$$\eta_o = \frac{b_1 h_1 \left(h_r - \frac{h_1}{2}\right) + b_2 \frac{(h_r - h_1)^2}{2}}{A_r} = \frac{110 \times 26\,(90{,}4 - 13) + 30\,\frac{(90{,}4 - 26)^2}{2}}{4792} =$$

$$= 59{,}17 \text{ cm} \,,$$

risulta anche:

$$\sigma''_{\max} = \frac{150\,000}{4792}\,\frac{90{,}4}{59{,}17} = 48 \text{ Kg/cm}^2 \,,$$

che concorda col valore fornito dal grafico.

G - *FORZA NORMALE FLESSIONE E TAGLIO*

Esercizio 38 — **Determinare i diagrammi delle tensioni nella sezione rettangolare cava al piede della grue di cui all'Esercizio 32, prescindendo dall'attrito nella gola e nel perno della puleggia di rinvio del carico all'organo di sollevamento.**
Valutare quindi le tensioni principali in corrispondenza delle corde di passaggio dai rami trasversi della sezione a quelli longitudinali.

All'Esercizio 32 si è supposto che il carico $P = 20$ t pendesse direttamente all'estremo libero della grue; la sezione al piede di questa risultava allora soggetta a forza normale eccentrica.

Di fatto, per il rinvio del carico all'organo di sollevamento (fig. 44), le condizioni di carico in questa sezione sono ben diverse; nel ramo di rinvio del cavo si ha infatti una tensione T che, se si prescinde, com'è nell'ipotesi, dall'attrito nella gola e nel perno della puleggia p (fig. 45), ha lo stesso valore del carico verticale P; l'azione sul perno della puleggia e quindi anche all'estremo della grue, è pertanto costituita dalla risultante R delle tensioni nei due rami del cavo. Valutata graficamente (fig. 45 a)) questa risultante vale $R = 34{,}3$ t, ha componenti rispettivamente secondo la verticale e l'orizzontale: $N = 29{,}6$ t, $T_y = 17{,}2$ t, e incontra il piano della sezione $A - B$ di base nel punto X del suo asse y di simmetria a distanza $e^* = 570$ cm dal baricentro G.

Questi risultati possono essere facilmente controllati per via analitica; all'uopo in fig. 45 *a*) abbiamo segnata l'ordinata $H = 690$ cm del punto I di incontro dei prolungamenti dei due rami del cavo, e l'ordinata all'origine $H' = 174$ cm del ramo di rinvio, nel riferimento $G\ (y,\ z)$ nel piano medio della grue; per la determinazione del centro di pressione X e quindi della eccentricità e^*, si ricorda che la bisettrice IX dell'angolo dei due rami del cavo spezza il lato opposto LK del triangolo LIK in ragione diretta alle lunghezze dei lati dell'angolo.

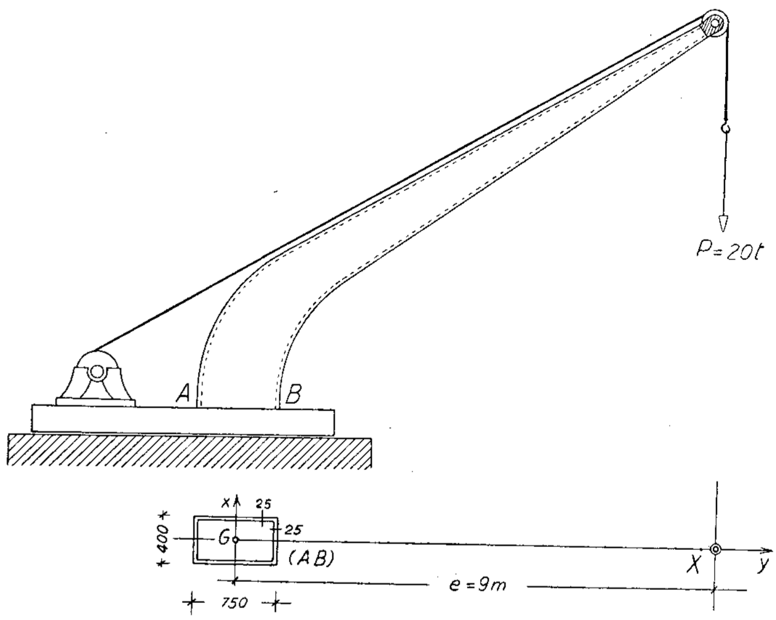

Fig. 44

Ciò posto, le caratteristiche della sollecitazione relative alla sezione di base della grue risultano:

a) la forza di taglio $T_y = 17,2$ t agente secondo l'asse y di simmetria;

b) la forza normale $N = 29,6$ t di compressione;

c) il momento flettente $M_x = Ne^* = 29,6 \times 5,7 \doteq 168,72$ tm $= 16872$ tcm, da assumersi, secondo le usuali convenzioni, come negativo; le due ultime caratteristiche insieme, equivalgono anche a una sollecitazione di forza normale eccentrica (Ess. 32 ÷ 35).

