che noi abbiamo omessa, queste direzioni andrebbero naturalmente segnate sul fianco del solido in corrispondenza della sezione vincolata, all'altezza della corda per la quale le tensioni principali vengono via via calcolate.

F - *FORZA NORMALE ECCENTRICA*

Esercizio 32 — **Calcolare le tensioni massima e minima nella sezione al piede di una grue girevole da** *20 t* **e sbraccio** *9 m*, **nell'ipotesi che il carico sia appeso direttamente all'estremo libero e la sezione sia rettangolare cava con dimensioni** *750 × 400 × 25 × 25 mm*.

Poichè, nell'ipotesi fatta, il carico ha direzione normale al piano della sezione AB al piede della grue ed agisce rispetto al suo baricentro G (fig. 37 *a*)) con una eccentricità pari allo sbraccio teorico, la sezione in parola risulta soggetta a una forza normale eccentrica $P = 20$ t con eccentricità $e = 9$ m.

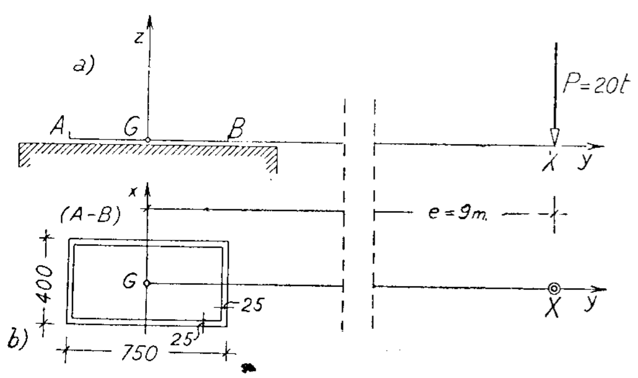

Fig. 37

Questa sollecitazione composta può notoriamente pensarsi ottenuta sovrapponendo l'azione della stessa forza normale P centrata e del momento flettente:

$$M = Pe \tag{59}$$

che nasce nel trasporto di P parallelamente a se stessa dal *centro di sollecitazione* X al baricentro G della sezione.

Supposto che il carico agisca nel piano medio della grue, contenente l'asse y (fig. 37 *b*)) la flessione risulta retta, cioè il momento flettente agisce intorno all'asse principale x; numericamente e con riguardo al segno è:

$$M_x = -20 \times 900 = -18\,000 \text{ tcm} .$$

Ambedue le caratteristiche $N \equiv P$ ed M_x destano (Ess. 14 e 21) nel punto generico della sezione soltanto una tensione normale σ_x; la tensione risultante delle due è allora la loro somma algebrica e ne segue che, per quanto si tratti di sollecitazione composta, ancora alla medesima stregua di quanto capitava per ciascuna delle due sollecitazioni semplici, lo stato di tensione nel punto generico è *monoassiale*.

Combinando algebricamente la (32) e la (37), la σ_x risultante nel punto generico della sezione ha dunque l'espressione:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y \,, \tag{60}$$

ovvero, per la (59) e poichè $N \equiv P$, anche quest'altra:

$$\sigma_x = N\left(\frac{1}{A} + \frac{e}{J_x} y\right). \tag{61}$$

Da tale espressione resta anzitutto determinata la posizione dell'asse neutro; dovendo infatti annullarvisi la tensione, esso avrà dal baricentro tale distanza $\overline{y}$ che risulti:

$$\frac{1}{A} + \frac{e}{J_x} \overline{y} = 0$$

cioè:

$$\overline{y} = -\frac{J_x}{A\,e} = -\frac{\rho_x^2}{e} \,, \tag{62}$$

con ρ_x raggio di inerzia della sezione rispetto all'asse x; questo legame fra l'eccentricità e e la distanza $\overline{y}$ da G dell'asse neutro, dice notoriamente che questo ultimo e il centro di sollecitazione sono antipolare e antipolo rispetto all'ellisse centrale di inerzia della sezione. Per le dimensioni assegnate è:

$$A = 75 \times 40 - 70 \times 35 = 550 \text{ cm}^2 ,$$

$$J_x = \frac{1}{12}(40 \times \overline{75}^3 - 35 \times \overline{70}^3) \cong 405\,830 \text{ cm}^4 ;$$

quindi anche:

$$\bar{y} = -\frac{405\,830}{550 \times 900} = -\frac{405\,830}{495\,000} = -0{,}82 \text{ cm} .$$

Dalla stessa espressione di σ_x risulta poi che, come nel caso della flessione semplice (Es. 21), le tensioni estreme si sviluppano ai bordi esterni della sezione resistente; con riguardo al segno di N, a quello interno si ha la massima compressione, ovvero la tensione minima:

$$\sigma''_{\min} = -20\left(\frac{1}{550} + \frac{900 \times 37{,}5}{405\,830}\right) \cong -1{,}7 \text{ t/cm}^2 ;$$

a quello esterno invece la tensione massima:

$$\sigma'_{\max} = +20\left(\frac{1}{550} + \frac{900 \times 37{,}5}{405\,830}\right) \cong +1{,}63 \text{ t/cm}^2 .$$

