

TRAVI INFLESSE

A - TRAVI A UNA LUCE

Esercizio 40 — Una mensola prismatica lunga $l = 2,5 \text{ m}$ a sezione rettangolare con dimensioni $10 \times 20 \text{ cm}$ è gravata uniformemente per tutta la lunghezza da un carico flettente $p = 0,2 \text{ t/m}$ e all'estremo libero da un carico verticale $P = 4 \text{ t}$.

Costruire i diagrammi delle tensioni per la sezione all'incastro e determinare la rotazione e l'abbassamento dell'estremo libero nell'ipotesi che sia $E = 2200 \text{ t/cm}^2$.



È noto che la mensola è una trave staticamente determinata; per carico qualunque, i parametri della reazione del vincolo sono tre: le componenti secondo due direzioni prestabilite e il momento di incastro; nel caso in esame, i carichi essendo verticali, i parametri si riducono a due: una componente A necessariamente verticale e il momento M_A . Imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale e alla rotazione, si hanno per questi due parametri le espressioni:

$$A = P + pl; \quad M_A = -Pl - \frac{pl^2}{2};$$

e coi numeri:

$$\begin{aligned} A &= 4 + 0,2 \times 2,5 = 4,5 \text{ t}; & M_A &= -4 \times 2,5 - \frac{0,2 \times 2,5^2}{2} = \\ & & &= -10,625 \text{ tm} = -1062,5 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Il momento flettente M_x nella sezione all'ascissa generica x , può ora essere espresso o con riferimento alle forze alla sinistra:

$$(70) \quad M_x = M_A + Ax - \frac{px^2}{2},$$

ovvero con riferimento alle forze alla destra; cioè,

detta x' l'ascissa della sezione contata dall'estremo libero:

$$(70') \quad M_{x'} = - P x' - \frac{p x'^2}{2} .$$

Il momento è dunque ovunque negativo, variando con legge parabolica dal valore zero in corrispondenza dell'estremo libero al valore M_A in corrispondenza dell'incastro.

In modo analogo, ancora con riferimento alle forze alla destra, il taglio nella sezione di ascissa x' ha l'espressione:

$$(71) \quad T_{x'} = P + p x' ,$$

varia cioè con legge lineare dal valore P in corrispondenza della sezione adiacente all'estremo libero fino al valore A

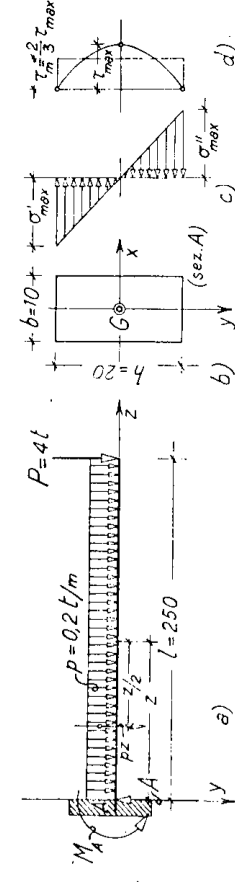


Fig. 47

in corrispondenza della sezione vincolata.

La sezione *pericolosa* è dunque quella all'incastro, il momento massimo $T_{\max} \equiv A$ e soggetta contemporaneamente al taglio massimo in valore assoluto.

I diagrammi delle tensioni che queste due caratteristiche prese isolatamente destano nella sezione si costruiscono, come noto, l'uno sulla formula di Navier (37), l'altro sulla (53) della teoria approssimata del taglio cioè:

$$\sigma_x = \frac{M_A}{J_x} y , \quad \tau = \frac{A S_r}{J_x b} .$$

Tali diagrammi sono rappresentati nella fig. 47 c) e d) e non ci trattiamo a dirne di più, avendone già trattato ampiamente agli Esercizi 21 ÷ 23 e 28 ÷ 32; solo

avvertiamo che per quello delle tensioni tangenziali abbiamo indicato, per confronto, anche la tensione media τ_m che nascerebbe nella sezione qualora il taglio vi si ripartisse in modo uniforme:

$$\tau_m = \frac{A}{bh} = \frac{4,5}{10 \times 20} = 0,0225 \text{ t/cm}^2,$$

tensione che notoriamente vale i 2/3 di quella massima all'altezza dell'asse neutro x , per modo che:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \tau_m = \frac{3}{2} \times 0,0225 = 0,034 \text{ t/cm}^2;$$

il diagramma delle τ ha d'altronde andamento parabolico; è poi anche:

$$\sigma'_{\max} = |\sigma''_{\max}| = \frac{M_A}{W_x} = \frac{6 M_A}{bh^2} = \frac{6 \times 1062,6}{10 \times 20^2} = 1,59 \text{ t/cm}^2;$$

questi elementi bastano per il tracciamento dei due diagrammi.

Ciò posto, dall'equazione differenziale della linea elastica della mensola:

$$(72) \quad \frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{M_x}{EJ_x} = - \frac{1}{EJ_x} \left(M_A + Az - \frac{pz^2}{2} \right),$$

integrando una prima volta e notando che, ammesso l'incastro perfetto, la costante di integrazione risulta nulla, si ottiene:

$$(73) \quad \frac{d\eta}{dz} = - \frac{1}{EJ_x} \left[M_A z + \frac{Az^2}{2} - \frac{pz^3}{6} \right];$$

introducendovi per M_A ed A le espressioni date di sopra e detta α_l la rotazione dell'estremo libero, cioè per $z = l$, risulta con facili sviluppi:

$$\left(\frac{d\eta}{dz} \right)_{z=l} = \text{tg } \alpha_l = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{Pl^2}{2} + \frac{pl^3}{6} \right) = \frac{12}{Ebh^3} \left(\frac{Pl^2}{2} + \frac{pl^3}{6} \right),$$

e coi valori assegnati:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{12}{2200 \times 10 \times 20^3} \left[\frac{4 \times 250^2}{2} + \frac{0,002 \times 250^3}{6} \right] \cong 0,00888,$$

che corrisponde all'angolo $\alpha_1 = 30'31''$.

Integrando successivamente la (73) e ponendovi ancora $z = l$, si ricava in modo analogo per la freccia f l'espressione:

$$f = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{Pl^3}{3} + \frac{pl^4}{8} \right],$$

e sostituendo:

$$f = \frac{12}{2200 \times 10 \times 20^3} \left[\frac{4 \times 250^3}{3} + \frac{0,002 \times 250^4}{8} \right] \cong 1,49 \text{ cm}.$$

Si notino nelle espressioni della rotazione α_1 e della freccia f , formalmente separati, i contributi del carico concentrato P e del carico ripartito p .

Esercizio 41 — Una trave semplice orizzontale di luce $l = 6 \text{ m}$ è gravata lungo l'asse da un carico uniforme $p = 0,24 \text{ t/m}$ e dai carichi verticali $P_1 = 1 \text{ t}$, $P_2 = 3 \text{ t}$ e $P_3 = 2 \text{ t}$ rispettivamente alle ascisse $a_1 = 1 \text{ m}$, $a_2 = 3 \text{ m}$, $a_3 = 4 \text{ m}$ dall'appoggio di sinistra. Determinare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione e verificare la stabilità della trave nell'ipotesi che sia realizzata mediante un NP I 300, assumendo $k = 1,4 \text{ t/cm}^2$.

Per tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione (taglio o momento flettente) occorre conoscere anzitutto le reazioni A e B degli appoggi.

Conviene distinguere in queste i contributi che vi hanno separatamente il carico ripartito e i carichi concentrati, contributi che contrassegneremo con uno e con due apici; porremo cioè:

$$A = A' + A''; \quad B = B' + B''.$$

È intanto per simmetria:

$$A' = B' = \frac{pl}{2} = \frac{0,24 \times 6}{2} = 0,72 \text{ t} ;$$

dall'equazione di equilibrio alla rotazione scritta intorno a ciascuno degli appoggi, risulta d'altra parte e di seguito:

$$A'' = \frac{\sum P_i b_i}{l} = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3}{l} = \frac{1 \times 5 + 3 \times 3 + 2 \times 4}{6} = 3 \text{ t} .$$

$$B'' = \frac{\sum P_i a_i}{l} = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{l} = \frac{1 \times 1 + 3 \times 3 + 2 \times 4}{6} = 3 \text{ t} ;$$

e allora è anche in definitiva:

$$A = B = 0,72 + 3 = 3,72 \text{ t} .$$

Più che mai comoda è la separazione dei contributi del carico ripartito e concentrato per il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.

Ricordando infatti la relazione fondamentale:

$$(74) \quad \frac{dT_x}{dz} = -p_x ,$$

e che in assenza di carico ripartito il taglio resta costante fra due carichi concentrati, mentre nello attraversare un carico si è fatto subisce un salto pari all' intensità del carico stesso, possiamo ottenere comodamente il diagramma del taglio sommando quello lineare che risulta integrando il carico ripartito con quello a gradinata che nasce al modo ora detto dai carichi concentrati (fig. 48 b).

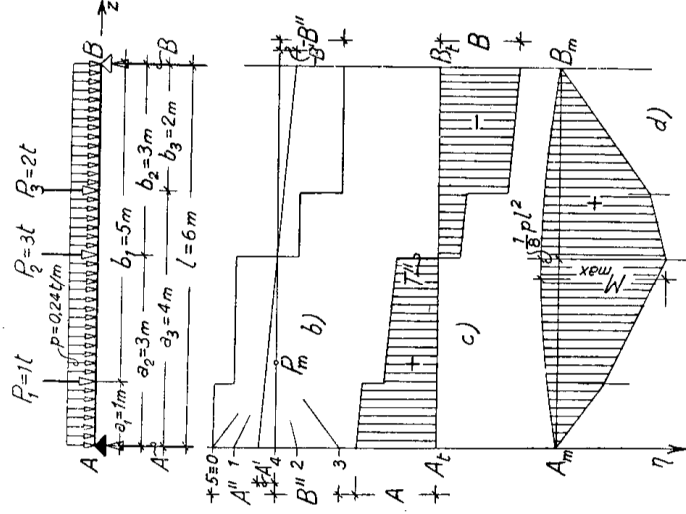


Fig. 48

La fig. 48 c) mostra il diagramma somma dei due: esso presenta, com'è ovvio, nei vari tratti la stessa inclinazione di quello relativo al carico ripartito e gli stessi salti di quello relativo ai carichi concentrati.

