

che mai manifesti questi due contributi, in figura 61 b) sono stati costruiti rispetto a una stessa fondamentale $A'_m B'_m$ il diagramma del momento conseguente alla sola presenza di P (a tratto continuo) e quello conseguente al solo cedimento η ; in figura 61 c) è invece costruito il diagramma risultante dei due, in relazione al quale è indicato in figura 61 a) l'andamento della linea elastica della trave.

Sarebbe ora immediato dedurre da questo diagramma quello del taglio, o per derivazione, ovvero col procedimento già seguito ai due Esercizi precedenti, determinando cioè i tagli immediatamente a sinistra e a destra degli appoggi; all'uopo sono indicati in figura 61 a) i sensi che hanno le varie reazioni.

Per quanto riguarda poi la stabilità, questa è senz'altro verificata, in quanto il momento massimo in valore assoluto è $M_s = 91,33$ tcm mentre il NP I 240 ha un modulo $W_x = 353$ cm³: il largo margine che tale valore contiene nei confronti di quello strettamente necessario è sufficiente ad assorbire con larghezza anche il taglio che abbiamo fin qui trascurato.

C - TRAVI GERBER O A MENSOLA

Esercizio 53 — Progettare la trave con lo stesso schema e sotto le stesse condizioni di carico di cui all'Esercizio 51, nell'ipotesi che si voglia realizzarla come trave Gerber con due cerniere nella campata centrale distanti dagli appoggi di $0,96$ m.

È noto che la trave Gerber può pensarsi derivare da una ordinaria trave continua rendendola staticamente determinata mediante la disposizione opportuna di un certo numero di cerniere: e precisamente tante quante sono le incognite iperstatiche che presenta la trave continua e disposte in modo che non vi siano più di due appoggi fra due cerniere consecutive e non più di due cerniere fra due appoggi consecutivi.

Nel caso in esame, le due cerniere occorrenti a eliminare le due indeterminazioni potrebbero perciò porsi o, com'è stato fatto, ambedue nella campata centrale (fig. 62a), ovvero una per ognuna nelle campate estreme.

La determinazione deriva dalla circostanza che, prescindendo dall'attrito, la cerniera è inetta a resistere a flessione, sicchè in corrispondenza di essa il momento deve risultare nullo.

È per conseguenza immediato tracciare il diagramma dei momenti flettenti: costruite infatti, rispetto ad esempio a una stessa fondamentale $A'_m B'_m$ (fig. 62b), le superficie semplici dei momenti per le tre campate, re-

se indipendenti mediante tagli di separazione in corrispondenza degli appoggi, si abbassino le verticali per le cerniere; in base alla condizione suddetta, la fondamentale cui va riferito il diagramma dei momenti effettivo per la campata centrale è allora la congiungente le intersezioni di queste verticali