Esercizio 33 — La sezione di un NP I *450* **rinforzata simmetricamente al bordo superiore da due piatti sovrapposti delle dimensioni** *222* × *20* e *100* × *40*, **sopporta una forza normale di trazione** $N = 7\ t$. **Si determinino la max e la min eccentricità con cui questa forza può agire con centro di sollecitazione sull'asse y di simmetria, senza che la tensione vi superi in valore assoluto il limite ammissibile** $k = 1{,}2\ t/cm^2$.

Poichè, se la forza N agisce in un punto X dell'asse y, trasportandola al baricentro si sovrappone ad essa un momento M_x, la ricerca in argomento equivale a determinare il massimo e il minimo momento M_x che possono accompagnare la forza N assegnata senza che nella sezione la tensione superi, in valore assoluto, il limite ammissibile k.

Per un generico M_x, positivo o negativo, l'eccentricità corrispondente è infatti dalla (59):

$$e = \frac{M_x}{N} . \tag{63}$$

Secondochè è positivo o negativo, M_x, agendo da solo, desta al bordo inferiore della sezione tensione positiva o negativa; nell'uno o nell'altro caso è però ovvio che a tale bordo la tensione è numericamente massima; se allora M_x è positivo, questo massimo si somma aritmeticamente con la tensione uniforme pure positiva dovuta alla forza normale centrata N, e non v'ha dubbio che il massimo valore di M_x resta determinato dalla condizione che questa somma non superi k; se invece M_x è negativo, la sovrapposizione aritmetica in parola si ha al bordo superiore, mentre a quello inferiore si ha solo sovrapposizione algebrica; in tal caso è allora necessario limitare a k il valore assoluto della tensione ai due bordi, giacchè può ben capitare che quando a quello superiore la σ' raggiunge il limite k, al bordo inferiore la tensione risultante nella sovrapposizione algebrica sia già negativa e con valore assoluto già superiore a k; tale circostanza è qui probabile, in quanto la tensione media dovuta alla forza N centrata è molto modesta: $\sigma_{med} = N/A = 7/231 \cong 0{,}03$ t/cm²; nella sovrapposizione prepondera perciò necessariamente il contributo del momento.

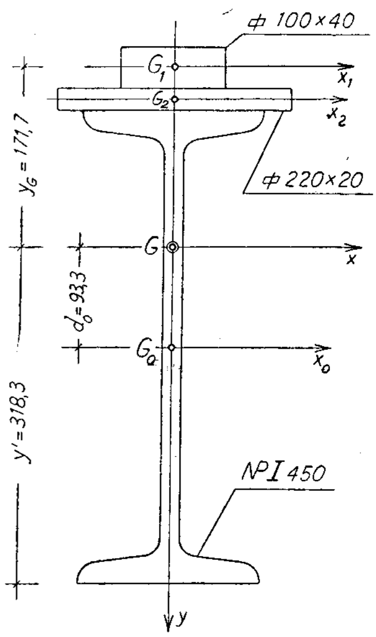

Fig. 38

Nel punto corrente P della sezione, la tensione dovuta alla sollecitazione composta è calcolabile in ogni caso, cioè per M_x positivo o negativo, mediante la (60) dell'Esercizio precedente. In base a questa occorre allora conoscere anzitutto la posizione del baricentro G e il momento di inerzia J_x della sezione rispetto all'asse principale x.

Coi dati forniti dal Manuale per il NPI 450 e con le dimensioni assegnate per i due piatti di rinforzo (fig. 38), l'ordinata di G ad es. sull'orizzontale baricentrica x_1 del piatto superiore risulta:

$$y_G = \frac{147 \times (22,5 + 4) + 22 \times 2 \times 3}{147 + 22 \times 2 + 10 \times 4} \cong 17,17 \text{ cm} .$$

Il momento d'inerzia J_x, essendo $J_{x_0} = 45850 \text{ cm}^4$ (v. il Manuale) quello del NPI 450 rispetto al proprio asse baricentrico x_0, vale poi in base al teorema di trasposizione:

$$J_x = 45850 + 147 \times \overline{9,33}^2 + \frac{1}{12}(22 \times 2^3 + 10 \times 4^3) + 22 \times 2 \times \overline{14,17}^2 +$$
$$+ 10 \times 4 \times \overline{17,17}^2 \cong 79\,340 \text{ cm}^4 .$$