Con procedimento analogo, da queste altre relazioni:

$$(75) \quad \frac{dM_x}{dz} = T_x; \quad (76) \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = -p,$$

può intanto ottenersi il contributo del carico ripartito p nel diagramma dei momenti flettenti, come integrale secondo del carico; tale integrale risulta notoriamente una parabola con freccia $p\ell^2/8$ in mezzeria; per i carichi concentrati, il contributo è invece fornito da una qualunque poligonale che colleghi i carichi stessi con le corrispondenti reazioni A'' e B'' , riferendone le ordinate al lato di chiusa. Si avverta che tanto il carico ripartito quanto i carichi concentrati danno in tutta la trave, in quanto diretti verso il basso, momento positivo; per avere automaticamente la somma dei due contributi suddetti, la parabola e la poligonale in parola sono state perciò riferite in fig. 48 d) ad una stessa fondamentale $A_m B_m$ ma costruite da banda opposta di essa; naturalmente la scala delle ordinate della parabola occorre sia la stessa di quella delle ordinate della poligonale; deve quindi essere determinata in relazione alla distanza polare H impiegata nella costruzione di questa.

I diagrammi indicano che la sezione pericolosa della trave è quella adiacente, da sinistra, alla mezzeria, nella quale agiscono il taglio:

$$T'' = A'' - P_1 = 3 - 1 = 2 \text{ t}$$

e il massimo momento:

$$\begin{aligned} \max M &= \frac{1}{8} p \ell^2 + A'' \frac{\ell}{2} - P_1 \left(\frac{\ell}{2} - a_1 \right) = \frac{0,24 \times 6^2}{8} + \frac{3 \times 6}{2} - 1 \times (3-1) = \\ &= 1,8 + 9 - 2 = 8,08 \text{ tm} = 808 \text{ tcm}. \end{aligned}$$

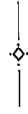
Delle due caratteristiche, il taglio desta nella sezione tensioni modestissime (supponendo che T'' in-

teressi solo la costola del profilato, di area $\cong 13,58 \times 1,08 \cong 14,7 \text{ cm}^2$, ripartendovisi uniformemente, risulterebbe infatti $\tau_m = 2/14,7 = 0,136 \text{ t/cm}^2$; chi decide della stabilità della trave è dunque il momento flettente, il quale, essendo $W_x = 652 \text{ cm}^3$ il modulo di resistenza rispetto ad x del NPI 300, desta ai bordi la tensione massima:

$$\sigma'_{\max} = |\sigma''_{\max}| = \frac{\max M}{W_x} = \frac{808}{652} = 1,24 \text{ t/cm}^2,$$

che è già abbondantemente al di sotto del carico di sicurezza $k = 1,4 \text{ t/cm}^2$ accettato.

Esercizio 41 — L'ossatura resistente di una paratoia alta $H = 3,6 \text{ m}$ è realizzata mediante profilati normali a I 200, disposti all'interasse $d = 0,9 \text{ m}$. Nell'ipotesi che tali profilati possano riguardarsi come travi semplicemente appoggiate, determinarvi la tensione massima, le rotazioni agli estremi e lo spostamento orizzontale della mezzeria. Si assuma $E = 2100 \text{ t/cm}^2$.



Ci riferiamo a una delle travi intermedie come più sollecitate rispetto alle due di riva, in quanto su una delle prime si scarica la pressione del liquido per tutto un interasse, cioè per una striscia verticale della paratoia di area (fig. 49 a) e b): $S = Hd = 3,6 \times 0,9 = 3,24 \text{ m}^2$, mentre sopra una trave di riva si scarica una striscia metà.

Detto p il peso specifico del liquido, che assumiamo pari a $1,2 \text{ t/m}^3$, la legge della pressione contro la paratoia alla quota z sul fondo è, come noto dalla idrostatica:

$$p = \gamma (H - z);$$

lungo l'asse di una trave intermedia si ha allora un diagramma lineare di pressioni (fig. 49 c)) la cui intensità alla stessa quota z sul fondo vale:

$$(77) \quad p_z = \gamma d (H - z),$$

e quindi con valore nullo al pelo libero ($z = H$) massimo invece, e precisamente pari a $p_{\max} = \gamma d H$, in corrispondenza del fondo ($z = 0$).

Sotto un tale diagramma di carico, le reazioni in A e B degli appoggi valgono manifestamente :

$$A = \frac{1}{3} \gamma d H^2 ;$$

$$B = \frac{1}{6} \gamma d H^2 .$$

Il taglio T_x nella sezione alla quota z generica sul fondo, ha per conseguenza l'e-

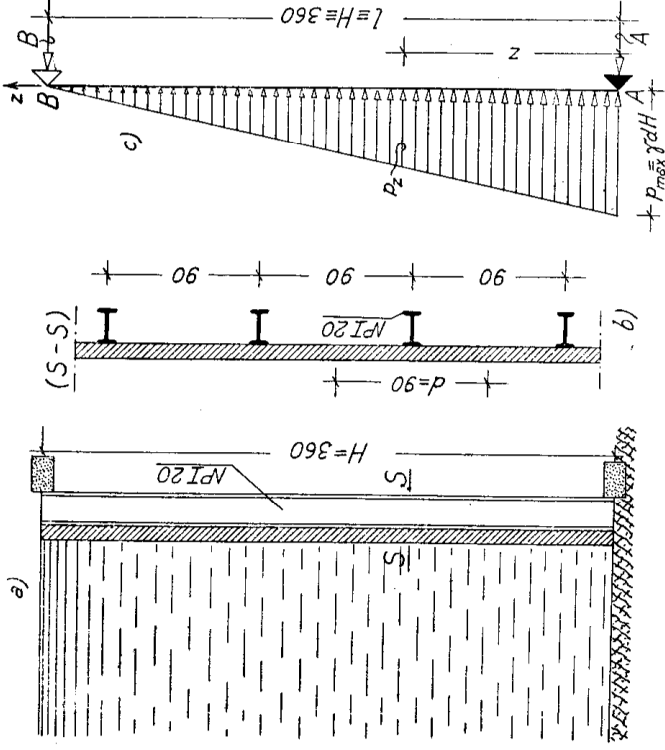


Fig. 49

spressione:

$$(78) \quad T_x = A - \int_0^z p_z dz = \frac{1}{3} \gamma d H^2 - \gamma d H z + \gamma d \frac{z^2}{2} ;$$

integrando e osservando che per le supposte condizioni di vincolo risulta nulla la costante di integrazione, se ne deduce per il momento flettente la legge:

$$(79) \quad M_x = \frac{1}{3} \gamma d H^2 z - \frac{1}{2} \gamma d H z^2 + \frac{1}{6} \gamma d z^3 = \frac{1}{6} \gamma d (2 H^2 z - 3 H z^2 + z^3) .$$

Per determinare la tensione massima nel NPI 200, occorre determinare anzitutto il momento massimo; questo si verifica nella sezione per la quale è:

$$\frac{d M_x}{d z} = T_x = \frac{1}{6} \gamma d (2 H^2 - 6 H z + 3 z^2) = 0$$

cioè anche:

$$z^2 - 2 H z + \frac{2}{3} H^2 = 0 .$$

Tale equazione, essendo $\Delta/4 = H^2 - 2H^2/3 = H^2/3$, ha per radici:

$$\bar{z} = H \pm H \frac{\sqrt{3}}{3},$$

di cui la prima manifestazione priva di significato; la seconda vale:

$$\bar{z} = H \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{H}{3} (3 - \sqrt{3}) = \frac{3,6}{3} \times 1,2827 = 1,54 \text{ m.}$$

Introdotta questo valore nella (79), se ne ricava:

$$\begin{aligned} \max M &= \frac{1}{6} \times 1,2 \times 0,9 \left[2 \times \sqrt{3,6^2} \times 1,54 - 3 \times 3,6 \times \sqrt{1,54^2 + 1,54^3} \right] \cong \\ &\cong 3,214 \text{ tm} = 321,4 \text{ tcm.} \end{aligned}$$

Essendo allora per il NPI 200 $W_x = 214 \text{ cm}^3$, la tensione massima vale:

$$\sigma_{\max} = \sigma'_{\max} = |\sigma'_{\max}| = \frac{\max M}{W_x} = \frac{321,4}{214} = 1,5 \text{ t/cm}^2$$

Per studiare la deformazione, ci si può rifare alla equazione differenziale (72) della linea elastica, equazione che in virtù della legge (79) del momento prende ora la forma esplicita:

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{1}{6 E J_x} \gamma d (2 H^2 z - 3 H z^2 + z^3);$$

integrando di seguito una prima e una seconda volta si ottiene:

$$(80) \quad \frac{d \eta}{dz} = - \frac{1}{6 E J_x} \gamma d (H^2 z^2 - H z^3 + \frac{z^4}{4}) + c_1;$$

$$(81) \quad \eta = - \frac{1}{6 E J_x} \gamma d \left(\frac{H^2 z^3}{3} - \frac{H z^4}{4} + \frac{z^5}{20} \right) + c_1 z + c_2,$$

dove le costanti c_1 e c_2 di integrazione possono determinarsi valendoci della condizione ai limiti che sia

nullo lo spostamento orizzontale dei punti A e B di vincolo, che sia cioè $\eta = 0$ per $z = 0$ e $z = H$; ne segue subito $c_2 = 0$, e dall'equazione:

$$-\frac{1}{6} \frac{\gamma d}{EJ_x} \left(\frac{H^3}{3} - \frac{H^3}{4} + \frac{H^3}{20} \right) + c_1 H = 0,$$

per c_1 l'espressione:

$$c_1 = \frac{\gamma d H^4}{45 EJ_x}.$$

Tale costante, sostituendo l'angolo alla tangente, misura anche, come ovvio dalla (80), la rotazione α_A della sezione sull'appoggio A ; coi numeri, poichè per il NPI 200 è $J_x = 2138 \text{ cm}^4$ e d'altronde può scriversi $\gamma = 1,2 \text{ t/m}^3 = 1,2 \times 10^{-6} \text{ t/cm}^3$, risulta:

$$\alpha_A \cong c_1 = \frac{1,2 \times 10^{-6} \times 90 \times 360^4}{45 \times 2100 \times 2138} \cong 0,00898 \text{ Rad} = 30' 52'',26.$$

Per avere la rotazione α_B dell'estremo superiore B basta poi porre $z = H$ nella (80) introducendovi insieme il valore ora trovato di c_1 :

$$\alpha_B \cong -\frac{1}{6} \frac{\gamma d}{EJ_x} d \gamma \left(H^4 - H^4 + \frac{H^4}{4} \right) + \frac{\gamma d H^4}{45 EJ_x} = -\frac{7}{360} \frac{\gamma d H^4}{EJ_x} \cong \cong 0,00786 \text{ Rad} = - (27' 1'',24).$$

Lo spostamento orizzontale della mezzeria, alla stretta di quello di ogni altra sezione della trave, si ottiene direttamente dalla (81) sostituendovi $z = H/2$; è cioè:

$$\eta_{z=H/2} = -\frac{1}{6} \frac{\gamma d}{EJ_x} \gamma d \left[\frac{H^3}{3} \cdot \frac{H^3}{8} - \frac{H^4}{4} \cdot \frac{H^4}{16} + \frac{1}{20} \frac{H^5}{32} \right] + \frac{\gamma d H^4}{45 EJ_x} \cdot \frac{H}{2} = \frac{5}{768} \frac{\gamma d H^5}{EJ_x} = \frac{5}{768} \frac{1,2 \times 10^{-6} \times 90 \times 360^5}{2100 \times 2138} \cong 0,95 \text{ cm}.$$

La freccia f , ovvero il massimo spostamento orizzontale, si verificherebbe infine in corrispondenza

della sezione di inclinazione nulla, quella cioè alla quale, secondo la (80), risulta:

$$-\frac{1}{6} \frac{\gamma d}{E J_x} (H^2 z^2 - H z^3 + \frac{z^4}{4}) + \frac{\gamma d H^4}{45 E J_x} = 0,$$

equivalente a quest'altra:

$$z^4 - 4 H z^3 + 4 H^2 z^2 - \frac{8}{15} H^4 = 0.$$

Si riconosce subito che tale equazione ha una sola radice z^* nell'intervallo $(0, H)$, radice che cade precisamente nell'intervallo parziale $(H/3, H/2)$; la sua determinazione potrebbe essere fatta per via grafica, al modo visto ad es. agli Esercizi 5 e 7.

Una volta noto z^* , il valore di f si determinerebbe direttamente dalla (81) per sostituzione. Lasciamo la cosa come esercitazione a chi legge.

Esercizio 42 — Progettare con sezione circolare piena l'albero di un verricello in acciaio per 1000 Kg, lungo 6 m, sapendo che i tamburi \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 di sollevamento hanno diametro rispettivamente $D_1 = 60$ cm e $D_2 = 30$ cm, e che sono posti alla comune distanza 1,5 m dagli estremi dell'albero, da riguardarsi come semplicemente appoggiati. Si assumano $k = 0,7$ t/cm², $t = 4/5$ k, $E = 2200$ t/cm², $m = 10/3$.

Nel tronco fra gli assi dei due tamburi di sollevamento l'albero è soggetto a sollecitazione composta di torsione flessione e taglio.

Il momento torcente M_t resta costante in tutte le sezioni del tronco (fig. 50 c); precisamente, detta P_2 la resistenza da vincere ed r_2 il raggio del tamburo \mathcal{P}_2 a cui essa risulta applicata (fig. 50 a), con valore:

$$M_t = P_2 r_2 = 1000 \times 15 = 15000 \text{ Kgcm} = 15 \text{ tcm};$$

dovendo poi anche essere, con analoga notazione, $P_1 r_1 = P_2 r_2$, si ricava per la potenza P_1 da applicare nel sol-

levamento all'altro tamburo, il valore:

$$P_1 = \frac{P_2 r_2}{r_1} = \frac{15000}{30} = 500 \text{ Kg} = 0,5 \text{ t} .$$

Per giudicare delle altre due caratteristiche, il taglio e il momento flettente, se ne costruiscano i rispettivi diagrammi; schematizzando l'albero come una trave semplicemente appoggiata, inflessa dai due carichi P_1 e P_2 (fig. 50 b), le reazioni dei vincoli, ambedue verticali, valgono:

$$A = \frac{\sum P_i b_i}{l} = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2}{l} = \frac{0,5 \times 4,5 + 1 \times 1,5}{6} = 0,625 \text{ t}$$

$$B = \frac{\sum P_i a_i}{l} = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2}{l} = \frac{0,5 \times 1,5 + 1 \times 4,5}{6} = 0,875 \text{ t} .$$

Dal diagramma del taglio che consegue a questi valori (fig. 50 d), risulta che il massimo taglio è sopportato dalle sezioni nel tronco fra il carico P_2 e l'appoggio B e vale $T_{\max} = -0,875 \text{ t}$; nella sezione immediatamente a sinistra di detto carico è invece: $T = 1 - 0,875 = +0,135 \text{ t}$.

Dal diagramma dei momenti flettenti (fig. 50 e) si deduce poi che il massimo momento agisce nella sezione sotto lo stesso carico P_2 e vale:

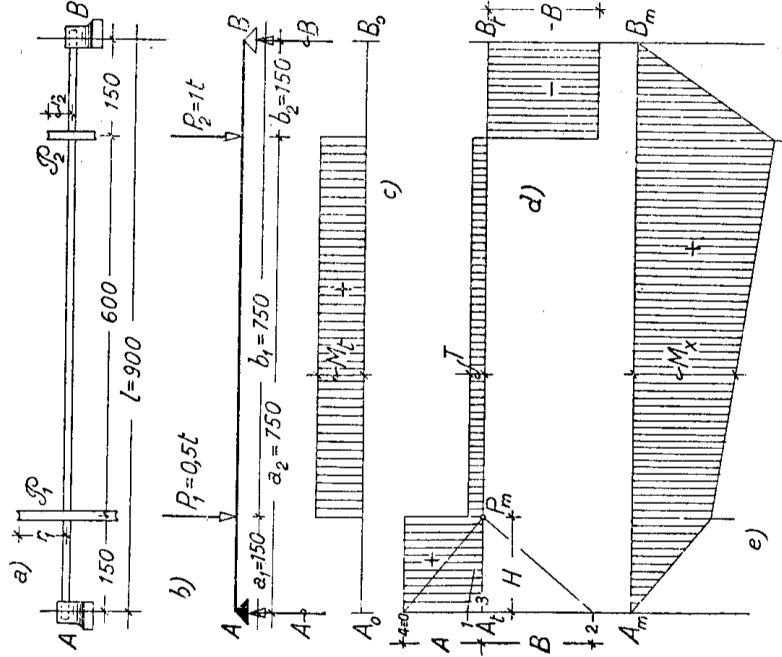


Fig. 50

$$M_{\max} = B b_2 = 0,875 \times 150 = 131,25 \text{ tcm} .$$

Si conclude che nel tronco centrale la sezione mag-

giormente cimentata è quella immediatamente a sinistra del carico P_2 , nella quale si verifica la presenza contemporanea delle tre caratteristiche:

$$M_t = 15 \text{ tcm} ; \quad T_y = 0,125 \text{ t} ; \quad M_x = 131,25 \text{ tcm} ;$$

dei due tronchi di riva fra i carichi e gli appoggi, il più gravato è quello di destra e la sua sezione più cimentata è quella adiacente al carico P_2 , sezione che sopporta il massimo momento flettente e insieme il massimo taglio, pari rispettivamente a:

$$M_x = + 131,25 \text{ tcm} ; \quad T_y = - 0,875 \text{ t} .$$

Per determinare le dimensioni dell'albero, si tratta di riconoscere quale delle due sezioni suddette è quella pericolosa, quale cioè, con lo stesso grado di stabilità, impone per il diametro dell'albero un minimo maggiore.

Quanto alla terna delle caratteristiche nella sezione a sinistra di P_2 esse sono proprio le stesse che assegnammo esplicitamente all'Esercizio 38 per il dimensionamento di una sezione circolare soggetta a flessione torsione e taglio; riconoscemmo allora che a decidere delle sue dimensioni era la flessione-torsione e precisamente che era necessario un raggio $r = 6,2 \text{ cm}$, valore che verificava ampiamente la stabilità a taglio torsione nei punti del contorno sull'asse neutro (somma aritmetica delle tensioni tangenziali massime dovute al taglio e al momento torcente pari ad appena $\sim 5,3 \text{ Kg/cm}^2$, contro i 560 Kg/cm^2 che avrebbero potuto essere raggiunti col grado di stabilità fissato).

A meno che la sezione a destra di P_2 , per la presenza del taglio $T_y = -0,875 \text{ t}$, non richieda un raggio maggiore di $6,2 \text{ cm}$, questo valore è allora anche da assumere come dimensione minima per l'albero del verricello.