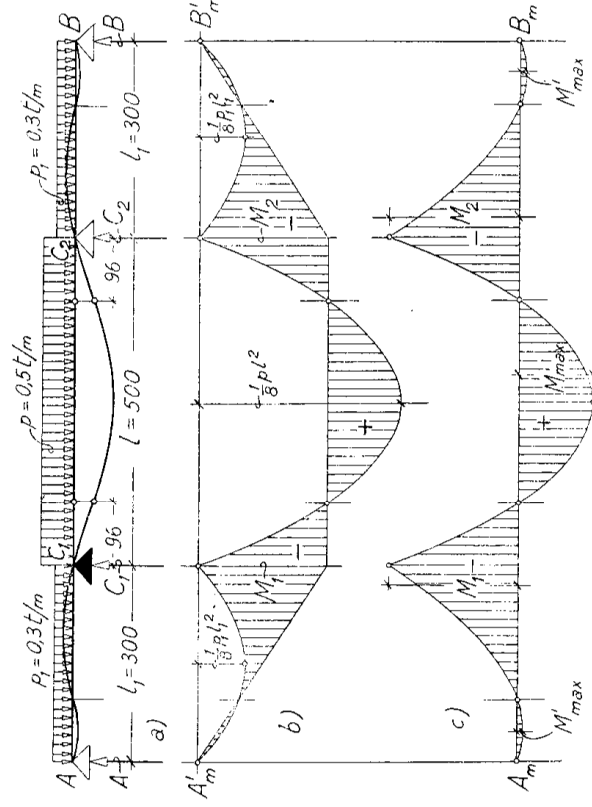


Fig. 62

li con l'arco di parabola che limita la detta superficie: i segmenti che questa congiungente stacca sulle verticali degli appoggi, riferiti ancora alle fondamentali $A'_m B'_m$, misurano cioè i momenti sugli appoggi stessi; le fondamentali relative alle due campate estreme sono poi le congiungenti detti punti con A'_m e B'_m rispettivamente.

Il diagramma così ottenuto è invece riferito in figura 62c) alla fondamentale orizzontale $A_m B_m$.

Alla stregua ancora di quanto capitava nelle condi-

zioni di vincolo dell'Esercizio 51, il massimo valore assoluto del momento si verifica sugli appoggi; detta $a = 0,96 m$ la lunghezza comune degli sbalzi e $P = p(l - 2a)/2$ l'azione che la campata appoggiata fra le due cerniere trasmette, in corrispondenza dell'estremo, a ognuno degli sbalzi medesimi, è manifestamente e di seguito:

$$M_1 = M_2 = -Pa - \frac{1}{2}pa^2 = -\frac{pa}{2}(l - a).$$

Si osservi che, fermi restano gli altri dati, i momenti M_1 ed M_2 dipendono esclusivamente dal valore a dello sbalzo; ciò offre la possibilità, spostando in modo opportuno la posizione delle cerniere, di variare il momento massimo entro certi limiti, e insieme l'altra di soddisfare in sede di progetto a determinate condizioni: per esempio quella che il massimo positivo (di solito in mezzeria della campata appoggiata alle cerniere, pari nel nostro schema a $\max M = p(l - 2a)^2/8$) e il momento sugli appoggi abbiano lo stesso valore assoluto.

Determinato il diagramma dei momenti, quello del taglio si deduce immediatamente da esso per derivazione o con lo stesso procedimento già seguito per la trave continua (Ess. 50 e 51).

Dimensionando a flessione, poichè coi nostri dati è:

$$M_1 = -\frac{0,5 \times 0,96}{2}(5 - 0,96) = -0,9696 \text{ tm} \cong -97 \text{ tcm},$$

per restare nel limite di sicurezza $k = 1 \text{ t/cm}^2$, il profilato da adottare è il NPI 160, il cui modulo di resistenza rispetto all'asse neutro vale (cfr. il Manuale) $W_x = 117 \text{ cm}^3$.

D - TRAVI A CARICO INDIRETTO

Esercizio 54 — Determinare i diagrammi del momento flettente e del taglio per una trave semplice a carico indiretto di luce $l = 6 m$, nel-

l'ipotesi che l'impalcatura sia gravata da un carico uniforme $p = 1,5 \text{ t/m}$ e realizzata mediante travi secondarie poste all'equidistanza $\lambda = 0,6 \text{ m}$.

È frequente nelle costruzioni l'impiego di travi che, anziché direttamente, ricevono il carico attraverso un'impalcatura secondaria costituita da travetti trasversali o da volticcioline in muratura o da altre strutture analoghe.

Si ammette in questi casi che l'impalcatura secondaria si comporti come una successione di travi semplicemente appoggiate agli estremi, per modo da trasmettere alla trave principale, in corrispondenza dei rispettivi punti di appoggio, forze concentrate pari alle componenti dei carichi insistenti sui due campi adiacenti. Così nel nostro caso, in corrispondenza di ciascuno dei travetti a riva (fig. 63 a), si scarica metà del carico insistente sul campo estremo contiguo, pari a:

$$\frac{p\lambda}{2} = \frac{1,5 \times 0,6}{2} = 0,45 \text{ t};$$

in corrispondenza invece di ognuna delle travi a I intermedie, il doppio di questo valore.

