

riore all'asse x , risulta coi dati già segnalati di sopra:

$$S_r \equiv S_x = 2 \times 15,5 \times (48,2 - 2,54) + \frac{48,2^2}{2} \times 0,8 = 2\,345 \text{ cm}^3;$$

perciò applicando la (53):

$$\tau_{\max} = \frac{T_y S_x}{J_{\varphi} b} = \frac{31 \times 2\,345}{161\,669 \times 0,8} = 0,562 \text{ t/cm}^2 .$$

Nell'ipotesi che il taglio T_y interessi solo la costola e vi si ripartisca uniformemente, la tensione tangenziale media, detta A_c l'area della costola medesima, vale invece:

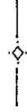
$$\tau_{\text{med}} = \frac{T_y}{A_c} = \frac{31}{80 \times 0,8} = 0,484 \text{ t/cm}^2 ,$$

sensibilmente inferiore al valore della τ_{\max} .

E - FLESSIONE E TAGLIO

Esercizio 30 — La sezione di un NPI 500 sopporta uno sforzo di taglio $T_y = 55 t$ agente secondo la costola e un momento flettente $M_x = -25 tm$.

Calcolare le tensioni normale e tangenziale estreme e le tensioni principali in corrispondenza delle corde di passaggio dalle ali alla costola.



Nella sollecitazione di flessione e taglio, le caratteristiche non nulle relative alla base libera del solido di S. Venant si riducono unicamente a una forza di taglio, per es. T_y^* (cfr. la fig. 32) ⁽¹⁾; tale caratteristica importa nella sezione trasversale generica la presenza di un momento flettente, il quale lungo

⁽¹⁾ Potrebbe essere una forza di taglio T_x^* agente secondo l'asse x ovvero una forza T^* agente secondo un qualunque altro asse baricentrico.

il solido varia con legge lineare (fig. 32 b)) cioè con valore alla sezione di ascissa z ;

$$(31') \quad M_x = -T_y^*(l - z),$$

assumendo quindi il valore estremo $-T_a^*l$ in corrispondenza della base vincolata; il taglio invece rimane costante da sezione a sezione col valore T_y^* .

Si ricorda che nel caso che l'asse di sollecitazione y sia asse di simmetria, la deformazione porta le fibre longitudinali del solido in curve piane, che sono delle parabole cubiche; in particolare la *linea elastica*, anch'essa una parabola cubica, resta nel piano longitudinale di simmetria yz ; anzichè tangente all'asse del solido, cioè alla sua configurazione indeformata come avveniva nel caso della flessione semplice (Es. 21), essa risulta ora invece inclinata a tale asse di un angolo α_0 ; d'altro canto le sezioni non restano più piane come nel caso di sollecitazione ora detto, ma si ingobbano tutte ugualmente.

Per quanto fisicamente priva di significato, in una separazione formale delle due sollecitazioni di flessione e taglio, si può idealmente attribuire al taglio la seguente parte di deformazione:

a) la rotazione iniziale α_0 della linea elastica che, in una valutazione approssimata, può notoriamente scriversi:

$$(54) \quad \alpha_0 = \chi \frac{T_y l}{GA},$$

dove χ è il *fattore di taglio*, G il modulo di elasticità tangenziale (Es. 13);

b) la porzione f_2 di freccia che a tale rotazione consegue all'estremo della trave, espressa, nello stesso ordine di approssimazione con cui è valutato α_0 , dà:

$$(55) \quad f_2 = \alpha_0 l = \chi \frac{T_y l}{GA};$$

c) l'ingobbamento delle sezioni trasversali;

può invece essere attribuita alla flessione questa parte ulteriore della deformazione:

a) la curvatura della linea elastica che, trascurando il quadrato della inclinazione al denominatore della sua ben nota espressione esatta ⁽¹⁾, può scriversi:

$$(56) \quad \frac{l}{r} \cong \frac{d^2 \eta}{d z^2} = - \frac{M_x}{EJ};$$

pertanto, in base alla legge (31') con cui varia il momento, curvatura variabile da punto a punto della trave;

b) la parte residua f_1 della freccia f all'estremo libero, espressa da:

$$(57) \quad f_1 = \frac{T_y l^2}{3 EJ}.$$

Per quanto riguarda le tensioni che nascono ora nel punto corrente della sezione trasversale generica, esse sono normali e tangenziali, dovute le prime al momento le seconde al taglio; quelle si calcolano ancora con la formula di Navier (37), queste possono calcolarsi con sufficiente approssimazione ammettendo la teoria approssimata del taglio, cioè in base alla (53) già utilizzata ai due Esercizi precedenti; poichè secondo l'una e l'altra di queste formule, le due tensioni restano costanti nei punti di una stessa corda, in tali punti lo stato di tensione è lo stesso; qualitativamente, a meno dei punti ai due bordi superiore e inferiore dove è monoassiale, questo stato è poi lo stesso in tutti i punti della sezione e cioè biassiale; le due tensioni principali relative hanno le espressioni:

$$(58) \quad \begin{matrix} \sigma_{1p} \\ \sigma_{3p} \end{matrix} = \frac{1}{2} \sigma_x \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau^2},$$

pari cioè, interpretate geometricamente, all'ascissa del centro del circolo di Mohr aumentata o diminuita

⁽¹⁾ Ricordiamo comunque che tale espressione è: $\frac{1}{r} = \frac{d^2 \eta}{d z^2} / \left[1 + \left(\frac{d \eta}{d z} \right)^2 \right]^{3/2}$.

del raggio del circolo medesimo; stante la variabilità da corda a corda della σ_x e della τ , tali tensioni sono dunque diverse da corda a corda, e in tutta una zona della sezione rispetto all'asse neutro prepondera in valore assoluto quella positiva, in tutta l'altra quella negativa; all'altezza dell'asse neutro, essendovi $\sigma_x = 0$, le due tensioni principali, come già riconosciuto all'Esercizio 27, hanno uguale valore assoluto, pari precisamente a quello della τ , e segno opposto, e quindi gli elementi principali sono inclinati a 45° sullo strato neutro.

Nel caso della sezione a I in esame, la tensione al livello di questa corda raggiunge il massimo valore

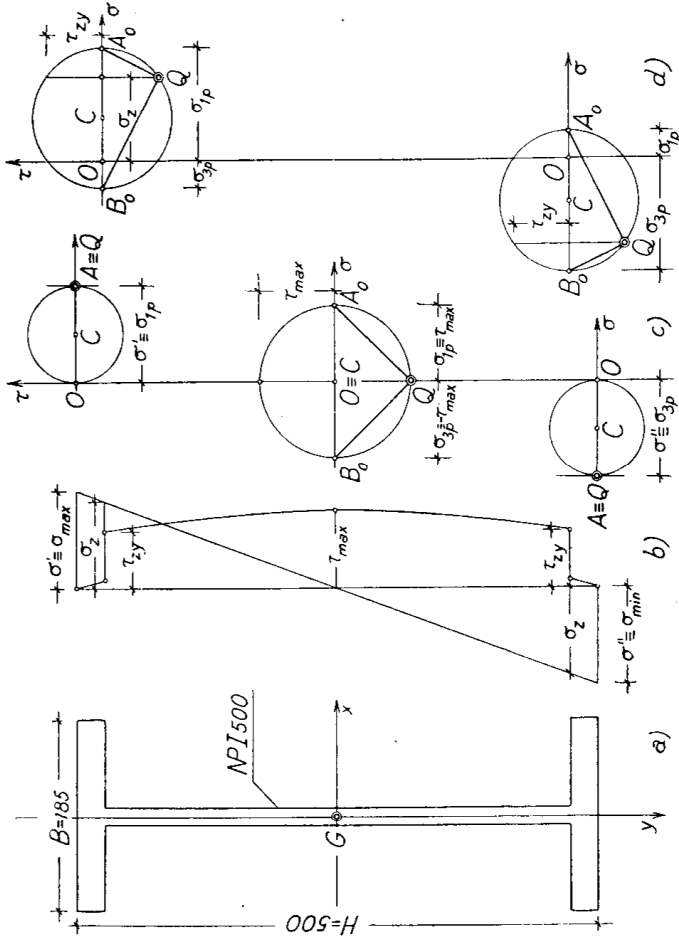


Fig. 35

(Es. 28); precisamente, giacchè il momento statico S_0 della semisezione rispetto all'asse x , schematizzando il NPI come è fatto in fig. 35 a), vale:

$$S_0 = \frac{1}{2} 18,5 \times 25^2 - (18,5 - 1,8) \times (25 - 2,7)^2 = 1630 \text{ cm}^3,$$

risulta:

$$\tau_{\max} = \frac{T_y S_0}{J_x b} = \frac{55 \times 1630}{6874 \times 1,8} = 0,724 \text{ t/cm}^2.$$