Ciò è appunto quanto si verifica, giacchè la massima tensione che il detto valore di T_y desta nella sezione di raggio $6,2 \text{ cm}$ vale appena, in base alla (53'):

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{875}{\pi \times 6,2^2} = \frac{3500}{3 \times 3,14 \times 38,44} = \frac{3500}{362,1} \cong 9,7 \text{ Kg/cm}^2 .$$

Esercizio 43 — Una trave semplice di luce $l = 5\text{ m}$, costituita di un NP I 300 rinforzato superiormente e simmetricamente alla mezzeria per i $2/3$ della luce da una piattabanda a filo con l'ala e di spessore $\lambda = 4\text{ mm}$, è gravata da un carico ripartito con la seguente legge parabolica:

$$P_x = \left(-\frac{1}{3} z^2 + 3 z\right) t/m.$$

Se ne costruisca la linea elastica col metodo Saviotti.

È noto come col metodo Saviotti si arrivi dal diagramma di carico alla linea elastica (o ad una curva ad essa affine) mediante quattro integrazioni successive. È immediato del resto rendercene conto, ricordando le relazioni che legano il carico al taglio, al momento flettente, alla linea elastica:

$$\frac{dT_x}{dz} = -P_x, \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = -P_x, \quad EJ \frac{d^4 \eta}{dz^4} = P_x;$$

queste dicono appunto come, attraverso integrazione successiva, si passi dal diagramma di carico a quello del taglio; da questo a quello del momento flettente; da questo (o da uno ad esso affine) a quello delle inclinazioni, e infine da questo alla linea elastica.

Con polo P_i e distanza polare λ_i , si è costruita perciò (fig. 51 b) una linea integrale $A' C_i B'$ del carico, linea che, rispetto a una opportuna fondamentale, limiterà dunque il diagramma del taglio. Quanto alla fondamentale, essa resta determinata ad es. imponendo che nella sezione adiacente all'appoggio A il taglio valga la reazione omonima, cioè, come risulta prendendo i momenti intorno a B e di seguito in base ai dati numerici:

$$A = \frac{\int_0^l P_x (l-z) dz}{l} = -\frac{l}{36} P^2 + \frac{1}{2} l P \cong 9,3 t.$$

Avendo adottate nel grafico originario per il disegno e per le intensità di carico rispettivamente le scale $1\text{ cm} = 0,4\text{ m} = 2\text{ t/m}$, e assunto $\lambda_i = 6\text{ cm}$, le reazioni, e così le ordinate del diagramma del taglio,

vanno lette o riportate nella scala:

$$1 \text{ cm} = 6 \times 0,4 \times 2 = 4,8 \text{ t} .$$

Riportato quindi sulla verticale del vincolo da A'_t il segmento $\overline{A'_t A_t} = 9,03/4,8 \cong 1,88 \text{ cm}$, l'orizzontale $A_t B_t$ risulta la fondamentale del taglio; vale a dire la ordinata y_t sotto la sezione all'ascissa z misura nella detta scala il taglio T_x in questa sezione.

Con polo P_m scelto sulla $A_t B_t$, a distanza polare H (nel disegno originario era $H = 3 \text{ cm}$) si è ottenuta una seconda linea integrale $A_m C_m B_m$: questa linea, riferita alla congiungente $A_m B_m$ (necessariamente orizzontale stante la posizione di P_m) in quanto sono nulli i momenti sugli appoggi, definisce il diagramma del momento flettente; l'ordinata y_m sotto la sezione all'ascissa z misura cioè, in base H , il momento flettente in questa sezione:

$$M_x = H y_m ;$$

ivi, se si vuole, y_m può essere letta nella scala della lunghezza ($1 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$) H in quella delle forze ($1 \text{ cm} = 4,8 \text{ t}$) o viceversa.

Una nuova integrazione dovrebbe ora portare al diagramma delle inclinazioni; senonchè, integrando direttamente il diagramma del momento, si trascura il fatto che la trave è a sezione e quindi a momento di inerzia

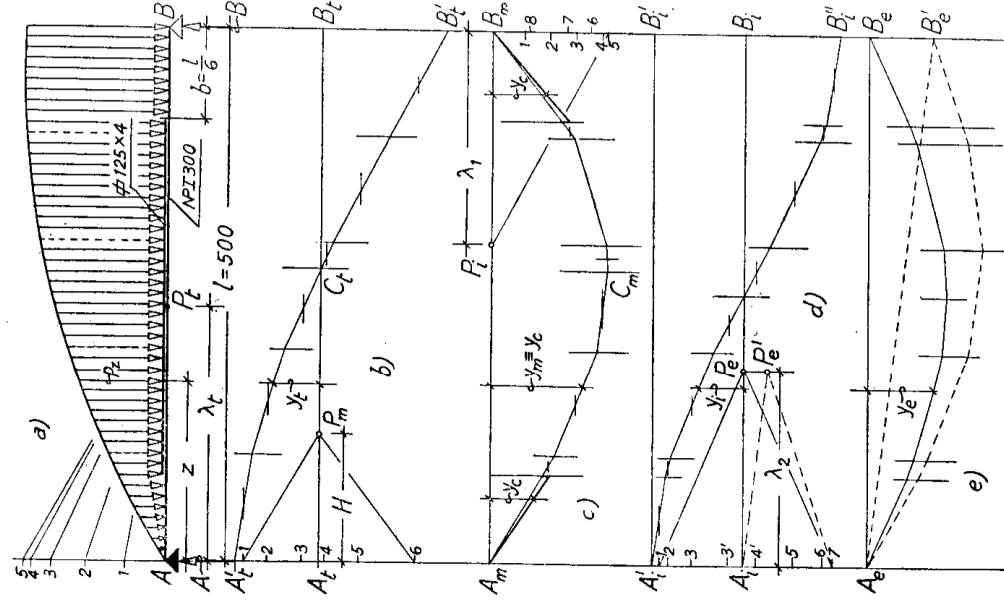


Fig. 51

variabile, per la presenza del piatto di rinforzo superiore; si tiene conto di ciò passando al diagramma delle curvature, a un diagramma cioè affine a quello del momento flettente secondo il rapporto variabile:

$$(82) \quad \vartheta = \frac{J}{J_0},$$

e quindi di ordinate:

$$y_c = \frac{y_m}{\vartheta},$$

se con J_0 si indica un momento di inerzia prefissato arbitrariamente e con J quello corrente nella trave; noi fisseremo per J_0 il momento di inerzia della sezione rinforzata.

Giacchè il baricentro G di tale sezione (fig. 52) si innalza, come da facile calcolo, su quello del profilato di $y_G = 10,26$ mm, e d'altronde per il NPI 300 (cfr. il Manuale) è $J_\varphi = 9800$ cm⁴, ne risulta per J_0 il valore:

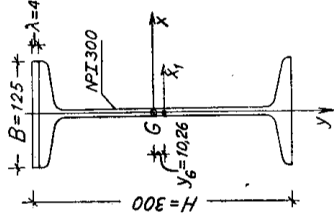


Fig. 52

$$J_0 = J_\varphi + 69,1 \times \overline{1,026^2} + \frac{1}{12} \times 12,5 \times \overline{0,4^3} + 12,5 \times 0,4 \times \overline{14,174^2} = 10074 \text{ cm}^4.$$

Il rapporto di affinità ϑ vale così l'unità nel tronco rinforzato, cioè il diagramma delle curvature coincide in tale tronco con quello del momento flettente; nei tratti di riva non rinforzati vale invece:

$$\vartheta = \frac{J_\varphi}{J_0} = \frac{9800}{10074} \cong 0,973,$$

e perciò le y_c corrispondenti valgono:

$$y_c = 1,028 y_m.$$

La fig. 51c) mostra, sovrapposto in parte al diagramma del momento, il diagramma delle curvature.

Con polo P_i e distanza polare λ_i (nel disegno origi-

nario $\lambda_1 = 5$ cm) se ne è costruita la linea integrale $A_i B''_i$; a fissare la relativa fondamentale basterebbe ora conoscere l'inclinazione della linea elastica in un punto qualunque; ciò può farsi però anche mancando di un tale elemento, e precisamente, come subito vedremo, dopo avere eseguita la integrazione successiva.

Tale integrazione dovrà portare a una linea affine alla linea elastica, secondo un rapporto ξ di affinità in cui se ne desiderino apprezzare le ordinate. Detta λ_2 la base di integrazione che in conseguenza dovremo adottare, è noto che essa è legata al rapporto ξ dalla relazione:

$$(83) \quad \xi = \frac{E J_0}{H \lambda_1 \lambda_2},$$

nella quale, se si legge H nella scala delle forze, λ_1 e λ_2 vanno lette in quella delle lunghezze.

Le ordinate y_e della linea affine e le corrispondenti η al vero della linea elastica sono dunque così legate:

$$y_e = \frac{\xi}{n} \eta,$$

se $1/n$ è la scala del disegno; questa relazione ci dice che se vogliamo leggere nelle y_e le η al vero, basta fare $\xi = n$; se ve le vogliamo leggere i volte al vero, occorre fare invece $\xi = in$.

Volendo per una comoda lettura, ad es. (com'è nel disegno originario) $i = 40$, basta fissare per λ_2 il valore:

$$\lambda_2 = \frac{E J_0}{40 \times n H \lambda_1},$$

cioè, sostituendo nelle debite scale e assumendo $E = 2100$ t/cm²:

$$\lambda_2 = \frac{2100 \times 10074}{40 \times 40 \times (3 \times 4,8) \times (5 \times 40)} = \frac{211554 \times 10^2}{46080 \times 10^2} \cong 4,59 \text{ cm}.$$

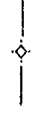
Con questa distanza polare e polo P'_e , si è allora costruita la linea integrale $A_e B'_e$ del diagramma che la

$A_i B''_i$ definisce con l'orizzontale $A_i B'_i$ scelta per ora arbitrariamente come fondamentale; se gli appoggi, come si suppone, sono rigidi, la linea così ottenuta va riferita alla congiungente $A_e B'_e$; ne segue che la sua tangente parallela ad $A_e B'_e$ individua il punto di ordinata massima (freccia) e, quindi, di inclinazione nulla; questa condizione fissa allora, come avevamo sopra avvertito, la fondamentale incognita del diagramma delle inclinazioni.

