B - *TRAVI CONTINUE*

Esercizio 50 — **Una trave continua a due campate di luce $l_1 = 4\,m$ e $l_2 = 3\,m$, è gravata alla mezzeria di ciascuna campata da un carico concentrato $P = 4\,t$. Costruire i diagrammi del momento flettente e del taglio nell'ipotesi che gli appoggi siano rigidi.**

Si ricorda che una trave continua è tante volte iperstatica per quanti sono gli appoggi intermedi se è appoggiata semplicemente agli estremi, altrettante volte più una o più due se è invece incastrata in corrispondenza di uno di questi o di ambedue.

Nel caso nostro si ha dunque una sola incognita iperstatica; come tale potremmo assumere o la reazione di uno degli appoggi, o il momento M_C sull'appoggio intermedio; in tal caso ci possiamo valere dell' *equazione dei tre momenti*, che nell'ipotesi qui supposta della trave a momento di inerzia costante in tutte le campate, per l'appoggio m^{simo} intermedio generico si scrive:

$$M_{m-1}\, l_m + 2\, M_m\, (l_m + l_{m+1}) + M_{m+1}\, l_{m+1} = -\,6\,(B^*_m + A^*_{m+1}) + 6\,EJ\left(\frac{\eta_m - \eta_{m-1}}{l_m} - \frac{\eta_{m+1} - \eta_m}{l_{m+1}}\right). \tag{89}$$

Si ricorda anche in linea schematica come si perviene a questa equazione.

Immaginando di tagliare materialmente la trave in corrispondenza dei singoli appoggi, la successione di travi semplici che così si ottiene equivale al sistema continuo primitivo, a condizione di applicare alle estremità di ciascuna campata, come espliciti, i momenti che si sviluppavano prima del taglio sui rispettivi appoggi: ogni campata resta così assimilata a una trave imperfettamente incastrata agli estremi, i cui vincoli comportino eventualmente dei cedimenti relativi; l'applicazione successiva delle (84) varrebbe allora già a determinare i momenti incogniti M_i.

Ma la strada che porta direttamente alla equazione dei tre momenti, ha alla base il metodo analitico-grafico; per la sezione sull'appoggio C_m —estrema di destra per la campata $(m-1)^{sima}$, estrema di sinistra per la m^{sima}— potremo infatti scrivere la rotazione β_m pensata al primo modo e la rotazione α_{m+1} pensata invece al secondo modo; per l'unicità della tangente alla linea elastica sull'appoggio, dovrà allora risultare ovviamente:

$$\beta_m = - \alpha_{m+1} .$$

Questa relazione è già sinteticamente l'equazione dei tre momenti, bastando porre in luogo delle rotazioni le loro espressioni in funzione dei momenti M_{m-1}, M_m ed M_m, M_{m+1} rispettivamente, perchè si trasformi nella (89).

In tale equazione, i termini B^*_m ed A^*_{m+1} —*termini di carico*— rappresentano le reazioni dell'appoggio m^{simo} pensato una volta della campata di sinistra una volta di quella di destra, qualora siano caricate dai rispettivi diagrammi semplici dei momenti; i termini :

$$\frac{\eta_m - \eta_{m-1}}{l_m} \quad \text{e} \quad \frac{\eta_{m+1} - \eta_m}{l_{m+1}}$$

rappresentano infine, sempre per le due campate contigue indipendenti, le rotazioni della sezione sullo stesso appoggio m^{simo} per effetto del cedimento relativo all'appoggio che lo precede e a quello che lo segue.

Per noi questi due termini risultano nulli; è d'altra parte (fig. 59) $M_{m-1} \equiv M_A = 0$, $M_m \equiv M_C$; $M_{m+1} \equiv M_B = 0$; la (89) si semplifica pertanto in quest'altra:

$$2 M_C (l_1 + l_2) = - 6 (B^*_1 + A^*_2) , \tag{89'}$$

a proposito della quale sarà bene osservare ancora una volta (v. anche gli Ess. 45 e 49) che, stante la supposta rigidezza degli appoggi, il momento M_C è indipendente dalla flesso-rigidezza EJ della trave, e quindi altrettanto è vero per i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.