Schematicamente la trave principale è allora assimilabile (fig. 63 b) a una trave semplice gravata sugli appoggi da due carichi verticali concentrati di 0,45 t e in corrispondenza dei punti di posa delle travi trasversali a I da altrettanti carichi uguali a 0,9 t.

Per simmetria, le reazioni valgono ciascuna la metà del carico totale:

$$A = B = \frac{pl}{2} = \frac{1,5 \times 6}{2} = 4,5 \text{ t};$$

il diagramma del taglio risulta in conseguenza una gra-

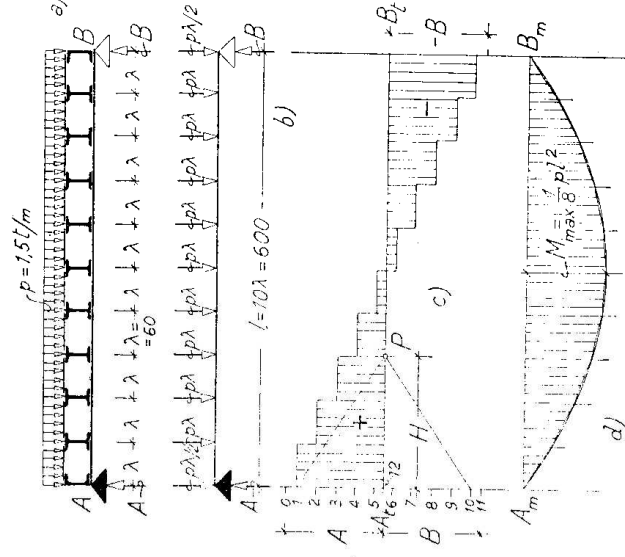


Fig. 63

dinata di alzata 0,9 t per i gradini intermedi 0,45 per i due estremi: il taglio è dunque costante in ogni campo (fig. 63c); e ciò, si noti, qualunque siano le condizioni di carico della soprastruttura, ripartito o concentrato.

Quanto al diagramma dei momenti flettenti, esso può determinarsi agevolmente integrando al modo solito quello del taglio; ne risulta, riferita alla fondamentale A_mB_m , la poligonale di fig. 63d); ma potremmo anche, com'è pure indicato in figura, costruire la parabola di freccia $p^2/8$ relativa al carico ripartito supposto insistere direttamente sulla trave principale anzichè sull'impalcatura, e condurre poi le verticali baricentriche delle singole travi trasversali: i punti in cui queste incontrano la parabola sono, com'è facile convincersi, i vertici della poligonale prima costruita.

E - TRAVI DI UGUAL RESISTENZA

Esercizio 55 — Un cavo metallico verticale a sezione circolare lungo 120 m, è destinato a sopportare all'estremo libero un carico $P = 10 t$. Nell'ipotesi che si intenda realizzarlo con quattro tronchi a sezione costante di lunghezza comune $l = 30 m$, dimensionare nel modo più economico le sezioni dei singoli tronchi, ammettendo un carico di sicurezza $k = 800 Kg/cm^2$ e sapendo che il peso specifico del materiale è $\gamma = 7,86 g/cm^3$.

—♦—

Se con $S_1-S_1, S_2-S_2, \dots, S_4-S_4$ indichiamo, nell'ordine in cui si incontrano dal basso in alto (fig. 64) le sezioni terminali superiori dei singoli tronchi, è ovvio come la massima economia si raggiunga dimensionando queste sezioni — che, con riguardo al peso proprio, risultano tronco per tronco le più sollecitate — imponendo che in ognuna di esse la tensione massima raggiunga il carico di sicurezza k .