Ciò posto, se M_x è positivo, la massima trazione, detta $y' = 31,83$ cm la distanza del lembo inferiore del I dall'asse neutro, ha l'espressione:

$$\sigma'_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{J_x} y' .$$

Imponendole di non superare il valore ammissibile 1,2 t/cm² e introducendo i numeri, se ne trae per $M_{\max}$ la limitazione:

$$M_{\max} \leqslant \left(1,2 - \frac{7}{231}\right) \frac{79340}{31,83} = \frac{270,2}{231} \times \frac{79340}{31,83} = +\,2\,916 \text{ tcm} .$$

Se invece M_x è negativo, la trazione al bordo superiore porta alla limitazione:

$$M_{\min} \geqslant -\left(1,2 - \frac{7}{231}\right) \frac{79340}{19,17} = -\frac{270,2}{231} \times \frac{79340}{19,17} \cong -\,4\,840 \text{ tcm} ;$$

la compressione al bordo inferiore invece a quest'altra:

$$M_{\min} \geqslant -\left(1,2 + \frac{7}{231}\right) \frac{79340}{31,83} = -\frac{284,2}{231} \times \frac{79340}{31,83} \cong -\,3\,067 \text{ tcm} ,$$

che è notevolmente più restrittiva della precedente;

ciò prova che si verifica proprio la circostanza di cui dicevamo di sopra.

Si conclude che il massimo e il minimo momento ammissibili con riguardo alla limitazione imposta per la tensione, sono rispettivamente:

$$M_{\max} \cong 2\,916 \text{ tcm} \; ; \qquad M_{\min} \cong -\,3\,067 \text{ tcm} \; .$$

A tali momenti fanno riscontro le eccentricità:

$$e_{\max} = \frac{M_{\max}}{N} = \frac{2916}{7} = 417 \text{ cm} \; ; \qquad e_{\min} = \frac{M_{\min}}{N} = -\frac{3067}{7} = -\,438 \text{ cm} \; .$$

Esercizio 34 — **Una sezione a T di dimensioni** *110 × 26*; *30 × × 110 cm* **appartenente a un solido prismatico omogeneo, è cimentata da una forza normale eccentrica di compressione** $N = 150\ t$ **in corrispondenza del punto X dell'asse y di simmetria distante** $u = 20\ cm$ **dal lembo superiore. Calcolare le tensioni massime col metodo dei momenti di nocciolo.**

Nella sollecitazione a forza normale eccentrica è di solito sufficiente conoscere le tensioni massima e minima; tali tensioni che, ove non si abbiano o non si vogliano introdurre elementi in più di quelli assegnati possono essere calcolate al modo visto all'Esercizio precedente, possono esserlo invece in modo più semplice e immediato se si conoscono i punti di nocciolo m ed n relativi ai bordi su cui esse si sviluppano; detti λ_m e λ_n i raggi di nocciolo relativi, sono allora infatti subito noti anche i *momenti di nocciolo*:

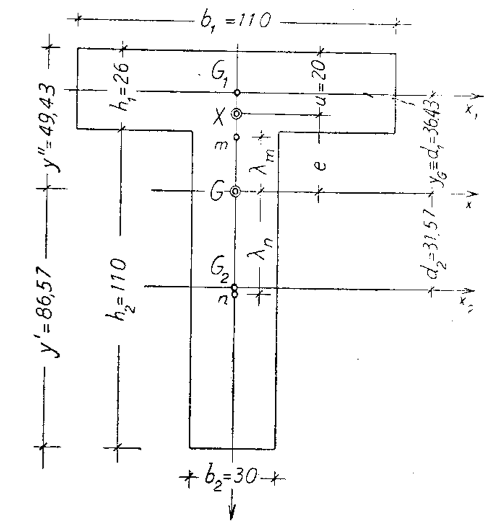

Fig. 39

$$(64) \qquad M_m = N\,(e - \lambda_m) \; ; \qquad M_n = N\,(e + \lambda_n) \; ,$$

i momenti cioè che nascono nel trasporto della forza normale N parallelamente a se stessa dal centro di sollecitazione X ai punti m ed n medesimi.

Per determinare questi punti, basta conoscere il raggio di inerzia ρ_x della sezione rispetto all'asse x baricentrico, in quanto allora, in base all'equazione (62) dei punti coniugati sull'asse y e con le notazioni di fig. 39, risulta subito:

$$(65) \qquad \lambda_m = -\rho_x^2 : y' \; ; \qquad \lambda_n = -\rho_x^2 : y'' \; .$$