È ora facile determinare i diagrammi della tensione nella sezione $A - B$:

a) *diagramma delle tensioni tangenziali*

le tensioni tangenziali provocate da T_y possiamo valutarle in base alla teoria approssimata del taglio mediante la (53), già analizzata all'Esercizio 28:

$$\tau = \frac{T_y\, S_r}{J_x\, b_r}\ .$$

Poichè il loro diagramma è simmetrico, per tracciarlo è sufficiente calcolare i due valori della τ immediatamente prima e dopo la corda 1 di passaggio da un ramo trasverso ai rami longitudinali della sezione (figura 45 *b*)), e il valore massimo all'altezza della corda baricentrica x.

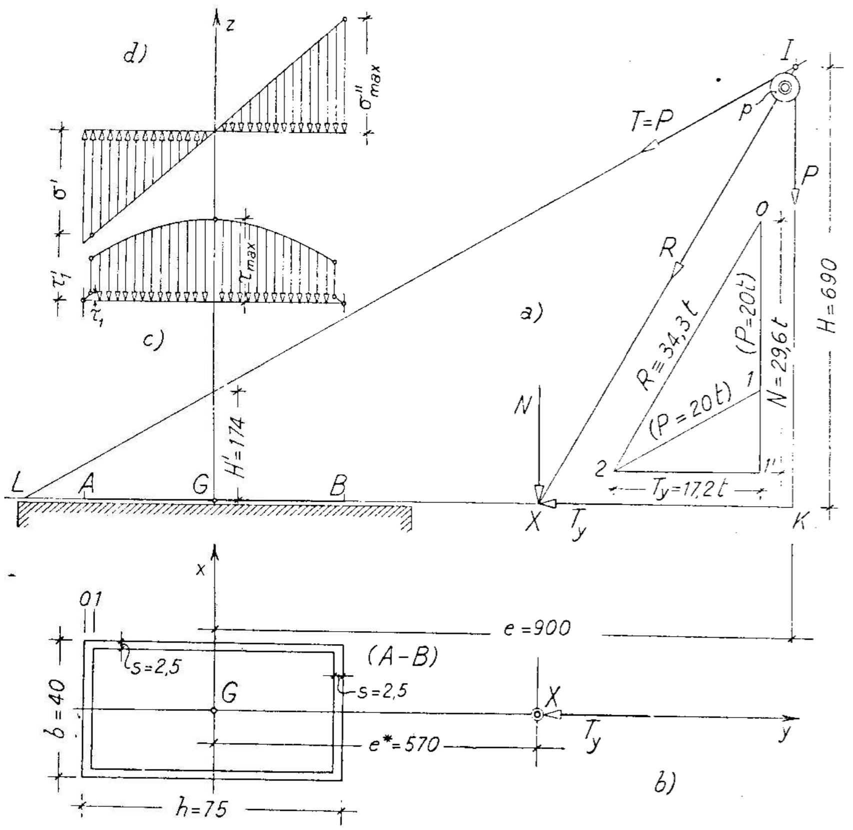

Fig. 45

In corrispondenza di tali corde è rispettivamente:

$$S_1 = b\, s \left(\frac{h-s}{2}\right) = 40 \times 2{,}5 \times 36{,}25 = 3625 \text{ cm}^3\ ,$$

$$S_{\max} = S_1 + 2\, s\, \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - s\right)^2 = 3625 + 2{,}5 \times \overline{35}^2 = 6687{,}5 \text{ cm}^3\ ;$$

e allora, poichè è (Es. 32): $J_x = 405830$ cm^4 e quindi: $T_y / J_x = \mu = 17{,}2/405830 \cong 0{,}0424 \times 10^{-3}$ t/cm^4, con le notazioni già seguite all'Esercizio 28, risulta subito:

$$\tau_1 = \mu\, \frac{S_1}{b} = \frac{0{,}0424 \times 3{,}625}{40} = \frac{0{,}1537}{40} = 0{,}0038 \text{ t/cm}^2$$

$$\tau'_1 = \mu \frac{S_1}{2s} = \frac{0{,}1537}{5} = 0{,}0307 \text{ t/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = \mu \frac{S_{\max}}{2s} = \frac{0{,}0424 \times 6{,}6875}{5} = 0{,}0567 \text{ t/cm}^2 \;;$$

la fig. 45 *c*) mostra, su questi valori, l'andamento del diagramma completo.