La sezione S_1-S_1 , dettata A_1 l'area, risulta soggetta al carico:

$$P_1 = P + \gamma l A_1 = 10000 + 0,00786 \times 3000 A_1 = 10000 + 23,58 A_1 .$$

La condizione di stabilità per tale sezione:

$$\frac{P_1}{A_1} = k ,$$

porta allora immediatamente alla relazione:

$$A_1 (k - 23,58) = 10000 ,$$

da cui, ponendovi $k = 800 \text{ Kg/cm}^2$:

$$A_1 = \frac{10000}{776,42} = 12,9 \text{ cm}^2 \cong 13 \text{ cm}^2 .$$

Il peso del primo tronco risulta così:

$$Q_1 = \gamma l A_1 = 23,58 \times 13 \cong 306 \text{ Kg} .$$

Per il secondo tronco, il carico

$$P_1 = P + Q_1 = 10306 \text{ Kg} ,$$

è ora da riguardarsi come direttamente applicato all'estremo inferiore; ripetendo da questo punto le stesse considerazioni di sopra per la sezione superiore $S_2 - S_3$ e dettane A_2 l'area, si ha per il carico che essa sopporta l'espressione:

$$P_2 = P_1 + \gamma l A_2 = 10306 + 23,58 A_2 ,$$

e dall'equazione di stabilità relativa:

$$A_2 = \frac{10306}{776,42} = 13,27 \text{ cm}^2 .$$

Con la stessa legge ricorrente, essendo ora:

$$Q_2 = \gamma l A_2 = 23,58 \times 13,27 \cong 313 \text{ Kg} ,$$

si trova per l'area A_3 della sezione $S_3 - S_4$ il valore:

$$A = \frac{10306 + 313}{776,42} = \frac{10619}{776,42} = 13,68 \text{ cm}^2 ,$$

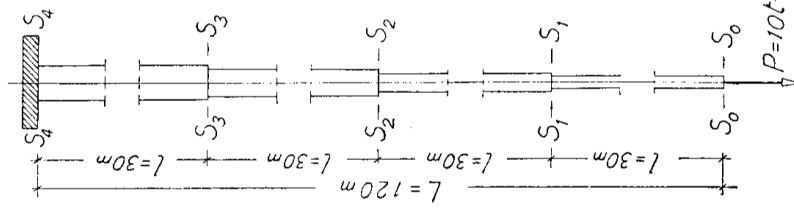


Fig. 64

e pertanto il peso proprio del terzo tronco risulta:

$$Q_3 = \gamma l A_3 = 23,58 \times 13,68 \cong 324 \text{ Kg} .$$

Finalmente:

$$A_4 = \frac{10619 + 324}{776,42} = \frac{10943}{776,42} \cong 14,1 \text{ cm}^2 .$$

Essendo allora per il quarto tronco:

$$Q_4 = \gamma l A_4 = 23,58 \times 14,1 = 332 \text{ Kg} ,$$

il peso totale Q del cavo risulta:

$$Q = \sum_{i=1}^4 Q_i = 306 + 313 + 324 + 332 = 1275 \text{ Kg} .$$

Se avessimo progettato il cavo di sezione costante per tutta la lunghezza $L = 120 \text{ m}$, la sezione terminale A necessaria a non superarvi lo stesso carico di sicurezza k , detto ora $\tilde{Q} = \gamma LA = 94,32 A$ il peso proprio complessivo del cavo, sarebbe invece risultata:

$$A = \frac{10000}{800 - 94,32} = \frac{10000}{705,68} \cong 14,2 \text{ cm}^2 ,$$

e pertanto:

$$\tilde{Q} = 94,32 \times 14,2 \cong 1340 \text{ Kg} .$$

Si è dunque realizzata una economia in peso di:

$$\tilde{Q} - Q = 1340 - 1275 = 65 \text{ Kg} ,$$

pari a $65/120 = 0,542 \text{ Kg}$ per metro lineare di cavo.