Nel caso della figura, il baricentro dista ad es. dall'asse baricentrico x_1 dell'ala del T di:

$$y_G = \frac{110 \times 30\,(55 + 13)}{110 \times 30 + 110 \times 26} \cong 36,43 \text{ cm} \; ;$$

in conseguenza, con le notazioni in figura, risulta anche:

$$d_1 \equiv y_G = -36,43 \text{ cm} \; ; \qquad d_2 = 55 + 13 - 36,43 = 31,57 \text{ cm} \; ;$$

$$y' = 55 + 31,57 = 86,57 \;\text{»}\; ; \qquad y'' = -(36,43 + 13) = -49,43 \;\text{»}\; ;$$

d'altra parte, con ovvio significato dei simboli, è successivamente:

$$J_x = J_{x_1}^{(1)} + J_{x_2}^{(2)} + A_1 d_1^2 + A_2 d_2^2 = \frac{1}{12}(110 \times \overline{26}^3 + 30 \times \overline{110}^3) +$$
$$+ 110 \times 26 \times \overline{36,43}^2 + 30 \times 110 \times \overline{31,57}^2 \cong 10\,573\,210 \text{ cm}^4 \; ;$$

$$A = A_1 + A_2 = 110 \times 26 + 110 \times 30 = 6\,160 \text{ cm}^2 \; ,$$

e infine:

$$\rho_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{10\,573\,210}{6160} \cong 1\,718 \text{ cm}^2 \; .$$

Sostituendo questi valori nelle (65) risulta:

$$\lambda_m = -1718 : 86,57 = -19,85 \text{ cm}$$

$$\lambda_n = -1718 : (-49,43) = +34,75 \;\text{»}\; ;$$

e finalmente i due momenti di nocciolo hanno i valori:

$$M_m = 150\ (29{,}43 - 19{,}85) = 150 \times 9{,}58 = 1\,437 \text{ tcm} ,$$
$$M_n = 150\ (29{,}43 + 34{,}75) = 150 \times 64{,}28 = 9\,642 \text{ tcm} .$$

Il vantaggio che offre la conoscenza di tali momenti sta in questo: che essi permettono di calcolare le tensioni massime per la sollecitazione a forza normale eccentrica *come se si trattasse di semplice flessione*. E invero, pel principio di sovrapposizione, la tensione ad es. al bordo inferiore può calcolarsi sommando l'effetto della N trasportata in m, perciò ancora eccentrica, e di M_m; ma la N così agente genera al detto bordo tensione nulla, essendo tale bordo l'antipolare del centro m di sollecitazione e perciò asse neutro per il nuovo sforzo normale eccentrico introdotto (eccentricità $e' = \lambda_m$); resta dunque attivo soltanto M_m, e la tensione cercata vale:

$$(66)\quad \sigma'_{\max} = \frac{M_m}{J_x}\, y' = + \frac{1437 \times 86{,}57}{10\,573\,210} = + \frac{124\,401}{10\,573\,210} \cong + 0{,}0118 \text{ t/cm}^2 .$$

In modo analogo per il bordo superiore, dove si ha manifestamente compressione:

$$(66')\quad \sigma''_{\min} = \frac{M_n}{J_x}\, y'' = - \frac{9642 \times 49{,}43}{10\,573\,210} = - \frac{476\,604}{10\,573\,210} = - 0{,}045 \text{ t/cm}^2 .$$

Esercizio 35 — **Un supporto di acciaio con sezione resistente a T è destinato a un albero di trasmissione che lo grava verticalmente con una forza P nel suo piano medio (y z) agente alla distanza $t = 160$ *mm* dal lembo esterno dell' ala del T. Supposte per questo le dimensioni:**

$h = 170$ mm ; $b = 100$ mm ; $s = 10$ mm ,

determinare il massimo carico P da cui il supporto può essere gravato senza oltrepassare nella sezione la tensione ammissibile $k = 1$ *t/cm*^{2}.

La sezione resistente $S - S$ del supporto è cimentata a forza normale eccentrica; poichè P agisce nel piano medio $(y\ z)$, il momento $M_x = Pe$ che nasce nel trasporto della P al baricentro genera flessione retta. La tensione σ_x all'altezza y generica dal baricentro può quindi valutarsi con la formula (60).

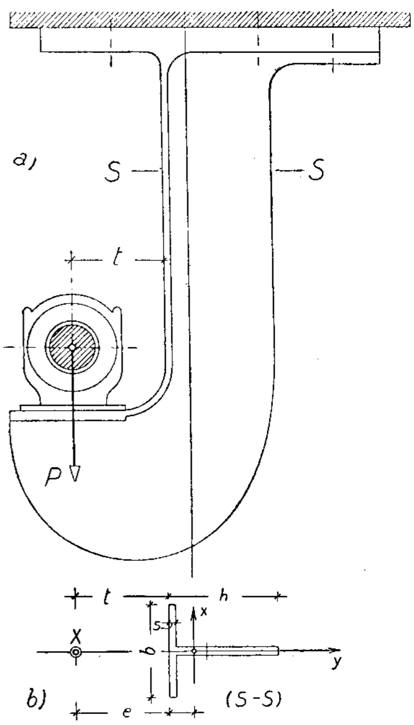

Fig. 40

L'eccentricità e, poichè, come da facile calcolo, il baricentro G della sezione dista dalla mediana trasversa dell'ala (fig. 41) di $y_G = 5,23$ cm, vale:

$$e = -\left(t + \frac{s}{2} + y_G\right) = -(16 + 0,5 + 5,23) =$$
$$= -21,73 \text{ cm} .$$