Dalla (89′) risulta:

$$M_C = - \frac{3}{l_1 + l_2} (B^*_1 + A^*_2) ,$$

la quale fornisce immediatamente M_C una volta noti i termini di carico B^*_1 e A^*_2.

Al proposito, il diagramma semplice dei momenti per la prima campata è (fig. 59 *b*)) la bilatera con vertice sulla verticale del carico e, stante la simmetria, altezza $P_1 l_1/4$ e quindi chiudente con la fondamentale l'area:

$$\frac{P_1 l_1}{4} \times \frac{l_1}{2} = \frac{P_1 l_1^2}{8} \; .$$

Ancora per simmetria, la reazione B^*_1 vale allora la metà di quest'area:

$$B^*_1 = \frac{1}{16} P_1 l_1^2 \; .$$

In modo analogo:

$$A_2 = \frac{1}{16} P_2 l_2^2$$

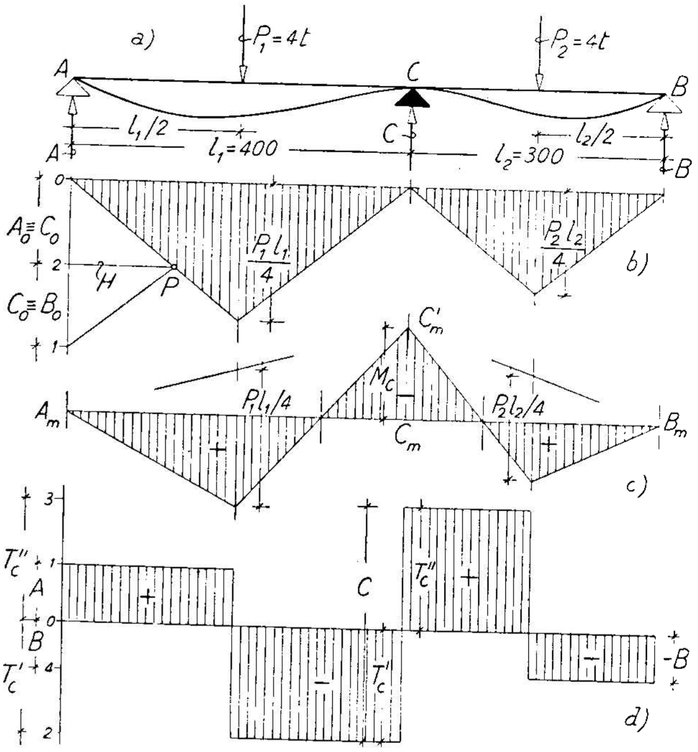

Fig. 59

e quindi sostituendo e di seguito coi nostri dati:

$$M_C = -\frac{3}{l_1 + l_2} \times \frac{1}{16} (P_1 l_1^2 + P_2 l_2^2) = -\frac{3}{(3+4)\,16} (4 \times 16 + 4 \times 9) \cong -2{,}68 \text{ tm.}$$

Per tracciare il diagramma dei momenti flettenti, basta ora riportare sulla verticale dell'appoggio C a partire da una fondamentale arbitraria $A_m B_m$ (fig. 59 *c*)) il segmento $\overline{C_m C'_m}$ che, nella scala H pari alla distanza polare con la quale si sono costruiti i diagrammi semplici dei momenti, rappresenti M_C, e sovrapporre quindi alla bilatera $A_m\, C'_m\, B_m$ le superficie semplici dei momenti costruite.

Il diagramma del taglio potrebbe ora dedursi per derivazione da quello dei momenti così determinato; si può però anche costruire direttamente, determinando per via analitica le reazioni degli appoggi.

Nel caso generale, il taglio T''_m nella sezione a destra dell'appoggio m^{simo} può infatti valutarsi prendendo i momenti intorno all'appoggio $(m+1)^{simo}$:

$$(90) \qquad M_{m+1} = M_m + T''_m \, l_{m+1} + \mathfrak{M}_{m+1} \; .$$

nella quale $\mathfrak{M}_{m+1}$ è il momento rispetto al detto appoggio del carico insistente sulla campata $(m+1)^{sima}$.