È ovvio poi che l'economia sarebbe più che mai spinta dividendo il cavo per tutta la sua lunghezza in un numero maggiore di tronchi. La soluzione ideale a questo riguardo, se non la scongiurassero difficoltà di carattere pratico-costruttivo, sarebbe infine quella

di progettare il cavo a sezione continuamente variabile come *solido di ugual resistenza*.

Un esempio di questo tipo di calcolo è fornito nell'Esercizio che segue.

Esercizio 56 — Progettare come solido di ugual resistenza in laterizio ordinario ($k = 5 \text{ Kg/cm}^2$, $\gamma = 1800 \text{ Kg/cm}^3$) la pila di un viadotto alta $H = 36,5 \text{ m}$, destinata a un carico assiale $P = 290 \text{ t}$.

Per assicurare una distribuzione uniforme del carico sulla sezione trasversale terminale della pila, sia stato predisposto fra essa e gli apparecchi di appoggio della struttura portante del viadotto, uno strato di spessore $\delta = 0,5 \text{ m}$ di calcestruzzo cementizio.

Supposto che il viadotto richieda per la pila una larghezza $b_0 = 6 \text{ m}$ e prevedendo per la sezione terminale, che realizzeremo di forma rettangolare, la profondità $\lambda_0 = 1 \text{ m}$, onde risulterebbe:

$$P_c = 0,5 \times 6 \times 1 \times 2,4 = 7,2 \text{ t}$$

il peso del prisma di calcestruzzo sovrastante alla stessa sezione terminale, la compressione unitaria in questa sezione varrebbe:

$$\sigma'' = \frac{P + P_c}{b_0 \lambda_0} = \frac{297200}{600 \times 100} \cong 5 \text{ Kg/cm}^2,$$

ciò che rende accettabile il valore previsto per λ_0 .

Convienne riferire il sistema cartesiano $O(xy\epsilon)$ avente come origine il baricentro O della sezione terminale, come assi x ed y gli assi principali di inerzia di questa sezione e come asse ϵ l'asse della pila rivolto verso il basso. La condizione di ugual resistenza richiede, notoriamente, che in ogni sezione la tensione raggiunga il valore del carico di sicurezza. Tale condizione che, se A_x e N_x sono rispettivamente l'a-

rea della sezione alla quota z corrente e il carico che vi agisce, si traduce nella relazione:

$$(93) \quad k A_x = N_x,$$

per la sezione alla quota $z + dz$ porta a quest'altra:

$$(94) \quad k(A_x + dA_x) = N_x + dN_x,$$

dove con dN_x e dA_x si sono indicate la variazione del carico per l'incremento dz lungo l'asse e la corrispondente variazione della sezione trasversale necessaria a conservare la tensione nei limiti imposti.

Poichè nel caso nostro la variazione del carico lungo l'asse deriva unicamente dal peso proprio, è ovviamente:

$$dN_x = \gamma A_x dz,$$

con γ peso specifico del materiale; sostituendo allora nell'ultima con riguardo alla (93), si perviene alla seguente equazione differenziale a variabili separate:

$$\frac{dA_x}{A_x} = \frac{\gamma}{k} dz,$$

la cui soluzione, detta A_0 la sezione iniziale, è del tipo noto:

$$(95) \quad \lg A_x = \lg A_0 + \frac{\gamma}{k} z,$$

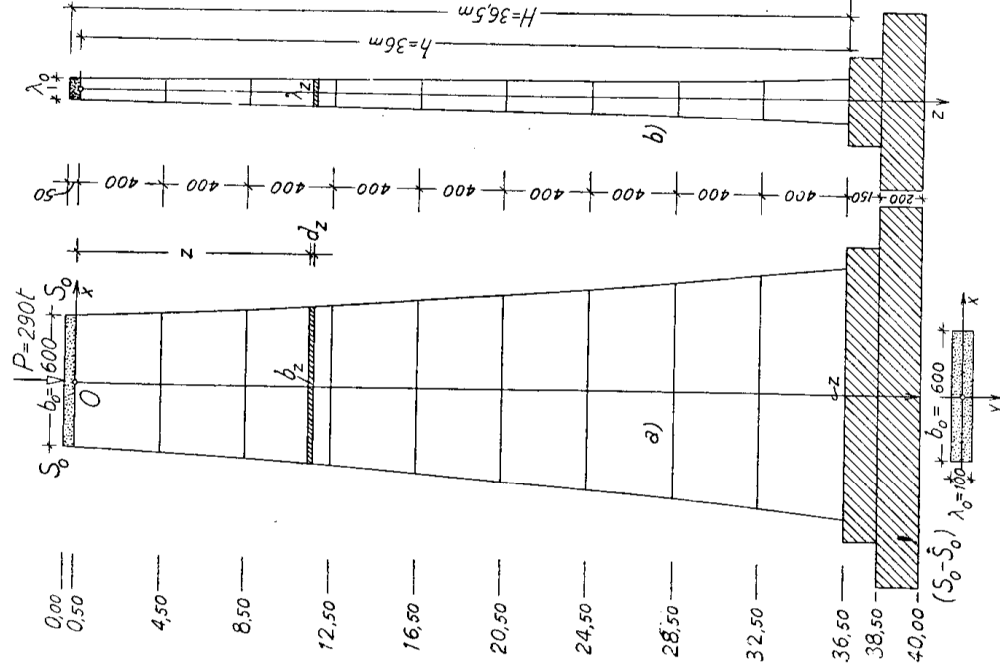


Fig. 65

con γ peso specifico del materiale; sostituendo allora nell'ultima con riguardo alla (93), si perviene alla seguente equazione differenziale a variabili separate:

ovvero passando dai logaritmi ai numeri:

$$(96) \quad A_x = A_0 e^{\frac{\gamma}{k} z}.$$

Questa ci dice che, ove si convenga di far variare le sezioni con legge omotetica, il profilo del solido in un qualunque piano per il suo asse è una curva logaritmica.

Se sono μ_x il valore del rapporto di omotetica per la sezione corrente riferita alla sezione terminale $A_0 = \lambda_0 b_0$, e b_x , λ_x le corrispondenti dimensioni di essa sicchè è:

$$\mu_x = \frac{b_x}{b_0} = \frac{\lambda_x}{\lambda_0},$$

e quindi anche:

$$A_x = \lambda_x b_x = \lambda_0 b_0 \mu_x^2 = A_0 \mu_x^2,$$

la (95) ad esempio diventa:

$$2 \lg \mu_x = \frac{\gamma}{k} z.$$

Ponendovi:

$$\gamma = 1800 \text{ Kg/m}^3 = 0,0018 \text{ Kg/cm}^3 \quad \text{e} \quad k = 5 \text{ Kg/cm}^2,$$

si ottiene in definitiva:

$$(97) \quad \lg \mu_x = \frac{1}{2} \times \frac{0,0018}{5} z = 0,18 \times 10^{-3} z,$$

la quale è capace di fornire i valori di μ_x per i vari punti del profilo logaritmico.

In pratica, specie nelle opere in muratura, si sostituisce a questa curva una sua poligonale inscritta, distanziandone opportunamente i vertici.

È quanto abbiamo fatto noi per le quote di valore pari:

$$z = 4, 8, 12, \dots, 36 \text{ m}.$$

Il calcolo di μ_x e delle corrispondenti dimensioni

delle sezioni trasversali a queste quote è raccolto nella Tabella che segue.

La fig. 65a) e b) mostra in larghezza e di fianco il profilo della pila così costituita.