Praticamente questa fondamentale si determina guidando da P'_e la parallela ad $A_e B'_e$, fino ad incontrare la verticale del vincolo in A_i ; chè allora l'orizzontale $A_i B_i$ è appunto la fondamentale in parola.

Rialzato verticalmente su di essa in P_e il polo P'_e e ripetuta l'integrazione del nuovo diagramma così ottenuto, la relativa linea integrale $A_e B_e$ risulta ora riferita a una fondamentale orizzontale; a meno del rapporto ξ , tale linea è dunque la linea elastica della trave.

Esercizio 45 — Una trave AB ad asse orizzontale di luce $l = 3,5 m$ costituita da un NP I 500, è soggetta a un carico uniforme $p = 1,5 t/m$ e a un carico verticale $P = 5 t$ all'ascissa $a = 2,5 m$ contata da A . Verificarne la stabilità assumendo $k = 1 t/cm^2$, nell'ipotesi che sia incastrata imperfettamente agli estremi, per tal modo che le sezioni d'incastramento subiscano rispettivamente le rotazioni $\alpha = I'$, $\beta = 30''$ e un cedimento relativo $\eta_B = 0,5 mm$.



Se fosse caricata in modo affatto generico, giacchè l'insieme dei due incastri comporta sei condizioni di vincolo, la trave risulterebbe tre volte iperstatica; in quanto invece i carichi sono tutti verticali, sicchè tali devono risultare anche le reazioni finite, lo è due sole volte.

Come incognite iperstatiche potremmo assumere o i due momenti di incastramento M_A e M_B o ambedue i parametri della reazione di uno degli incastri; quest'ultima scelta sarebbe da preferire se la trave fosse gravata

dal solo carico ripartito; qui, per la presenza del carico concentrato, si rende invece più opportuna la prima.

Seguiremo per la risoluzione il procedimento analitico che, a meglio rendere comprensibile, trattiamo prima nelle sue linee essenziali. Poichè la legge del momento è notoriamente diversa nei due tronchi in cui il carico concentrato P spezza la trave, fissiamo per questi tronchi due distinti sistemi di riferimento $A_0(z, \eta)$, $B_0(z', \eta')$ (fig. 53 b); attraverso le equazioni differenziali delle relative linee elastiche, esprimeremo quindi la rotazione e l'abbassamento della sezione comune ai due tronchi, quella cioè sotto al carico: elementi questi che restano espressi notoriamente in funzione delle

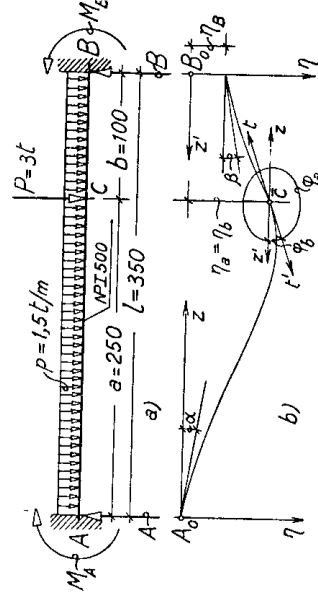


Fig. 53

quattro incognite del problema A, B, M_A ed M_B . Delle quattro equazioni occorrenti a determinare queste incognite, due nasceranno allora dalla condizione di continuità della linea elastica e dell'unicità della sua tangente sotto al carico P ; le altre due saranno le ordinarie equazioni di equilibrio della statica del corpo rigido.

Propriamente, le leggi del momento nei due tronchi a sinistra e a destra sono:

$$M_z = M_A + Az - \frac{pz^2}{2} ; \quad M_{z'} = M_B + Bz' - \frac{pz'^2}{2} .$$

Introdotte allora tali leggi separatamente al 2° membro dell'equazione differenziale (72), si integri nei due casi una prima volta; per i dati del problema, sostituendo al solito l'angolo alla tangente — le costanti c_1 e c'_1 di integrazione valgono rispettivamente α e β ; con tali valori per le costanti, i secondi membri dei due integrali, rispettivamente per $z = a$ e $z' = b$, forniscono allora le inclinazioni $\text{tg } \varphi_a$ e $\text{tg } \varphi_b$ alla sezione

sotto il carico P ; con riguardo alla relazione (fig. 53b):

$$\operatorname{tg} \varphi_a = \operatorname{tg} (2\pi - \varphi_b) = - \operatorname{tg} \varphi_b$$

si ottiene allora la prima equazione di elasticità fra le incognite del problema.

Si integri dopo ciò, sempre separatamente pei due tronchi, una seconda volta, tenendo conto che delle due costanti d'integrazione, in quanto deve essere $\eta = 0$ per $z = 0$ e $\eta = \eta_B$ per $z' = 0$, quella relativa al tronco a sinistra è nulla, quella relativa al tronco a destra vale invece η_B ; per $z = a$ e rispettivamente per $z = b$, i due integrali forniscono allora le inflessioni η_a e η_b dell'estremo comune dei due tronchi; la condizione che sia, come dev'essere, $\eta_a = \eta_b$, porta allora alla seconda equazione di elasticità.

Le altre due equazioni occorrenti si otterranno invece, come detto sopra, imponendo alle forze in gioco l'equilibrio alla traslazione verticale e alla rotazione, per es. intorno al punto d'incastro B.

Scritte seguendo passo passo il procedimento ora descritto, e ordinate nelle incognite A, B, M_A, M_B , è facile riconoscere che le quattro equazioni in parola costituiscono il seguente sistema non omogeneo:

$$(84) \left\{ \begin{array}{l} 3a^2 A + 3b^2 B + 6a M_A + 6b M_B - p(a^3 + b^3) - 6EJ(\alpha + \beta) = 0 \\ 4a^3 A - 4b^3 B + 12a^2 M_A - 12b^2 M_B - p(a^4 - b^4) - 24EJ(\alpha\alpha - \\ \quad - b\beta - \eta_B) = 0 \\ A + B - pl - P = 0 \\ 2lA + 2M_A - 2M_B - pl^2 - 2Pb = 0. \end{array} \right.$$

Ci limitiamo qui a riportarne le soluzioni, le quali costituiscono la base generale per la risoluzione di qualunque tipo di trave iperstatica ad una luce, nel senso che per ogni tipo siffatto le soluzioni rientra-

no in queste sotto forma particolare:

$$(85) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{P(3a + b)b^2}{l^3} + \frac{pl}{2} + \frac{6EJ}{l^2} \left(\beta - \alpha + 2 \frac{\eta_B}{l} \right) \\ B &= \frac{P(3b + a)a^2}{l^3} + \frac{pl}{2} - \frac{6EJ}{l^2} \left(\beta - \alpha + 2 \frac{\eta_B}{l} \right) \\ M_A &= - \frac{Pab^2}{l^2} - \frac{pl^2}{12} + \frac{2EJ}{l} \left(2\alpha - \beta - 3 \frac{\eta_B}{l} \right) \\ M_B &= - \frac{Pba^2}{l^2} - \frac{pl^2}{12} - \frac{2EJ}{l} \left(\alpha - 2\beta - 3 \frac{\eta_B}{l} \right) \end{aligned} \right.$$

Anche senza volerli fermare a un'analisi deflaggiata di queste soluzioni, sono di per sè evidenti le seguenti considerazioni: in esse sono formalmente separati i contributi del carico concentrato, del carico ripartito e delle imperfezioni dei vincoli; quanto a questi ultimi dicono poi che, se essi sono perfetti, le incognite sono indipendenti dalla flessorigidezza EJ della trave; che infine, conservando tuttavia questa ipotesi, i primi termini danno il valore delle incognite per il caso del solo carico concentrato, i secondi per quello del solo carico ripartito.

Per bene renderci conto di come le soluzioni restino modificate dalle imperfezioni dei vincoli, ne eseguiremo in un primo tempo il calcolo prescindendo da tali imperfezioni, ciò che equivale a trascurare ai secondi membri delle (85) i terzi termini; terremo poi conto in un secondo tempo, separatamente, anche di questa causa; le soluzioni effettive si otterranno infine sommando algebricamente i vari contributi. Si avverte che è questa la strada che si segue di solito per lo studio dei sistemi in condizioni imperfette di vincoli.

Indicati con un soprassegno \bar{A} , \bar{B} , \bar{M}_A , \bar{M}_B i contributi dovuti esclusivamente ai carichi, con riguardo ai dati si ottengono per essi i valori:

$$\bar{A} = 5 \times \frac{(3 \times 250 + 100) \times \overline{100}^2}{350^3} + \frac{0,015 \times 350}{2} = + 3,616 \text{ t ;}$$

$$\bar{B} = + 5 \times \frac{(3 \times 100 + 250) \times 250^2}{350^3} + \frac{0,015 \times 350}{2} = + 6,634 \text{ t} ;$$

$$\bar{M}_A = - 5 \times \frac{250 \times 100^2}{350^2} - \frac{0,015 \times 350^2}{12} = - 255,165 \text{ tcm} ;$$

$$\bar{M}_B = - 5 \times \frac{625 \times 10^4}{350^2} - \frac{0,015 \times 350^2}{12} = - 408,227 \text{ tcm} ;$$

le reazioni finite sono dunque entrambi positive, cioè dirette verso l'alto, i momenti di incastro entrambi negativi.