Si trova poi: $A = 10 \times 1 + 16 \times 1 = 26 \text{ cm}^2$,

$$J_x = \frac{1}{3}\left[bh_1^3 - (b\text{-}s)\,h_3^3 + sh_2^3\right] = \frac{1}{3}(10 \times \overline{5,73}^3 -$$
$$- 9 \times \overline{4,73}^3 + 1 \times \overline{11,27}^3) \cong 2360 \text{ cm}^4 .$$

Dalla formula surricordata, esprimendovi σ_x in funzione unicamente della forza incognita ammissibile P, si hanno per le tensioni in grado di estremo le espressioni:

$$\sigma' = P\left(\frac{1}{A} + \frac{e}{J_x}\,y'\right)$$

$$\sigma'' = P\left(\frac{1}{A} + \frac{e}{J_x}\,y''\right) ,$$

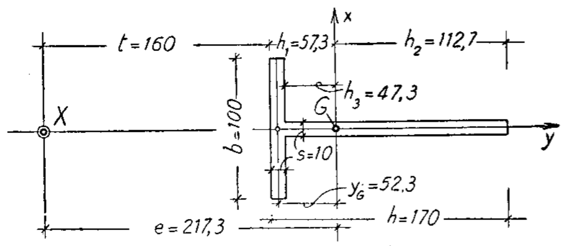

Fig. 41

dove y' e y'' indicano le distanze dal baricentro degli elementi superficiali maggiormente teso e compresso. Per individuare tali elementi si osservi che essendo P una forza di trazione, il momento M_x risulta negativo: la massima trazione si verifica quindi al bordo esterno dell'ala, la massima compressione al bordo esterno della costola. È dunque (fig. 41):

$$y' = -\left[y_G + \frac{s}{2}\right] \equiv -h_1 = -5,73 \text{ cm} ; \quad y'' = \left(h - y_G - \frac{s}{2}\right) = +11,27 \text{ cm} .$$

Dalla limitazione della massima tensione al valore $k = 1\ t/cm^2$:

$$\sigma'_{max} = P\left(\frac{1}{26} + \frac{21,73}{2360} \times 5,73\right) \leqslant 1\ t/cm^2 ,$$

si ricava allora per P il valore limite:

$$P'_{max} = 10,98\ t\ ;$$

dall'analoga limitazione per la massima compressione:

$$\sigma''_{min} = P\left(\frac{1}{26} - \frac{21,73}{2360} \times 11,27\right) \geqslant -1\ t/cm^2 ,$$

si ricava invece quest'altro:

$$P''_{max} = 7,03\ t\ ,$$

il quale, costituendo un limite più restrittivo di quello sopra trovato, rappresenta il massimo valore ammissibile per P.

Esercizio 36 — Un pilastro in muratura a sezione rettangolare con dimensioni $b = 1\ m$, $h = 1,2\ m$ sopporta nella sezione piú cimentata una forza di compressione N agente nel punto X della mediana y posto, internamente, alla distanza $u = 25\ cm$ dal lembo superiore.
Si domanda il massimo valore che può assumere N ammesso per la tensione nel materiale di cui il pilastro è costituito il limite:

$$\sigma''_a = -\ 10\ Kg/cm^2 .$$

Si costruisca anche, per questo massimo, il diagramma delle tensioni nella sezione e lo si confronti con quello che invece corrisponde all' ipotesi della sezione omogenea.

—◇—

Per poter giudicare della stabilità nelle sezioni dei solidi in muratura soggette a forza normale eccentrica, occorre confrontare preventivamente la posizione del centro di compressione X con quelle dei due punti di nocciolo situati sull'asse di sollecitazione.

È noto infatti che X e l'asse neutro sono antipolo e antipolare rispetto all'ellisse centrale di inerzia della sezione reagente; la sezione del solido risulta allora tutta compressa se il centro X cade internamente al nocciolo di inerzia; nel caso contrario invece una parte della sezione risulterebbe tesa, la rimanente compressa; ora è noto che nei solidi murari la zona tesa è praticamente inetta a resistere [1] e il calcolo si conduce perciò come se tale parte non esistesse; in tale condizione le due zone risultano allora separate dall'antipolare n_o del centro di sollecitazione X rispetto all'ellisse centrale della *sola parte reagente*, asse che perciò è necessariamente distinto da quello n che competerebbe alla sollecitazione nell'ipotesi di sezione omogenea.