b) *diagramma delle tensioni normali*

può determinarsi comodamente sovrapponendo gli effetti di N ed M_x, per es. in corrispondenza delle due corde di passaggio già sopra considerate; a quella che sta dalla banda opposta di X rispetto a G, essendo (fig. 45 *b*)) $A = 40 \times 75 - 35 \times 70 = 550$ cm² l'area della sezione, risulta:

$$\sigma' = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x}\left(\frac{h}{2} - s\right) = -\frac{29{,}9}{550} + \frac{16872 \times 35}{405830} =$$
$$= -\,0{,}0538 + 1{,}45495 \cong +\,1{,}4 \text{ t/cm}^2 \;;$$

a quella nella zona compressa è invece:

$$\sigma'' = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x}\left(\frac{h}{2} - s\right) = -\,0{,}0538 - 1{,}45495 \cong -\,1{,}5 \text{ t/cm}^2 \;.$$

In fig. 45 *d*) è stato costruito su questi due valori il diagramma delle σ, usando per la rappresentazione una scala venti volte maggiore di quella usata prima per le τ.

Alle stesse due corde è ora anche immediato calcolare le tensioni principali; eseguiamo il calcolo ad es. per quella in zona compressa che è fra le due la più cimentata, in quanto soggetta alla due tensioni:

$$\tau'_1 = 0{,}0307 \text{ t/cm}^2 \;, \qquad \sigma'' = -\,1{,}5 \text{ t/cm}^2 \;.$$

In base alle (58) e a quanto riconoscemmo all'Esercizio 30, le σ_{ip} valgono:

$$\sigma_{ip} = \frac{\sigma''}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma''^2 + 4\,\tau'^2_1} = -\,0{,}75 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2{,}25 + 0{,}004} = \begin{matrix} +\,0{,}0025 \text{ t/cm}^2 \\ -\,1{,}5025 \quad » \end{matrix} \;.$$

H - *FLESSIONE TORSIONE E TAGLIO*

Esercizio 39 — **Nella sezione più cimentata di un albero circolare pieno in acciaio, agiscono le tre caratteristiche:**

$$M_t = 15\,000 \text{ Kgcm} \; ; \qquad T_y = 125 \text{ Kg} \; ; \qquad M_x = 131\,250 \text{ Kgcm} \; .$$

Determinare il raggio minimo che è atto a realizzare l'albero assumendo $k = 0{,}7\ t/cm^2$, $t = 4k/5$, $m = 10/3$.

Per giudicare del modo di sovrapporsi nella sezione delle tre caratteristiche, basta determinare i diagrammi delle tensioni che esse vi destano separatamente.

Per quanto riguarda M_t, è noto (Es. 24) che esso provoca lungo il diametro generico d (fig. 46 b) e b')) un diagramma lineare di tensioni tangenziali con valore massimo al contorno fornito dalla (51), ovvero in funzione del raggio R:

$$\tau'_{\max} = \frac{2\,M_t}{\pi\,R^3} \; ; \tag{51'}$$

quanto al taglio T_y (Es. 28), il diagramma delle tensioni tangenziali ha invece l'andamento di fig. 46 c) con massimo in corrispondenza della corda orizzontale x, massimo che, essendo $S_o = 2\,R^3/3$ il momento statico del semicerchio rispetto a detto asse, vale, ancora in funzione del raggio:

$$\tau''_{\max} = \frac{4}{3}\,\frac{T_y}{\pi\,R^2} \; . \tag{53'}$$

Il momento flettente M_x, infine, desta nella sezione tensioni normali con distribuzione regolata dalla formula di Navier, e pertanto con massimo nei punti al contorno sull'asse y pari a:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x}\,R = \frac{4\,M_x}{\pi\,R^3} \; . \tag{37'}$$

Con le notazioni di fig. 46 a), nei punti S ed L di contorno sull'asse y sono dunque in grado di massimo sia la tensione tangenziale dovuta a M_t sia quella normale dovuta ad M_x. Tali punti possono quindi eventualmente decidere delle dimensioni della sezione.