Partendo nel caso nostro dall'appoggio A, per modo che:

$$T''_A \equiv A \; ; \qquad M_m \equiv M_A = 0 \; ; \qquad M_{m+1} \equiv M_C \; ; \qquad l_{m+1} \equiv l_1 \; ;$$

$$\mathfrak{M}_{m+1} = -\frac{P_1 \, l_1}{2} = -4 \times 2 = -8 \text{ tm} = -800 \text{ tcm} \; ,$$

risulta:

$$A = \frac{M_C - \mathfrak{M}_{m+1}}{l_1} = \frac{-268 + 800}{400} \cong 1{,}33 \text{ t} \; ;$$

per l'appoggio C invece, essendo ora:

$$M_m \equiv M_C \; , \qquad M_{m+1} \equiv M_B = 0 \; , \qquad l_{m+1} = l_2 \; ,$$

$$\mathfrak{M}_{m+1} = -\frac{P_2 \, l_2}{2} = -4 \times 1{,}5 = -6 \text{ tm} = -600 \text{ tcm} \; ,$$

risulta:

$$T''_C = \frac{-M_C - \mathfrak{M}_{m+1}}{l_2} = \frac{268 + 600}{300} \cong 2{,}89 \text{ t} \; .$$

Il taglio T'_m nella sezione immediatamente alla sinistre di C_m può ora determinarsi o allo stesso modo prendendo i momenti intorno all'appoggio C_{m-1}, ovvero imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale per la campata di sinistra; così per T'_C risulta subito:

$$T'_C = A - P_1 = 1{,}33 - 4 = -2{,}67 \text{ t} \; ;$$

e per $T'_B \equiv B$ quest'altra:

$$T'_B \equiv B = T''_C - P_2 = 2{,}89 - 4 = -1{,}11 \text{ t} \; .$$

Imponendo allora l'equilibrio alla traslazione verticale per la campata infinitesima che si ottiene coi due tagli adiacenti, dalle due parti, all'appoggio C:

$$T'_C + C = T''_C ,$$

resta determinata anche la reazione C:

$$C = T''_C - T'_C = 2,89 + 2,67 = 5,56 \text{ t} .$$

Una volta noti questi elementi, il diagramma del taglio (fig. 59 *d*)) si costruisce direttamente.

Esercizio 51 — **Una trave continua a tre campate è gravata: in quella centrale, di luce $l = 5$ *m*, da un carico uniforme $p = 0,5$ *t/m*, in ognuna delle due di riva, di luce comune $l_1 = 3$ *m*, da un carico pure uniforme $p_1 = 0,3$ *t/m*.**
Progettare la trave nel modo più economico come NP I, nell'potesi che gli appoggi siano rigidi.

—◇—

Per il calcolo di progetto occorre individuare la sezione più cimentata; ciò è come dire, determinare i momenti M_1 ed M_2 sui due appoggi intermedi C_1 e C_2 e costruire quindi il diagramma dei momenti flettenti e del taglio; d'altra parte, bastando di solito, come si è avuto altrove occasione di avvertire, dimensionare alla flessione, potremmo anche omettere la costruzione del diagramma del taglio.

Per l'ipotesi della rigidezza degli appoggi ed essendo $M_A = M_B = 0$, le equazioni dei tre momenti (89) che valgono a determinare le due incognite iperstatiche M_1 ed M_2 si riducono, come è facile verificare, alla forma semplice:

$$(91) \qquad \begin{aligned} 2(l_1 + l)\, M_1 + l\, M_2 &= -6\,(B^*_1 + A^*_2) , \\ l\, M_1 + 2(l + l_1)\, M_2 &= -6\,(B^*_2 + A^*_3) , \end{aligned}$$

in cui, non figurando i termini contenenti i cedimenti relativi, non figura nemmeno la flessorigidezza EJ della trave.

Quanto ai termini di carico, essendo le superficie semplici dei momenti dei segmenti di parabola di freccia $p_1\, l_1^2/8$ per le due campate di riva e $pl^2/8$ per quella centrale e quindi di area rispettivamente:

$$Q_1 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{8}\, p\, l_1^2 \times l_1 = \frac{1}{12}\, p_1\, l_1^3 \,, \qquad Q = \frac{1}{12}\, p\, l^3 \,,$$

risulta in modo ovvio:

$$B^*_1 = A^*_3 = \frac{1}{2}\, Q_1 = \frac{1}{24}\, p_1\, l_1^3 \,, \qquad A^*_2 = B^*_2 = \frac{1}{2}\, Q = \frac{1}{24}\, p\, l^3 \,.$$