Nel caso nostro, giacchè il raggio di nocciolo λ_n sull'asse di sollecitazione vale $\lambda_n = h/6 = 120/6 = 20$ cm e l'eccentricità è invece $e = h/2 - u = 60 - 25 = 35$ cm, si verifica proprio la seconda circostanza, cioè la sezione resistente è parzializzata. Si tratta allora di determinare l'asse neutro effettivo n_o cioè, anche, la altezza h_r della zona reagente, dopo di che la distribuzione delle tensioni sarà subito individuabile.

Ora è noto che per la sezione rettangolare questa altezza h_r risulta *tripla* della distanza u del centro di compressione X dal lembo esterno della sezione dalla sua stessa parte; ciò è d'altronde evidente in quanto, dovendo risultare il diagramma delle tensioni un diagramma triangolare (fig. 42 *b*)) ed avendo n_o, come è anche ovvio, ancora la direzione dell'altra mediana x del rettangolo, il centro X deve risultare un punto di contorno del nocciolo relativo alla sezione rettangolare reagente; è dunque:

$$h_r = 3\,u = 3 \times 25 = 75 \text{ cm} .$$

Fissato così l'asse n_o, il diagramma delle tensioni risulta un triangolo di altezza h_r, vertice su n_o e base,

---

(1) A rigore anche nei solidi murari si riscontra una qualche resistenza alla trazione, ma questa è talmente piccola e sopratutto così incerta che, anzichè farvi affidamento, è più opportuno trascurarla; ciò torna del resto a vantaggio della stabilità.

che misura la tensione massima, pari al doppio della tensione media:

$$\sigma''_o = \frac{N}{3\,u\,b}$$

che si sviluppa all'altezza della corda baricentrica per la sezione reagente.

La condizione che determina il massimo carico ammissibile $N_{\max}$ è allora:

$$\left| \frac{2\,N_{\max}}{3\,u\,b} \right| \leqslant 10 \text{ Kg/cm}^2 ,$$

dalla quale successivamente:

$$N_{\max} = \frac{10 \times 3\,u\,b}{2} = 15\,u\,b = 15 \times 25 \times 100 = 37\,500 \text{ Kg} .$$

Supposto agire in X questo valore limite, il relativo diagramma delle tensioni nella sezione è quello indicato con segno continuo nella fig. 42 *b*).

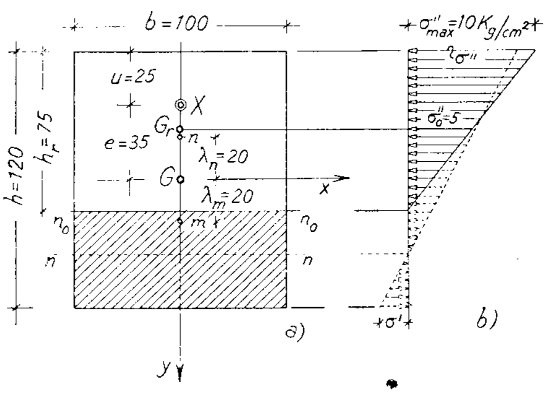

Fig. 42

Il diagramma punteggiato ad esso sovrapposto, è invece quello che lo stesso carico $N_{\max}$ desta nella sezione assegnata 100×120 nell'ipotesi che sia omogenea; per costruirlo si sono calcolate le tensioni $\sigma'_{\max}$ e $\sigma''_{\max}$ ai due bordi della sezione utilizzando i momenti di nocciolo:

$$M_n = N_{\max}\,(e - \lambda_n) = 37500 \times (35 - 20) = 562\,500 \text{ Kgcm}$$

$$M_m = N_{\max}\,(e + \lambda_m) = 37500 \times (35 + 20) = 2\,062\,500 \text{ »}$$

sicchè:

$$\sigma''_{\max} = -\frac{M_m}{W_x} = -\frac{2\,062\,500 \times 6}{b\,h^2} = -\frac{2\,062\,500 \times 6}{100 \times 14400} = -\frac{12375}{1440} \cong -8{,}6 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma'_{\max} = \frac{M_n}{W_x} = \frac{562\,500 \times 6}{b\,h^2} = \frac{562500 \times 6}{100 \times 14400} = \frac{3135}{1440} \cong +2{,}2 \text{ »}$$

All'altezza della mediana x del rettangolo si legge ora la nuova tensione media:

$$\sigma_o = - \frac{N_{max}}{bh} = - \frac{37500}{100 \times 120} = - 3{,}125 \text{ Kg/cm}^2 ,$$

valore questo che poteva essere utilizzato in luogo di una delle tensioni estreme per tracciare il diagramma.

Esercizio 37 — **La sezione di cui all'Esercizio 34 appartenga ora a un solido prismatico non resistente a trazione. Calcolarvi la tensione massima nelle stesse condizioni di carico allora ammesse, cioè per una forza eccentrica di compressione $N = 150\ t$ in corrispondenza del punto X dell'asse y di simmetria distante $u = 20\ cm$ dal lembo superiore.**

—·◇·—

Come si è richiamato all'Esercizio precedente, affinchè una sezione caricata eccentricamente sopporti soltanto sforzi di compressione e quindi, se non è atta a resistere a trazione, sia interamente utilizzata, il centro di pressione X non deve cadere fuori del suo nocciolo centrale di inerzia; nel caso contrario è soltanto una parte della sezione che reagisce alla sollecitazione.