Il suo volume, dettane h l'altezza al di sotto dello strato di calcestruzzo, vale notoriamente:

$$V = \int_0^h A_x dz = \frac{k}{\gamma} \int_{A_0}^{A_h} dA_x = \frac{k}{\gamma} (A_h - A_0),$$

dove è da porre per la sezione terminale inferiore A_h :

$$A_h = b_h \lambda_h = 1147,032 \times 191,172 \cong 219280 \text{ cm}^2;$$

sicchè:

$$V = \frac{5}{0,0018} \times (219280 - 60000) = 609159840 \text{ cm}^3 \cong 609,16 \text{ m}^3.$$

Il carico totale alla risega di fondazione (carico cui dovremmo riferirci per il calcolo del blocco di fon-

z cm	$\lg \mu_x$	μ_x	$\lambda_x = 100 \frac{\mu_x}{\text{cm}}$	$b_x = 600 \frac{\mu_x}{\text{cm}}$	μ_x^2	$A_x = A_0 \mu_x^2$ cm ²
400	0,072	1,063965	106,397	638,379	1,01284	67924
800	0,144	1,154884	115,488	692,930	1,33379	79695
1200	0,216	1,241120	124,112	744,672	1,54038	92421
1600	0,288	1,333760	133,376	800,256	1,77892	106701
2000	0,360	1,433340	143,334	860,004	1,91122	123238
2400	0,432	1,540490	154,049	624,294	2,37314	142342
2800	0,504	1,655330	165,533	993,198	2,74002	164375
3200	0,576	1,778910	177,891	1067,346	3,16484	189882
3600	0,648	1,911720	191,172	1147,032	3,65460	219280

dazione una volta nota la natura del terreno) vale pertanto:

$$Q = P + P_c + P_{pila} = 290 + 7,2 + 609,16 \times 1,8 \cong 1394 \text{ t}.$$

Esercizio 57 — Una molla a balestra di lunghezza $l = 70 \text{ cm}$, è destinata a sopportare al centro un carico concentrato $P = 0,5 \text{ t}$. Intendendo di realizzarla mediante foglie di spessore $s = 8 \text{ mm}$ e larghezza $\lambda = 80 \text{ mm}$ con un materiale atto a sopportare un carico ammissibile $k = 1,8 \text{ t/cm}^2$ ($= 18 \text{ Kg/mm}^2$), proporziolarla come solido di ugual resistenza.

Le molle a balestra per i veicoli sopportano, in condizioni ordinarie di equilibrio, due carichi uguali agli estremi i quali, riportati sull'appoggio in mezzeria (fig. 66 a)), vi destano una reazione doppia di ciascuno di essi: considerata come un unico complesso elastico, una molla a balestra si comporta quindi come l'insieme di due mensole simmetricamente uguali, incastrate in corrispondenza della sezione comune e caricate all'estremo (fig. 66 b)); ciò che riconduce il suo dimensionamento a quello di una delle mensole.

Per soddisfare l'ugual resistenza alla flessione, il calcolo muoverà dalla condizione — equazione di stabilità — che nella sezione corrente della mensola il momento agente generi una stessa tensione massima, pari precisamente al carico di sicurezza k ; in formula:

$$k = \frac{M_x}{W_x},$$

se con $W_x = 2 J_x / h_x = b_x h_x^3 / 6$ si indica il modulo di resistenza della sezione corrente di forma rettangolare con base b_x e altezza h_x ; dovrà dunque anche essere:

$$(98) \quad k = \frac{h_x M_x}{2 J_x} = \frac{6 M_x}{b_x h_x^3},$$

per modo che l'equazione differenziale della linea elastica diviene:

$$-\frac{1}{r} = \frac{M_x}{E J_x} = \frac{2 k}{E h_x};$$

tale equazione mette in evidenza una proprietà caratteristica delle travi di ugual resistenza alla flessione e cioè che il raggio di curvatura della linea elastica è proporzionale all'altezza h_x della trave,

sicchè per $h_x = \text{cost.}$ la detta linea risulta un arco di circolo.