Notando con doppio soprassegno i valori delle stesse incognite dovuti alle sole imperfezioni dei vincoli, giacchè, in radianti, $\alpha = l' = 0,000291 \text{ Rad}$, $\beta = 30'' = 0,0001455 \text{ Rad}$, risulta invece:

$$\bar{\bar{A}} = - \bar{\bar{B}} = \frac{6 \times 6874 \times 2100}{350^2} \left(0,0001455 - 0,000291 + 2 \frac{0,05}{350} \right) \cong + 0,89 \text{ t} ;$$

$$\bar{\bar{M}}_A = \frac{2 \times 2100 \times 28740}{350} \left(2 \times 0,000291 - 0,0001455 - 3 \frac{0,05}{350} \right) \cong + 6,68 \text{ tcm} ;$$

e infine, come anche si può scrivere:

$$\bar{\bar{M}}_B = \bar{\bar{M}}_A + \bar{\bar{A}} l = + 6,68 + 0,99 \times 350 = + 353,18 \text{ tcm} .$$

Sommando ora algebricamente i risultati parziali, le reazioni e i momenti di incastro effettivi valgono in definitiva:

$$A = \bar{A} + \bar{\bar{A}} = + 3,116 + 0,99 \cong + 4,606 \text{ t}$$

$$B = \bar{B} + \bar{\bar{B}} = + 6,634 - 0,99 \cong + 5,644 \text{ t}$$

$$M_A = \bar{M}_A + \bar{\bar{M}}_A = - 255,165 + 6,68 \cong - 248,485 \text{ tcm}$$

$$M_B = \bar{M}_B + \bar{\bar{M}}_B = - 408,227 + 353,18 \cong - 55,047 \text{ tcm} .$$

Calcolate così le incognite, sono ora subito note anche le caratteristiche della sollecitazione, taglio

e momento flettente, nella sezione generica della trave; anche senza tracciare i relativi diagrammi, è immediato riconoscere che la sezione maggiormente cimentata a flessione, per la quale eseguiamo quindi il calcolo di verifica richiesto, è quella sotto il carico concentrato, in cui il momento, con riferimento ad es. alle forze alla sinistra, vale:

$$\begin{aligned} M_{\max} &= M_A + Aa - \frac{p a^2}{2} = - 248,485 + 4,606 \times 250 - \frac{0,015 \times 230^2}{2} = \\ &= - 248,485 + 1151,5 - 468,75 = + 434,265 \text{ tcm.} \end{aligned}$$

Tale momento genera, in corrispondenza dei bordi della sezione del NPI 500 —di cui è $W_x = 2746 \text{ cm}^3$ il modulo di resistenza— la tensione massima:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{434,265}{2746} = 0,158 \text{ t/cm}^2,$$

notevolmente inferiore al limite k per essa ammissibile.

Esercizio 46 — La trave semplice AB con le dimensioni e la luce di quella dell'Esercizio precedente è gravata per tutta la lunghezza da un carico uniforme $p = 0,2 \text{ t/m}$ e in mezzeria da un carico concentrato $P = 3 \text{ t}$; verificarne la stabilità per $k = 1 \text{ t/cm}^2$ e determinarne le rotazioni estreme e la freccia.



Questo caso può farsi rientrare, volendo, come particolare in quello trattato all'Esercizio precedente, bastando evidentemente farvi (fig. 54) $M_A = M_B = 0$ e inoltre $\eta_B = 0$.

Nelle quattro equazioni a cui si riducono in tal modo le (84) possiamo ora, di più, riguardare le rotazioni α e β agli estremi, che allora erano quantità assegnate, come incognite, e determinarle quindi insieme alle reazioni A e B .

Posto di più nelle citate (84) $a = b = l/2$, con facilità riduzioni esse prendono la forma:

$$(84') \quad \left\{ \begin{array}{l} 3P^2 A + 3P^2 B - 24 EJ\alpha - 24 EJ\beta - p^2 = 0 \\ P^2 A - P^2 B - 24 EJ\alpha + 24 EJ\beta = 0 \\ A + B - pl - P = 0 \\ 2A - pl - P = 0. \end{array} \right.$$

Dalle due ultime si ricava, com'era d'altronde ovvio per simmetria:

$$A = B = \frac{pl + P}{2}.$$

Sostituendo nelle prime due, si trova, com'era anche prevedibile:

$$\alpha = \beta,$$

e precisamente:

$$(86) \quad \alpha = \frac{1}{16} \frac{P^2}{EJ} + \frac{1}{24} \frac{p^2}{EJ}.$$

Coi dati numerici:

$$A = B = \frac{0,2 \times 3,5 + 3}{2} = 1,85 t$$

$$\alpha = \frac{350^2 (3 \times 3 + 2 \times 0,002 \times 350)}{48 \times 2100 \times 68740} \cong 0,000184 \text{ Rad} = 37'',95.$$

Tutto quanto precede può determinarsi però agevolmente anche in modo diretto; sono intanto immediate, come già riconosciuto per simmetria, le espressioni date di sopra per A e B.

Dall'equazione differenziale della linea elastica, ad es. per la semitrave a sinistra:

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{1}{EJ} \left(Az - \frac{p z^2}{2} \right) = - \frac{1}{EJ} \left(\frac{pl + P}{2} z - \frac{p z^2}{2} \right),$$

integrando una prima volta si ha allora:

$$\frac{d\eta}{dz} = - \frac{1}{EJ} \left(\frac{pl + P}{4} z^2 - \frac{p z^3}{6} \right) + c_1,$$

nella quale la costante di integrazione c_1 —che ha il significato di inclinazione della linea elastica all'origine— resta determinata dalla condizione ovvia che la linea elastica risulti simmetrica rispetto alla mezzeria della trave, e quindi con inclinazione nulla alla mezzeria stessa; in formula:

$$\left(\frac{d\eta}{dz}\right)_{z=\frac{l}{2}} = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{pl + P}{16} l^2 - \frac{pl^3}{48} \right) + c_1 = 0;$$

da cui segue immediatamente la (86).

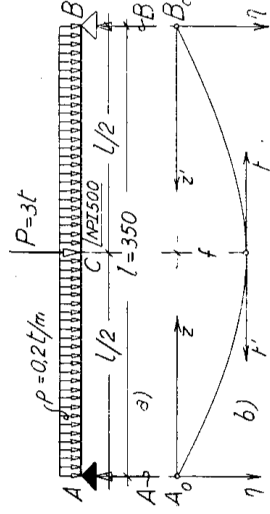


Fig. 54

Per questa via si deduce poi, anche più direttamente che non per la via seguita di sopra, la freccia f richiesta. Integrando infatti una seconda volta, con riguardo al valore di c_1 e al fatto che, per la rigidità degli appoggi, la nuova costante di integrazione è nulla, si ha:

$$\eta = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{pl + P}{12} z^3 - \frac{p z^4}{24} \right) + \frac{l^2 (3P + 2pl)}{48 EJ} z,$$

la quale fornisce f ponendovi $z = l/2$:

$$\begin{aligned} f \equiv (\eta)_{z=\frac{l}{2}} &= -\frac{1}{EJ} \left[\frac{pl + P}{12} \frac{l^3}{8} - \frac{p}{24} \frac{l^4}{16} \right] + \frac{l^2 (3P + pl)}{96 EJ} l = \\ &= \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ} + \frac{5}{584} \frac{pl^4}{EJ}. \end{aligned}$$

Si noti in questa formula, e così in quella scritta di sopra per la rotazione α , la separazione formale dei due contributi del carico concentrato e del carico ripartito: α ed f prendono quindi rispettivamente la forma dei primi o dei secondi termini a secondo membro, quando la trave sia gravata dal solo carico concentrato P o dal solo carico ripartito p .

Sostituendo nell'espressione di f i dati numerici se ne deduce il valore:

$$f = \frac{3 \times 350^3}{48 \times 2100 \times 68740} + \frac{5 \times 0,002 \times 350^4}{384 \times 2100 \times 68740} \cong 0,021 \text{ cm} .$$

Per la verifica della trave è infine manifesto che il momento flettente massimo è quello in mezzeria, dove vale:

$$M_{\max} = \frac{Al}{2} - \frac{pl^2}{8} = \frac{1}{2} Pl + \frac{3}{8} pl^2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{3 \times 0,002 \times 350}{8} \right) 350 = 516 \text{ tcm} .$$

Tale momento, essendo $W_g = 2746 \text{ cm}^3$, desta nella sezione la tensione massima:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_g} = \frac{516}{2746} = 0,188 \text{ t/cm}^2 ,$$

che sta largamente nei limiti di sicurezza fissati.

Esercizio 47 — Una trave semplice di luce $l = 6 \text{ m}$, costituita di un NP I 280 rinforzato su ciascun corrente e simmetricamente alla mezzeria per la metà della luce da una piattabanda delle dimensioni:

$$\lambda = 15 \text{ cm} ; \quad \delta = 1,5 \text{ cm} ,$$

è gravata da un carico verticale $P = 6 \text{ t}$ all'ascissa $z = 2 \text{ l}/3 = 4 \text{ m}$. Se ne costruisca la linea elastica col metodo di Mohr, nell'ipotesi che gli appoggi siano rigidi.

Il metodo di Mohr differisce da quello di Saviotti per il fatto che, in luogo delle quattro integrazioni successive di cui questo si vale per arrivare dal diagramma di carico alla linea elastica — o a una linea ad essa affine — si serve di due funicolari: quella del diagramma di carico, che costituisce notoriamente il diagramma dei momenti flettenti, e quella relativa a questo diagramma — o a quello delle curvature se la trave è di sezione variabile — riguardato anch'esso come un diagramma di carico.

Ciò è possibile in virtù della coincidenza formale

fra l'equazione differenziale della linea elastica e quella della funicolare di un carico ripartito p :

$$\frac{d^2 \eta}{d z^2} = - \frac{M}{EJ} ; \quad \frac{d^2 \eta}{d z^2} = - \frac{p}{H} ,$$

nella seconda delle quali H è la distanza polare con cui è stata costruita la funicolare.