Per giudicare, una volta assegnato X, del caso che si verifica, è dunque necessario conoscere preventivamente la posizione dei punti di nocciolo sull'asse di sollecitazione, nell'ipotesi che la sezione sia omogenea.

Al proposito, all'Esercizio 34 trovammo già per i raggi di nocciolo sull'asse y i valori:

$$\lambda_m = - 19{,}85 \text{ cm} \; ; \qquad \lambda_n = + 34{,}75 \text{ cm} \; ;$$

in base ai dati, il centro X di pressione risulta dunque esterno al nocciolo centrale; la porzione resistente e quella inerte risultano allora *separate dall'antipolare x di X rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sola porzione reagente.*

Ora è noto che la distanza η_x di x da X ha l'espressione:

$$\eta_x = \frac{J_r}{S_r} \quad , \tag{67}$$

dove J_r e S_r esprimono il momento di inerzia e il momento statico della porzione reagente rispetto allo stesso asse x.

Colle notazioni di fig. 43, questi due momenti hanno le espressioni:

$$J_r = \frac{1}{3}\,[b_1\,h_r^3 - (b_1 - b_2)\,(h_r - h_1)^3]\ ; \qquad S_r = \frac{1}{2}\,[b_1\,h_r^2 - (b_1 - b_2)\,(h_r - h_1)^2]\ ;$$

poichè è d'altra parte:

$$\eta_x = h_r - u \quad ,$$

sostituendo nella (67) si perviene in definitiva alla seguente equazione cubica in h_r:

$$b_2\,h_r^3 - 3\,u\,b_2\,h_r^2 + 3\,h_1\,(b_1 - b_2)\,(h_1 - 2\,u)\,h_r + (b_1 - b_2)\,(3\,u - 2\,h_1)\,h_1^2 = 0$$

e numericamente, sostituendovi i dati, a quest'altra:

$$h_r^3 - 60\,h_r^2 - 2912\,h_r + 14421 = 0 \ .$$

Con il cambio di variabile:

$$h_r = y - \left(\frac{-60}{3}\right) = y + 20 \ , \tag{68}$$

valida a eliminarvi il termine di secondo grado, tale equazione prende la forma ridotta:

$$y^3 - 4112\,y - 59819 = 0 \ .$$

Posto: $\quad -3p = -4112 \ ; \quad -2q = -59819$

onde: $\quad p \cong 1371 \quad , \quad q \cong 29909 \quad ,$

giacchè risulta $p^3 > q^2$, l'equazione ha tre radici reali in y, che possono determinarsi per via trigonometrica. Valendoci di quest'altra posizione:

$$\cos 3\varphi = \frac{q}{p\sqrt{p}} = \frac{29909}{1371\sqrt{1371}} = 0{,}58961 ,$$

dalla quale: $3\varphi = 53^\circ 52'$ e quindi: $\varphi = 17^\circ 57' 20''$,

esse risultano infatti:

$$y_1 = 2\sqrt{p}\cos\varphi; \qquad y_2 = 2\sqrt{p}\cos(\varphi + 120^\circ); \qquad y_3 = 2\sqrt{p}\cos(\varphi + 240^\circ).$$

Di queste radici a noi interessa ovviamente solo la prima, che vale:

$$y_1 = 2\sqrt{1371} \times \cos(17^\circ 57' 20'') = 2 \times 37 \times 0{,}95130 = 70{,}4 \text{ cm} .$$

Per la posizione (68) è allora:

$$h_r = 70{,}4 + 20 = 90{,}4 \text{ cm} ,$$

e quindi anche:

$$\eta_x = h_r - u = 90{,}4 - 20 = 70{,}4 \text{ cm} .$$

Oltre che per via analitica, l'asse x di separazione può determinarsi graficamente (fig. 43).

Divisa la figura in striscie parallele con dividenti normali all'asse y di sollecitazione, si applichino nei rispettivi baricentri parallelamente alle dividenti le corrispondenti forze-aree e le si connettano col poligono funicolare p nell'ordine in cui si incontrano a partire dal lembo maggiormente compresso; detta quindi X' la proiezione, nella direzione delle forze, del centro di compressione X sul primo lato del poligono p, si guidi da X' la retta $X'N$ per modo che la spezzata $AX'N$ risulti di compenso per il tratto di poligono fra A ed N, che sia nulla cioè l'area intrecciata compresa fra la $X'N$ e il poligono stesso: la parallela alle corde dividenti per il punto N è l'asse x di separazione cercato.

