  ;  $\sigma_R = 3800 \text{ Kg/cm}^2$  ;  $k' = 760 \text{ Kg/cm}^2$  .



La sollecitazione di *carico di punta*, per il suo frequente presentarsi nella pratica (si pensi alle aste compresse nelle travature reticolari, alle bielle negli organi delle macchine, ai piedritti o colonne di sostegno di architravi, ecc.) ma più specialmente per le sue caratteristiche tutto speciali, richiede da parte del progettista un'attenzione particolare.

Mentre in linea strettamente teorica un solido caricato di punta si presenta con la semplicità di un solido soggetto a forza normale semplice  $P$  (cfr. Ess. 14 ÷ 20) per cui la tensione nel punto generico della generica sezione trasversale si calcola con la nota formula:

$$\sigma = \frac{P}{A} ,$$

e il cui dimensionamento si fa limitando questa tensione al carico di sicurezza  $k''$ , ragioni pratiche e sostanziali distinguono nettamente i due tipi di sollecitazione. Tra le ragioni di carattere pratico, la inevitabile eterogeneità del materiale, le imperfezioni di forma, l'impossibilità di realizzare le esatte condizioni di posa, ecc. inducono costantemente una certa