I valori estremi richiesti della tensione normale, vengono invece raggiunti ai lembi della sezione e precisamente, M_x essendo negativo, al bordo superiore la tensione massima (positiva) al bordo inferiore la minima (negativa); i valori assoluti di questi due estremi sono però gli stessi e cioè, essendo $W_x = 2746 \text{ cm}^3$:

$$\sigma'_{\max} \equiv |\sigma''_{\min}| = \frac{M_x}{W_x} = \frac{2500}{2746} = 0,91 \text{ t/cm}^2.$$

Alle tre quote esaminate, i valori trovati rispettivamente per τ_{\max} e per σ'_{\max} e σ''_{\min} sono dunque anche quelli delle tensioni principali: in fig. 35c) sono costruiti con riferimento a uno stesso asse per le τ , i circoli di Mohr relativi a queste corde.

All'altezza delle corde di passaggio fra le ali e la costola, le cose vanno invece diversamente: né la σ_x né la τ che ivi agiscono coincidono colle tensioni principali; per esempio alla corda superiore, riguardata come appartenente alla costola, è:

$$\sigma_x = - \frac{2500}{68740} (-22,3) = + 0,812 \text{ t/cm}^2;$$

$$\tau = \frac{55 (18,5 \times 2,7) (25 - 1,35)}{68740 \times 1,8} = 0,528 \text{ t/cm}^2.$$

Sostituendo nelle (58) risulta allora:

$$\begin{aligned} \sigma_{Ip} &= \frac{0,812}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{0,812^2 + 4 \times 0,528^2} = + 1,07 \text{ t/cm}^2 \\ \sigma_{3p} &= - 0,26 \end{aligned}$$

Alla corda simmetrica, riguardata allo stesso modo, è invece:

$$\sigma_{Ip} = + 0,26 \text{ t/cm}^2; \quad \sigma_{3p} = - 1,07 \text{ t/cm}^2;$$

cioè le tensioni principali si scambiano ivi, in valore, con quelle di sopra; in fig. 35 d) sono indicati, ancora con riferimento a uno stesso asse per le τ , i due circoli di Mohr.

In tutti i circoli costruiti sono infine indicati i corrispondenti poli O di rappresentazione e le direzioni delle corrispondenti tensioni principali.

Esercizio 31 — La sezione di una trave a I saldata è composta di un'anima 660×6 e, superiormente e inferiormente, di due piatti delle seguenti dimensioni rispettive:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = 11 \text{ mm} ; \\ \lambda_1 = 122 \text{ ,} ; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} d_2 = 8 \text{ mm} ; \\ \lambda_2 = 86 \text{ ,} ; \end{array} \right.$$

supposta la trave nelle condizioni del problema di Saint-Venant, con lunghezza $l = 100 \text{ cm}$ e soggetta a una forza $T_y = 10 \text{ t}$ applicata secondo l'asse dell'anima alla base libera $z = l$, si domandano: a) la freccia; b) il lavoro di deformazione; c) il diagramma delle tensioni principali per la sezione $z = 0$; d) le direzioni delle linee isostatiche in corrispondenza dei punti di questa sezione alle ordinate:

$$y = \frac{y' - d_1}{2} ; \quad y = 0 ; \quad y = \frac{y'' - d_2}{2} .$$

Si sono determinati anzitutto gli elementi geometrici necessari della sezione: l'area A , il baricentro G , il momento d'inerzia J_x ; senza fermarci su questi calcoli, ormai sufficientemente sviluppati negli Esercizi che precedono, ci limitiamo ai risultati:

$$A = 59,9 \text{ cm}^2 ; \quad J_x \cong 35790 \text{ cm}^4 ;$$

distanza di G dal bordo inferiore:

$$y' = 30,42 \text{ cm} .$$

Con questi elementi si può subito valutare la freccia totale del tronco prismatico, come somma dei contributi f_1 ed f_2 —forniti dalle (57) e (55)— che, nella separazione ideale di cui dicemmo all'Esercizio 30, vi hanno isolatamente le due sollecitazioni di flessione e di taglio; cioè dunque e di seguito, assumendo per il fattore di taglio il valore medio $\chi = 2,2$ e $G = 870 \text{ t/cm}^2$, $E = 2180 \text{ t/cm}^2$:

$$f = f_1 + f_2 = \frac{T_y l^3}{3 E J_x} + \chi \frac{T_y l}{G A} = \frac{10 \times 100^3}{3 \times 2180 \times 35790} + 2,2 \frac{10 \times 100}{870 \times 59,9} = 0,0849 \text{ cm} .$$