Dalla costruzione resta anche direttamente fissato il baricentro G_r della porzione reagente, sulla parallela ad x per l'intersezione del primo lato di p con quello che taglia l'asse x (lati estremi del poligono funicolare relativo al complesso delle forze-aree reagenti).

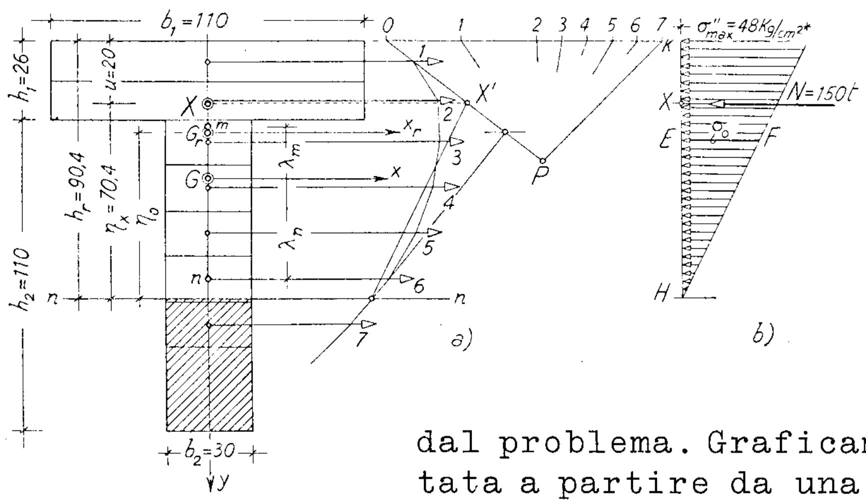

Fig. 43

È ora immediato valutare la tensione massima richiesta dal problema. Graficamente, riportata a partire da una fondamentale verticale qualunque HK (fig. 43 b)), all'altezza del baricentro G_r il segmento $\overline{EF}$ che, in una scala prescelta, misura la tensione media:

$$\sigma_0 = \frac{N}{A_r} ,$$

con A_r area della porzione reagente, la congiungente HF dà la legge di variazione delle pressioni unitarie: il segmento all'altezza del bordo estremo superiore misura allora la massima tensione voluta.

Questo massimo può anche valutarsi sulla formula:

$$\sigma''_{\max} = \frac{N}{A_r} \frac{h_r}{\eta_0} ,$$

dove, oltre agli altri simboli di noto significato, η_0 rappresenta l'ordinata del baricentro G_r sull'asse x di separazione.

Poichè, con le notazioni in figura, è:

$$A_r = b_1 h_1 + b_2 (h_r - h_1) = 110 \times 26 + 30 (90{,}4 - 26) = 4\,792 \text{ cm}^2 ;$$

$$\eta_o = \frac{b_1 h_1 (h_r - \frac{h_1}{2}) + b_2 \frac{(h_r - h_1)^2}{2}}{A_r} = \frac{110 \times 26\,(90,4 - 13) + 30 \frac{(90,4 - 26)^2}{2}}{4792} = 59,17 \text{ cm} \ ,$$

risulta anche:

$$\sigma''_{max} = \frac{150\,000}{4792} \, \frac{90,4}{59,17} = 48 \text{ Kg/cm}^2 \ ,$$

che concorda col valore fornito dal grafico.

G - *FORZA NORMALE FLESSIONE E TAGLIO*

Esercizio 38 — **Determinare i diagrammi delle tensioni nella sezione rettangolare cava al piede della grue di cui all'Esercizio 32, prescindendo dall'attrito nella gola e nel perno della puleggia di rinvio del carico all'organo di sollevamento.**
Valutare quindi le tensioni principali in corrispondenza delle corde di passaggio dai rami trasversi della sezione a quelli longitudinali.

All'Esercizio 32 si è supposto che il carico $P = 20$ t pendesse direttamente all'estremo libero della grue; la sezione al piede di questa risultava allora soggetta a forza normale eccentrica.

Di fatto, per il rinvio del carico all'organo di sollevamento (fig. 44), le condizioni di carico in questa sezione sono ben diverse; nel ramo di rinvio del cavo si ha infatti una tensione T che, se si prescinde, com'è nell'ipotesi, dall'attrito nella gola e nel perno della puleggia p (fig. 45), ha lo stesso valore del carico verticale P; l'azione sul perno della puleggia e quindi anche all'estremo della grue, è pertanto costituita dalla risultante R delle tensioni nei due rami del cavo. Valutata graficamente (fig. 45 *a*)) questa risultante vale $R = 34,3$ t, ha componenti rispettivamente secondo la verticale e l'orizzontale: $N = 29,6$ t, $T_y = 17,2$ t, e incontra il piano della sezione $A - B$ di base nel punto X del suo asse y di simmetria a distanza $e^* = 570$ cm dal baricentro G.