Con le notazioni di figura 66 b) e a meno del segno, il momento M_x nella sezione corrente vale:

$$M_x = \frac{P}{2} z ;$$

e in particolare nella sezione C di incastro:

$$M_c = \frac{P}{2} l ;$$

dette allora per questa sezione B ed H la base e l'altezza, le equazioni (98) di stabilità all'ascissa z corrente e all'incastro divengono in modo esplicito:

$$k = \frac{3 P z}{b_x h_x^2} , \quad k = \frac{3 P l}{B H^2} ;$$

divise m. a m. queste forniscono:

$$\frac{z}{l} = \frac{b_x h_x^2}{B H^2} ,$$

dalla quale, facendovi $h_x = H = \text{cost.}$ si ottiene in definitiva:

$$\frac{z}{l} = \frac{b_x}{B} ;$$

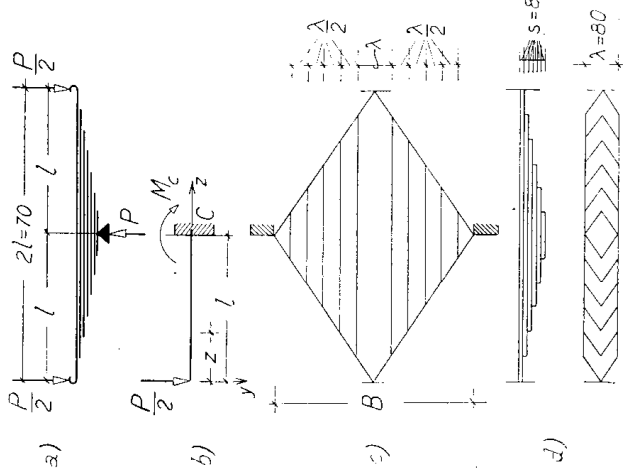


Fig. 66

questa dice che, nell'ipotesi ora fatta di altezza costante, la larghezza b_x della mensola varia linearmente con z , che cioè la vista orizzontale della molla di ugual resistenza acquista la forma a losanga del tipo rappresentato in figura 66 c).

È questa appunto sostanzialmente la forma secondo cui vengono foggiate le molle a balestra, l'ugual resistenza risfondendo più che a una necessità di carattere economico, a quella di avere, insieme alla sicurezza, la massima deformabilità nella sospensione ela-

stica dei veicoli, onde addolcirne il movimento e risparmiare loro la trasmissione rigida delle irregolarità della piattaforma stradale.

In pratica però la forma di larghezza variabile si mostra poco comoda perchè trasversalmente troppo ingombrante; si ricorre per questo a un artificio, consistente nel disporre in altezza ciò che dovrebbe esserlo in larghezza, senza peraltro alterare le condizioni di lavoro del materiale. Ciò si ottiene sostituendo la conformazione ora detta con quest'altra, che può immaginarsi risultare da essa suddividendo, simmetricamente al piano medio (fig. 66c), in strisce longitudinali di larghezza λ la centrale $\lambda/2$ le altre, saldato quindi le strisce simmetriche così ottenute lungo i bordi affacciati e sottoponendole infine nell'ordine in cui si incontrano a partire dal centro, libere per altro di scorrere le une sulle altre; è infatti ovvio che in tal modo ogni lamella si deforma con la stessa curvatura della trave complessiva e assorbe un'uguale frazione di momento.

Poichè sono prefissate fra i dati la larghezza $\lambda = 80$ mm e l'altezza $s = 8$ mm delle lamelle, non resta che da calcolare la larghezza totale B necessaria all'incastro; il rapporto B/λ fornirà allora il numero n di foglie da impiegare.

Dalla equazione di stabilità già scritta per la sezione di incastro, dove è da farsi $H = s = 8$ mm, si ricava successivamente:

$$B = \frac{3Pl}{ks^2} = \frac{3 \times 0,5 \times 35}{1,8 \times 0,64} = 45,6 \text{ cm} .$$

È allora:

$$n = \frac{B}{\lambda} = \frac{45,6}{80} \cong 6 ,$$

e la conformazione della balestra risulta quella indicata nella fig. 66d), rispettivamente in vista e in pianta.