La costruzione richiesta è allora immediata. Riportato, ad es. sulla verticale di sinistra (fig. 55), in $O_0 I_0$ il carico P e connesso con le due reazioni incognite A e B mediante un poligono funicolare -polo P'_m e distanza polare H - la bilatera $A_m C'_m B'_m$ è notoriamente il diagramma dei momenti flettenti; è conveniente, praticando il solito rialzamento del polo in P_m sull'orizzontale per il punto 2_0 di separazione delle reazioni A e B , riferire la bilatera alla fondamentale orizzontale $A_m B_m$; detta y_m l'ordinata che tale bilatera stacca all'ascissa z corrente, è dunque:

$$M_x = H y_m ,$$

e l'equazione differenziale della linea elastica della trave diviene in conseguenza:

$$- EJ \frac{d^2 \eta}{d z^2} = H y_m .$$

Per il fatto che la trave è di sezione variabile si deve passare, come ricordato di sopra, al diagramma

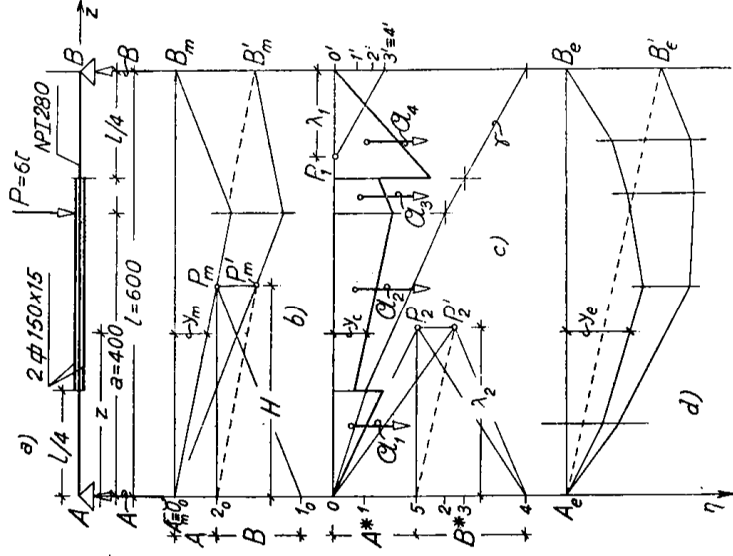


Fig. 55

delle curvature (cfr. Es. 43), al diagramma cioè di ordinate:

$$y_c = \frac{y_m}{\vartheta}, \quad \text{con:} \quad \vartheta = \frac{J}{J_0}.$$

Assumeremo anche qui, come all'Es. 43, per J_0 il momento di inerzia della sezione rinforzata (fig. 56):

$$J_0 = J_a + 2 \frac{1}{12} \lambda \delta^3 + 2 A_p d^2,$$

dove J_a , A_p e d indicano rispettivamente il momento di inerzia del NPI 280, l'area della sezione di una piattabanda e la distanza del suo baricentro da quello del I. Sostituendo i valori numerici risulta:

$$J_0 = 7575 + \frac{1}{6} 15 \times 1,5^3 + 2 \times 15 \times 1,5 \times \sqrt{14,75^2} = 17374 \text{ cm}^4.$$

Nel tronco rinforzato il rapporto ϑ vale l'unità; nei due tronchi di riva vale invece:

$$\vartheta = \frac{7575}{17374} \cong 0,436.$$

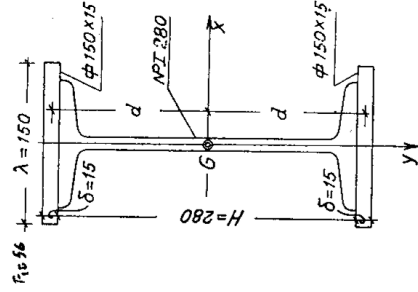


Fig. 56

Riferita a tale diagramma, l'equazione differenziale della linea elastica è ora:

$$- EJ_0 \frac{d^2 \eta}{d z^2} = H y_c.$$

Spezzato il diagramma delle curvature in striscie verticali e determinata in \tilde{O} , 1, 2, 3, 4 la punteggiatura delle forze-aree ridotte in base λ_1 [in fig. 55 c) è conservata la nota costruzione per la poligonale γ del-

Calcolate in base a questo valore le due ordinate y_c in corrispondenza delle sezioni immediatamente a sinistra e a destra del tronco rinforzato, il diagramma dei momenti resta modificato in quello delle curvature come è indicato in fig. 55 c).

le forze-aree] si sono connesse queste, pensate agire corrispondentemente nei baricentri delle singole strisce, mediante un poligono funicolare di polo P_2 e distanza polare λ_2 . Come noto, la scala in cui vanno lette le ordinate y_e che questo poligono determina col suo lato di chiusa è: $1cm = n H \lambda_1 \lambda_2$, con $1/n$ scala del disegno; ne risulta così fra le ordinate η della linea elastica in vera grandezza, e le y_e la relazione di affinità:

$$EJ_0 \eta = n H \lambda_1 \lambda_2 y_e,$$

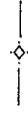
da cui:

$$y_e = \frac{1}{n} \frac{EJ_0}{H \lambda_1 \lambda_2} \eta = \frac{\xi}{n} \eta,$$

che è quella stessa riscontrata nel metodo di Saviotti.

Valgono naturalmente, da questo punto, le stesse considerazioni di allora riguardo all'opportunità di scelta per una qualunque delle distanze polari che entrano nell'espressione del rapporto ξ di affinità.

Esercizio 48 — Risolvere la trave dell'Esercizio 45 col metodo analitico-grafico.



Il metodo analitico-grafico riposa sul seguente collarario di Mohr: *le inclinazioni alle estremità di una trave a una luce in condizioni generiche di posa e di carico, sono misurate dalle reazioni A^* e B^* che genera nella trave semplice con la stessa luce il diagramma delle curvature, riguardato come diagramma di carico.*

Se poi in particolare, com'è per noi, la trave è di sezione costante, le dette inclinazioni sono anche misurate in base EJ dalle reazioni A^* e B^* che conseguono al diagramma dei momenti come diagramma di carico.

Confondendo, come di solito, le inclinazioni $\text{tg } \alpha$ e $\text{tg } \beta$ con le rotazioni α e β delle sezioni di vincolo e detto ancora η_B il cedimento relativo di tali sezioni,

il corollario si traduce simbolicamente nelle due relazioni:

$$(87) \quad \alpha = \frac{A^*}{EJ} + \frac{\eta_B}{l}; \quad \beta = \frac{B^*}{EJ} - \frac{\eta_B}{l}.$$

Per il caso in esame, il diagramma dei momenti flettenti risulta dalla sovrapposizione della superficie semplice dei momenti (fig. 57 b') e del diagramma trapezoidale dei momenti di incastro M_A e M_B (fig. 57 c'); la superficie semplice è d'altra parte costituita dall'insieme della bilatera con vertice sulla verticale del carico P e altezza $\mathcal{M}_{\max} = Pab/l$ e del segmento di parabola con freccia $p^2/8$ conseguente al carico ripartito p (fig. 57 b) e b'); il diagramma trapezoidale dei momenti di incastro può invece riguardarsi come somma dei due diagrammi triangolari di base l ed altezze M_A e M_B rispettivamente (fig. 57 c') e c''').

Dette A^*, A^{**}, A^{***} nella trave semplice le reazioni dell'appoggio A per le suddette tre condizioni fittizie di carico pensate agire separatamente, sarà:

$$(88) \quad A^* = A' + A^{**} + A^{***};$$

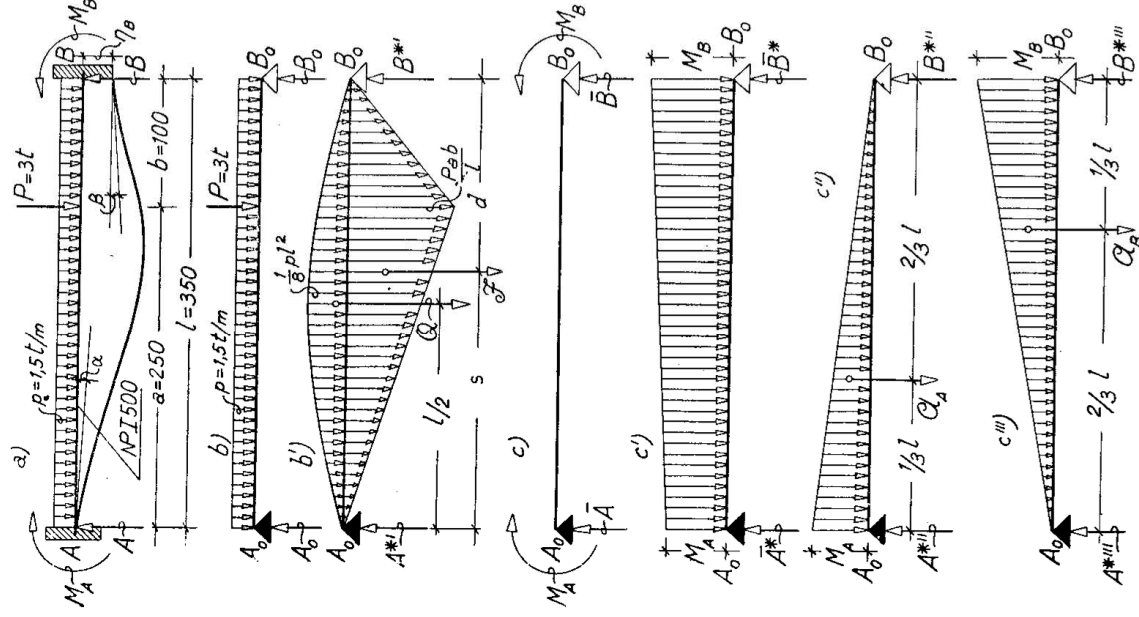


Fig. 57

per le suddette tre condizioni fittizie di carico pensate agire separatamente, sarà:

in modo analogo per l'appoggio B:

$$(88') \quad B^* = B^{*''} + B^{*''''} .$$

Per A^* , indicando con:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \frac{Pab}{l} l = \frac{Pab}{2} \quad \text{e:} \quad Q = \int_0^l M_z^{(p)} dz = \frac{1}{2} pl \frac{l^2}{2} - \frac{p}{2} \frac{l^3}{3} = \frac{1}{12} pl^3 ,$$

le aree che racchiudono con la fondamentale comune rispettivamente la bilatera e l'arco parabolico, risulta subito in modo agevole:

$$A^{*'} = \frac{\mathcal{F} d}{l} + \frac{Q}{l} \frac{l}{2} = \frac{Pab}{2l} \left[\frac{l}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2} - b \right) \right] + \frac{Q}{2} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l} + \frac{pl^3}{24} .$$