Sostituendo nelle due equazioni sopra scritte, si riconosce subito che i loro secondi membri risultano uguali e precisamente pari ciascuno a:

$$\frac{1}{4}\,(p_1\, l_1^3 + p\, l^3) \,.$$

Uguagliando allora i primi membri, ne risulta con facili trasformazioni e com'era del resto prevedibile per ragioni di simmetria:

$$M_1 = M_2 \,.$$

Da una qualunque delle due equazioni si trae allora:

$$M_1\,(2\, l_1 + 3\, l) = -\frac{1}{4}\,(p_1\, l_1^3 + p\, l^3)$$

da cui:

$$M_1 = M_2 = -\frac{1}{4}\,\frac{p_1\, l_1^3 + p\, l^3}{2\, l_1 + 3\, l} \,,$$

e coi dati numerici:

$$M_1 = -\frac{1}{4}\,\frac{0{,}3 \times 27 + 0{,}5 \times 125}{6 + 15} = -\,0{,}84 \text{ tm} \,.$$

Il diagramma dei momenti flettenti risulta allora (fig. 60 *b*)) sovrapponendo alle superficie semplici dei momenti, le superficie dei momenti negativi —triangolari per le campate estreme, rettangolare per la intermedia— che si ottengono riportando sulla verticale degli appoggi intermedi i momenti M_1 ed M_2. Lo stesso diagramma è riferito in fig. 60 *c*) a una fondamentale orizzontale $A_m\ B_m$.

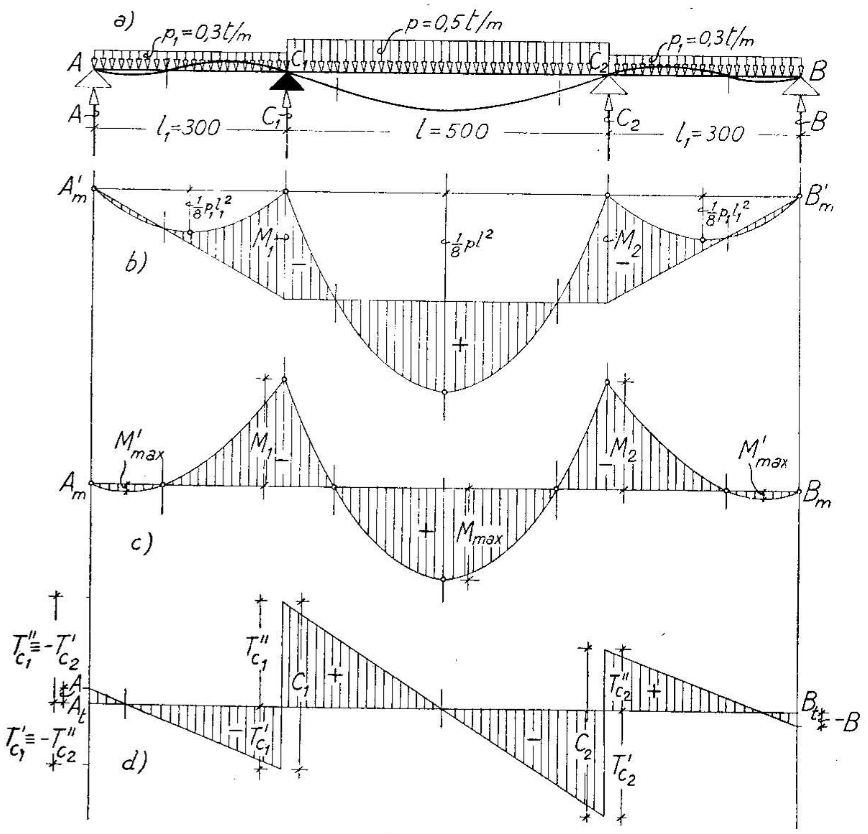

Fig. 60

Il massimo momento positivo si verifica in mezzeria della campata centrale e vale:

$$M_{\max} = \frac{1}{8}\, p\, l^2 + M_1 = \frac{1}{8}\, 0{,}5 \times 25 - 0{,}84 = +\, 0{,}7225 \text{ tm} \; .$$

Per tracciare il diagramma del taglio, basta calcolare, col procedimento già visto all'Esercizio precedente, i tagli immediatamente a sinistra e a destra degli appoggi.