Nei punti S' ed L' ancora di contorno ma sull'asse x, neutro per la flessione, è invece nulla la tensione normale, massima tanto la tensione tangenziale dovuta al momento torcente quanto (fig. 46 *c'*)) quella dovuta al taglio; in uno di tali punti, e precisamente S' se M_t è positivo, questi due massimi si sommano di più aritmeticamente: come già S ed L, S' è dunque un altro punto che può decidere delle dimensioni della sezione.

Potremmo eseguire separatamente il calcolo di dimensionamento diretto per i due punti e adottare quindi per la sezione il maggiore dei due raggi minimi che così si verrebbero a trovare; riferirsi ai punti S e L è supporre l'albero soggetto esclusivamente a *flesso-torsione*; riferirci invece a S' è supporlo soggetto esclusivamente a *taglio-torsione*. È preferibile però, onde evitare di risolvere una inequazione di terzo grado in R quale risulterebbe limitando la somma aritmetica delle due tensioni tangenziali massime (51') e (53') al carico t di sicurezza al taglio, dimensionare per la prima delle due suddette sollecitazioni composte e verificare poi per la seconda.

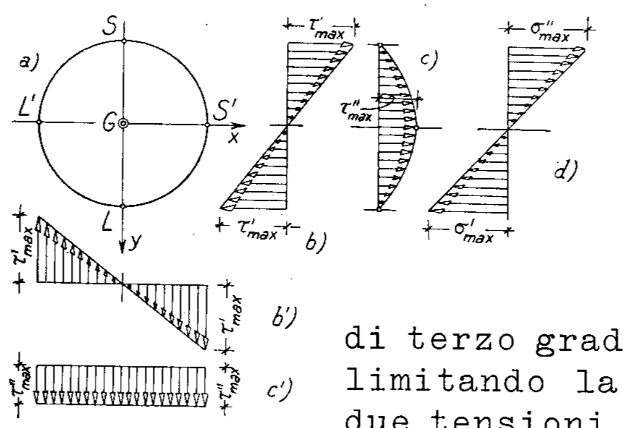

Fig. 46

Quanto alla sollecitazione composta di *flesso-torsione*, è noto che il dimensionamento o il calcolo di verifica possono condursi come per la flessione semplice, introducendo nella formula di Navier il momento *flettente ideale:*

$$(69) \qquad M_{if} = \frac{m-1}{2\,m}\,M_x + \frac{m+1}{2\,m}\sqrt{M_x^2 + M_t^2}\;,$$

capace di tener conto delle due sollecitazioni insieme; coi nostri dati questo momento vale:

$$M_{if} = 0{,}35 \times 131250 + 0{,}65\sqrt{\overline{15000}^2 + \overline{131250}^2} = 131\,800 \text{ Kgcm} .$$

Limitando la tensione massima che tale momento desterebbe nella sezione al valore ammissibile k, cioè ai sensi della (37′):

$$\sigma_{\max} = \frac{4\, M_{if}}{\pi\, R^3} \leqslant k \ ,$$

e sostituendo di seguito i dati numerici, ne risulta per R la limitazione:

$$R \geqslant \sqrt[3]{\frac{4\, M_{if}}{\pi\, k}} = \sqrt[3]{\frac{4 \times 131800}{700\ \pi}} = 6{,}2 \text{ cm} \ .$$

Assegnato ad R questo valore minimo, la somma delle due tensioni tangenziali (51′) e (53′) nel punto S' prende il valore:

$$\tau_t = \tau'_{\max} + \tau''_{\max} = \frac{2\, M_t}{\pi\, R^3} + \frac{4}{3}\ \frac{T_y}{\pi\, R^2} = \frac{30000}{\pi \times 238{,}328} + \frac{4}{3}\ \frac{125}{\pi \times 38{,}44} =$$

$$= \frac{30000}{7487} + \frac{500}{362{,}27} = 4 + 1{,}3 = 5{,}3 \text{ Kg/cm}^2 \ ,$$

che è notevolmente al di sotto del valore ammissibile $t = 4\, k/5 = 4 \times 700/5$ Kg/cm^2.

Si conclude che a decidere delle dimensioni della sezione sono i due punti S ed L e che quindi il raggio $R = 6{,}2$ cm costituisce il raggio minimo con cui la sezione può essere realizzata.