Per $A^{*''}$ e $A^{*''''}$ è poi in modo anche più rapido:

$$A^{*''} = \frac{1}{l} \mathcal{O}_A \frac{2}{3} l = \frac{1}{3} l M_A ; \quad A^{*''''} = \frac{1}{l} \mathcal{O}_B \frac{1}{3} l = \frac{1}{6} l M_B .$$

Sostituendo nella (88) si ha allora in definitiva:

$$A^* = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l} + \frac{1}{24} pl^3 + \frac{1}{3} l M_A + \frac{1}{6} l M_B .$$

In modo analogo troveremo:

$$B^* = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6l} + \frac{1}{24} pl^3 + \frac{1}{6} l M_A + \frac{1}{3} l M_B .$$

In base alle (87) è allora:

$$\alpha = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6lEJ} + \frac{pl^3}{24EJ} + \frac{l}{6EJ} (2M_A + M_B) + \frac{\eta_B}{l} ,$$

$$\beta = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6lEJ} + \frac{pl^3}{24EJ} + \frac{l}{6EJ} (M_A + 2M_B) - \frac{\eta_B}{l} .$$

Sottraendo una volta dalla seconda la prima moltiplicata per 2, una volta dalla prima la seconda pure

moltiplicata per 2, si perviene con facili operazioni alle due seguenti espressioni per i momenti d'incastro:

$$M_A = - \frac{P a b^2}{l^2} - \frac{1}{12} P l^2 + \frac{2 E J}{l} \left(2 \alpha - \beta - \frac{3 \gamma_B}{l} \right)$$

$$M_B = - \frac{P b a^2}{l^2} - \frac{1}{12} P l^2 - \frac{2 E J}{l} \left(\alpha - 2 \beta - \frac{3 \gamma_B}{l} \right),$$

le quali sono quelle stesse trovate per via analitica all'Es. 45; a questo Esercizio rimandiamo pertanto per ciò che riguarda i risultati numerici.

Una volta noti M_A ed M_B , mediante le due equazioni della Statica si ricavano anche le reazioni A e B .

Si avverta anche qui, come già rilevammo nella trattazione analitica, come da questo caso generale scendano facilmente, per la stessa strada, le soluzioni relative a ogni altro caso di trave a una luce in condizioni di posa più semplici; negli Esercizi che seguono vengono trattati alcuni di questi casi particolari.

Esercizio 49 — Una trave prismatica di luce $l = 6$ m, incastrata a un estremo e poggiata all'altro, è gravata da un carico flettente $P = 7 t$ all'ascissa:

$$a = \frac{2}{3} l = 4 \text{ m} .$$

Nell'ipotesi che i vincoli siano perfetti, costruire i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione e determinare il minimo NP I atto a formare la trave per $k = 1,4 t/cm^2$ e soddisfacente insieme alla condizione che l'abbassamento sotto il carico non superi $l/500$.

—♦—

La trave presenta una sola incognita iperstatica; volendo seguire il metodo analitico-grafico è da scegliere come tale il momento di incastro M_A .

La rotazione α della sezione A incastrata, si deduce ora semplicemente (cfr. l'Esercizio precedente)

dalla espressione (88) nella quale, mancando sulla trave il carico ripartito, la A^{**} ha la forma ridotta:

$$A^{**} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l},$$

la A^{**} conserva la stessa forma di allora, la A^{***} è invece nulla essendo ora $M_B = 0$.

Sostituendo nella (87) con $\eta_B = 0$, e tenendo conto che, per l'ipotesi che l'incastro sia perfetto, la rotazione α deve risultare nulla, si perviene all'equazione:

$$\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6lEJ} + \frac{1}{3EJ} M_A l = 0,$$

che determina direttamente l'unica incognita iperstatica:

$$M_A = -\frac{1}{2} \frac{Pb(l^2 - b^2)}{l^2} . \quad \left[= -\frac{3A^{**}}{l} \right]$$

Torna qui a proposito l'osservazione che facemmo all'Esercizio 45 nei confronti delle soluzioni generali per M_A ed M_B , quando dicemmo che nel caso di vincoli perfetti le incognite iperstatiche (qui il momento M_A) e con esse quindi i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione, risultavano indipendenti dalla flessorrigidezza EJ della trave; ciò significa che, in detta ipotesi, malgrado si tratti di un sistema iperstatico, anzichè verificarlo, se ne può eseguire il dimensionamento diretto alla stregua di come si farebbe per un sistema isostatico.

Nota così M_A , le reazioni finite verticali A e B sono poi fornite dalle solite equazioni di equilibrio della Statica:

$$A + B = P ; \quad Al + M_A - Pb = 0 ,$$

dalla seconda delle quali si ricava A e quindi per sostituzione dalla prima B :

$$B = P - A .$$

Coi dati numerici risulta:

$$M_A = - \frac{1}{2} \frac{7 \times 2 (36 - 4)}{36} = - 6,22 \text{ tm} ;$$

$$A = \frac{6,22 + 14}{6} = 3,37 \text{ t} ;$$

$$B = 7 - 3,37 = 3,63 \text{ t} .$$

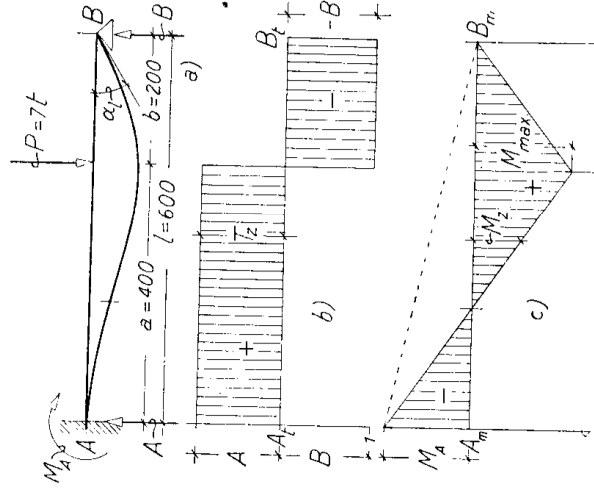


Fig. 58

È ora immediato costruire i diagrammi del taglio e del momento flettente (fig. 58 a) e b)), per il secondo dei quali basta sovrapporre al triangolo dei momenti negativi conseguente al momento d'incaastro, quello dei positivi dovuti al carico P .

I diagrammi mostrano che la la immediatamente a destra del carico, nella quale agiscono il massimo momento positivo.

$$M_{\max} = \frac{Pab}{l} - \frac{M_A b}{l} = \frac{7 \times 4 \times 2}{6} - \frac{6,22 \times 2}{6} = 7,26 \text{ tm} ,$$

che è anche il massimo in valore assoluto, e il massimo taglio $T_{\max} \equiv - B = - 3,63 \text{ t}$.

Dimensionando alla flessione:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{1,4} = \frac{726}{1,4} \cong 518,57 \text{ cm}^3 ,$$

dobbiamo adottare come il più economico il NPI 280, avente un $W_x = 541 \text{ cm}^3$.

È facile verificare che tale n° è sufficiente ad assorbire nel limite di sicurezza fissato anche il taglio T_{\max} (si verifichi la stabilità alla corda di passaggio fra ala e costola).

Per giudicare ora dell'altra condizione posta, si

può procedere in due modi diversi: o valutare l'abbassamento sotto il carico nella trave realizzata col NP I 280 così determinato e confrontarlo col limite impostogli di un cinquantesimo della luce, ovvero determinare direttamente quale numero minimo di profilato a I richiede questo limite e confrontarlo col 280. Noi seguiremo la prima via, giacchè, quando anche la verifica risultasse negativa, dall'espressione che troveremo per lo spostamento sarà anche immediato dedurre il minimo valore necessario per il momento d'inerzia J .

Ora seguendo il metodo analitico-grafico, l'abbassamento in parola è espresso notoriamente dal momento che desta nella sezione sotto il carico il diagramma effettivo dei momenti, riguardato come diagramma di carico; altrimenti, può invece esser valutato integrando due volte l'equazione differenziale della linea elastica, scritta per l'intervallo $0 \leq z \leq a$:

$$- EJ \frac{d^2 \eta}{dz^2} = M_x = M_A + Az,$$

e ponendovi poi a in luogo di z . In uno qualunque dei modi, si trova per tale abbassamento η_P l'espressione:

$$\eta_P = \frac{Pa^3 b^2}{EJ} \frac{3l + b}{12l^3},$$

la quale indica chiaramente la possibilità di porre, occorrendo, la nuova limitazione per J al modo detto di sopra.

Sostituendo invece a secondo membro i nostri dati fattivi di più $E = 2100 \text{ t/cm}^2$, risulta.

$$\eta_P = \frac{7 \times 400^3 \times 200^2}{2100 \times 7575} \frac{3 \times 600 + 200}{12 \times 600^3} = \frac{7 \times 256 \times 20}{2,1 \times 7,575 \times 12 \times 216} < 1 \text{ cm};$$

essendo per contro: $l/500 = 600/500 = 1,2 \text{ cm}$, si conclude che il NP I 280, soddisfacendo insieme alle due limitazioni imposte, può scegliersi come il più economico per formare la trave.