Così per i tagli nelle sezioni estreme della prima campata è rispettivamente e di seguito:

$$A = \frac{p_1\, l_1}{2} + \frac{M_1}{l_1} = \frac{0{,}3 \times 3}{2} - \frac{0{,}84}{3} = +\, 0{,}17 \text{ t}$$

$$T'_{C_1} = -\, p_1\, l_1 + A = \times\, 0{,}3 \times 3 + 0{,}17 = -\, 0{,}73 \text{ t} \; .$$

Per ragioni di simmetria è poi nella campata di destra:

$$B = -A = -0{,}17\ \mathrm{t}\ ; \qquad T''_{C_2} = -T'_{C_1} = +0{,}73\ \mathrm{t}\ ;$$

e ancora, per la campata centrale:

$$T''_{C_1} = -T'_{C_2} = \frac{p\,l}{2} = \frac{0{,}5 \times 5}{2} = +1{,}25\ \mathrm{t}\ .$$

Giacchè nelle singole campate il taglio varia linearmente, i valori ora trovati bastano per il tracciamento del diagramma (fig. 60 *d*)).

Si riconosce dopo di ciò che le sezioni più cimentate sono quelle della campata centrale adiacenti agli appoggi, sezioni che sopportano il momento flettente comune $M_1 = M_2 = -0{,}84\ tm$, massimo in valore assoluto, e anche il massimo taglio $T''_{C_1} = -T'_{C_2} = 1{,}25\ t$.

Dimensionando alla flessione, la relativa equazione di stabilità porta ad adottare come minimo profilo a I per cui è $W_x \geqslant M_{\max} : k = 84:1 = 84\ \mathrm{cm}^3$, il NP I 160, che possiede un $W_x = 117\ \mathrm{cm}^3$. Il non trascurabile eccesso di questo modulo su quello strettamente necessario, assicura con certezza la stabilità anche alla sollecitazione composta di flessione e taglio, e possiamo perciò risparmiarcene la verifica.

Esercizio 52 — **Una trave continua su quattro appoggi con le campate di riva di luce $l_1 = 4\ m$, quella centrale di luce $l = 6\ m$, è costituita da un NP I *240*. Costruirvi i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione e verificarne la stabilità per $k = 1{,}2\ t/cm^2$, nell'ipotesi che sia gravata da un carico concentrato $P = 1\ t$ in mezzeria della prima campata e che l'appoggio intermedio C_2 subisca un cedimento $\eta = 5\ mm$. Si assuma $E = 2100\ t/cm^2$.**

Le due equazioni (91) dei tre momenti scritte all'Esercizio precedente per una trave nelle analoghe condizioni di vincolo di quella in esame, per essere ora manifestamente $A^*_2 = B^*_2 = A^*_3 = 0$ e tenendovi conto in più del cedimento η al modò previsto dalla forma generale (89), divengono ora (fig. 61):

$$(92)\qquad \begin{aligned} 2\,(l_1 + l)\,M_1 + l\,M_2 &= -\,6\,B^*_1 - 6\,EJ\,\frac{\eta}{l} \\ l\,M_1 + 2\,(l + l_1)\,M_2 &= +\,6\,EJ\,\frac{l_1 + l}{l\,l_1} \end{aligned}$$

Risolvendo questo sistema ad esempio col metodo di sostituzione, è facile riconoscere ch'esso ammette per M_1 e M_2 le soluzioni:

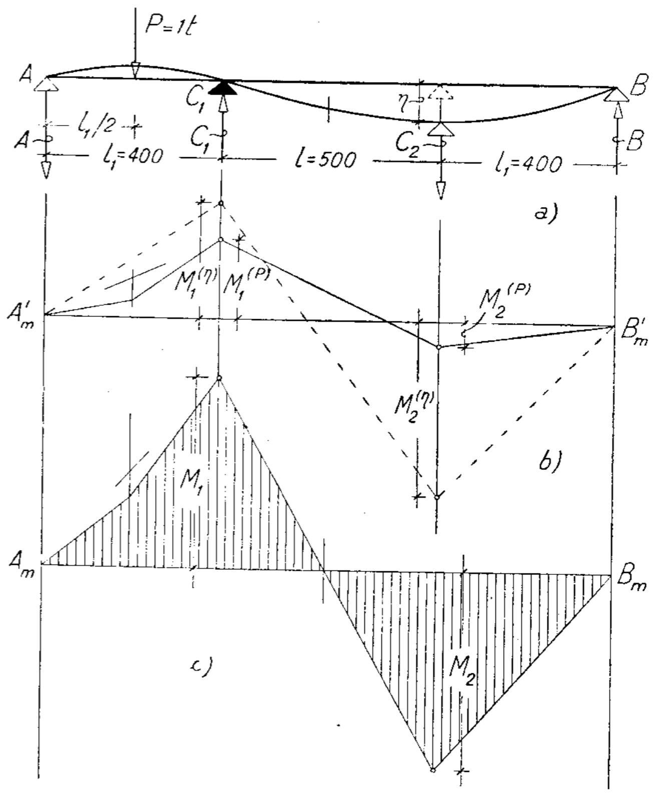

Fig. 61

$$M_1 = -\,\frac{12\,(l_1 + l)}{(2\,l_1 + 3\,l)\,(2\,l_1 + l)}\,B^*_1 - \frac{6\,EJ\,(l_1 + l)}{l\,l_1\,(2\,l_1 + 3\,l)}\ ;$$

$$M_2 = +\,\frac{6\,l}{(2\,l_1 + 3\,l)\,(2\,l_1 + l)}\,B^*_1 - \frac{6\,EJ\,(l_1 + 2\,l)}{l\,l_1\,(2\,l_1 + 3\,l)}\ ,$$

nelle quali risultano formalmente separati i contributi del carico P (che compare nel termine di carico B^*_1) e del cedimento η.

Poichè, come già noto dall'Esercizio 50, è $B^*_1 = Pl_1^2/16$, sostituendo i dati numerici, fra cui (cfr. il Manuale) $J_x = 4240$ cm^4, si perviene per M_1 ed M_2 ai seguenti valori:

$$M_1 = -\,36{,}12 - 52{,}26 = -\,88{,}38 \text{ tcm}$$

$$M_2 = +\,10{,}03 + 81{,}30 = +\,91{,}33 \text{ »}\ ,$$

dove abbiamo continuato a distinguere anche numericamente i due contributi di P e di η. Per rendere più che mai manifesti questi due contributi, in figura 61 *b*) sono stati costruiti rispetto a una stessa fondamentale $A'_m B'_m$ il diagramma del momento conseguente alla sola presenza di P (a tratto continuo) e quello conseguente al solo cedimento η; in figura 61 *c*) è invece costruito il diagramma risultante dei due, in relazione al quale è indicato in figura 61 *a*) l'andamento della linea elastica della trave.

Sarebbe ora immediato dedurre da questo diagramma quello del taglio, o per derivazione, ovvero col procedimento già seguito ai due Esercizi precedenti, determinando cioè i tagli immediatamente a sinistra e a destra degli appoggi; all'uopo sono indicati in figura 61 *a*) i sensi che hanno le varie reazioni.

Per quanto riguarda poi la stabilità, questa è senz'altro verificata, in quanto il momento massimo in valore assoluto è $M_2 = 91{,}33$ tcm mentre il NP I 240 ha un modulo $W_x = 353$ cm^3: il largo margine che tale valore contiene nei confronti di quello strettamente necessario è sufficiente ad assorbire con larghezza anche il taglio che abbiamo fin qui trascurato.

C - *TRAVI GERBER O A MENSOLA*

Esercizio 53 — **Progettare la trave con lo stesso schema e sotto le stesse condizioni di carico di cui all'Esercizio 51, nell'ipotesi che si voglia realizzarla come trave Gerber con due cerniere nella campata centrale distanti dagli appoggi di** *0,96 m*.

È noto che la trave Gerber può pensarsi derivare da una ordinaria trave continua rendendola staticamente determinata mediante la disposizione opportuna di un certo numero di cerniere: e precisamente tante quante sono le incognite iperstatiche che presenta la trave continua e disposte in modo che non vi siano più di due appoggi fra due cerniere consecutive e non più di due cerniere fra due appoggi consecutivi.