Immediato è ora valutare il lavoro di deformazione valendoci del teorema di Clapeyron, in virtù del quale

esso uguaglia la metà del lavoro relativo alla forza esterna T_y per lo spostamento f del suo punto di applicazione; separando ancora, se vogliamo, al modo di sopra ciò che di questo lavoro è assegnabile idealmente alla flessione e ciò che è invece da attribuirsi al taglio, risulta dunque:

$$\phi = \phi_M + \phi_T = \frac{1}{2} T_y f_1 + \frac{1}{2} T_y f_2 = \frac{1}{2} f T_y = \frac{1}{2} \times 0,0849 \times 10 = 0,4245 \text{ tcm.}$$

Per costruire il diagramma delle *tensioni principali* per la sezione vincolata — la quale costituisce ovviamente

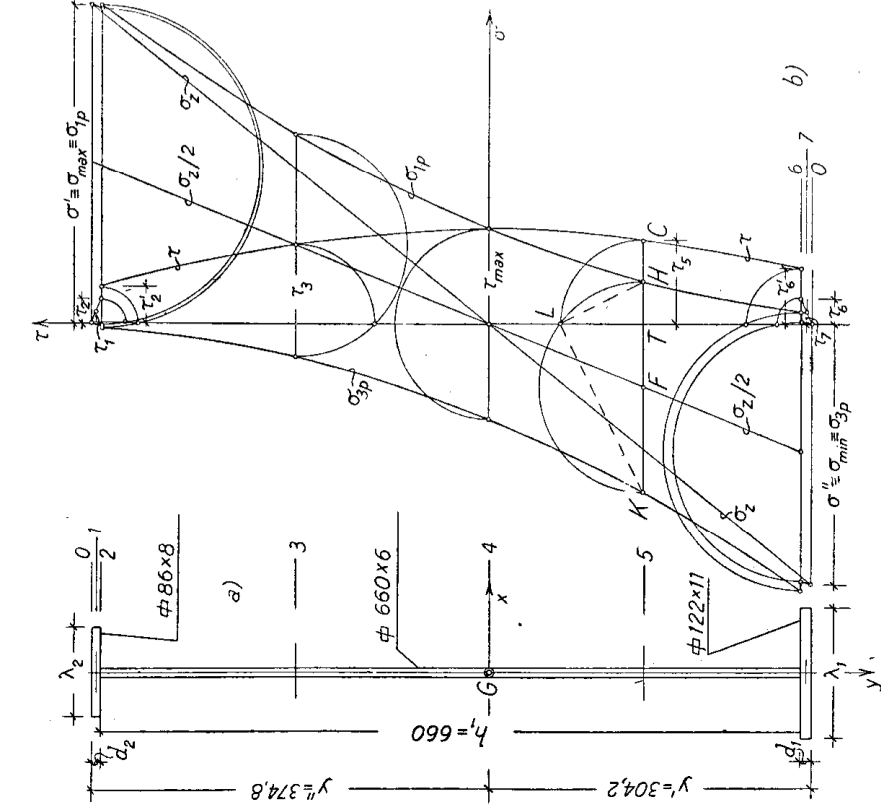


Fig. 36

il diagramma è lineare, per ottenerlo basta calcolare la σ_x in un punto qualunque: per es., come noi abbiamo fatto, al bordo superiore dove, il momento essendo negativo, si ha trazione:

$$\sigma'_{max} = \frac{M_{max}}{J_c} y'' = \frac{1000 \times 37,48}{35790} = 1,047 \text{ t/cm}^2 .$$

la sezione per ricolosa del solido in quanto sopporta col taglio T_y , comunque anche tutte le altre sezioni, il momento $M = -T_y l$ massimamente in valore assoluto — occorre conoscerli i diagrammi delle tensioni e tangenziali.

Per quanto riguarda il primo, la cosa è immediata: sapendo che sull'asse neutro è $\sigma_x = 0$ e che

Per il secondo diagramma invece, come già visto all'Esercizio 28, occorre calcolare in base alla (53) la tensione tangenziale media τ in corrispondenza di varie corde; noi lo abbiamo fatto per quelle contrassegnate in disegno coi numeri da 1 a 7 (fig. 36); a evitare un inutile ingombro di calcolo, ci limitiamo ai risultati, avvertendo che per le corde di passaggio dalle ali alla costola abbiamo seguito la stessa notazione sprovvista o meno di apice a seconda che le si pensino appartenere alle prime o alla seconda. È risultato:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0,004 \text{ t/cm}^2; & \tau_2 &= 0,008 \text{ t/cm}^2; & \tau'_2 &= 0,119 \text{ t/cm}^2; \\ \tau_3 &= 0,259 \text{ » } ; & \tau_{\max} &= \tau_4 = 0,307 \text{ » } ; & \tau_5 &= 0,274 \text{ » } ; \\ \tau'_6 &= 0,187 \text{ » } ; & \tau_6 &= 0,009 \text{ » } ; & \tau_7 &= 0,045 \text{ » } . \end{aligned}$$

Con riferimento a una stessa fondamentale si sono costruiti (fig. 36 b) i due diagrammi delle σ_x e delle τ , e quindi, sul primo di essi, quello delle $\sigma_x/2$, utile per la costruzione dei diagrammi delle tensioni principali, come indicano le loro espressioni (58); a tanto, all'altezza della corda generica si riportò ora in \overline{TL} la tensione $\tau = \overline{TC}$; quindi con centro in F , sul diametro delle $\sigma_x/2$, si ribaltò dalle due parti in \overline{FH} e \overline{FK} l'ipotenusa \overline{FL} del triangolo rettangolo FTL , tale cioè che:

$$\overline{FL} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} .$$

È immediato riconoscere in base alle (58) che i punti H e K , riferiti alla fondamentale comune per i due diagrammi, appartengono alle curve rappresentative della σ_{fp} e σ_{sp} ; la fig. 36 b) mostra chiaramente le caratteristiche di queste curve.

Ricordando la rappresentazione di Mohr per lo stato di tensione in un fascio — qui uno qualunque di quelli aventi per sostegno nella sezione una corda parallela ad x (Ess. 34 e 35) — restano fissate volta a volta anche le direzioni principali dalle congiungenti il punto L coi punti H e K . Per una rappresentazione localizzata,

che noi abbiamo omessa, queste direzioni andrebbero naturalmente segnate sul fianco del solido in corrispondenza della sezione vincolata, all'altezza della corda per la quale le tensioni principali vengono via via calcolate.

F - FORZA NORMALE ECCENTRICA

Esercizio 32 — Calcolare le tensioni massima e minima nella sezione al piede di una gru girevole da $20 t$ e sbraccio $9 m$, nell'ipotesi che il carico sia appeso direttamente all'estremo libero e la sezione sia retangolare cava con dimensioni $750 \times 400 \times 25 \times 25 mm$.

Poichè, nell'ipotesi fatta, il carico ha direzione normale al piano della sezione AB al piede della gru ed agisce rispetto al suo baricentro G (fig. 37 a) con una eccentricità pari allo sbraccio teorico, la sezione in parola risulta soggetta a una forza normale eccentrica $P = 20 t$ con eccentricità $e = 9 m$.

Questa sollecitazione composta può notoriamente pensarsi ottenuta sovrapponendo l'azione della stessa forza normale P centrata e del momento

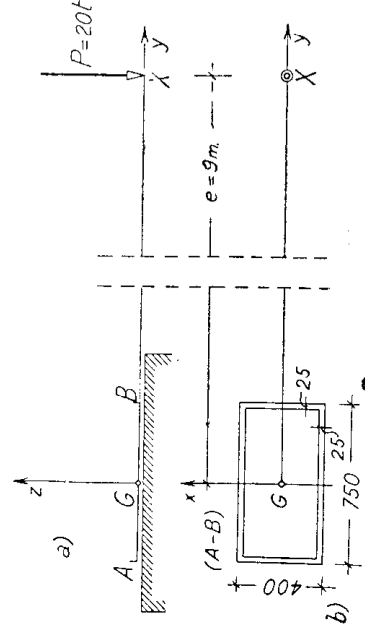


Fig. 37

flettente:

$$(59)$$

$$M = Pe$$

che nasce nel trasporto di P parallelamente a se stessa dal centro di sollecitazione X al baricentro G della sezione.

Supposto che il carico agisca nel piano medio della gru, contenente l'asse y (fig. 37 b)) la flessione risulta retta, cioè il momento flettente agisce intorno