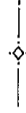


(Nel disegno originario erano per noi $n_1 = 4$, $n_2 = 3000$, $n_3 = 300$ e quindi: $1 \text{ cm} = 4 \times 300/3000 = 0,4 \text{ t/cm}^2$).

C - TORSIONE SEMPLICE

Esercizio 24 — Un albero di trasmissione con sezione a corona circolare di diametro esterno $d_e = 70 \text{ mm}$ e diametro interno $d_i = 30 \text{ mm}$, è soggetto a un momento torcente M_t . Determinare:

- a) il diametro d_0 della sezione circolare piena che è anche atta a realizzarlo a parità di tensione tangenziale massima;
- b) il momento torcente massimo che nei due casi l'albero è capace di trasmettere senza che la tensione tangenziale vi superi il valore $0,6 \text{ t/cm}^2$;
- c) l'angolo di torsione e la rotazione relativa di due sezioni distanti di 1 m per le due diverse forme della sezione, supposto che sia $G = 848 \text{ t/cm}^2$.



Il cilindro di S. Venant risulta sollecitato a *torsione semplice* quando le caratteristiche della sollecitazione non nulle sulla base libera si riducono a un momento torcente M_t , ch  allora (Es. 13) tale caratteristica si trasmette inalterata da sezione a sezione senza introdurne altre.

In queste condizioni, ferme restando le ipotesi di vincolo (Es. 13) alla base del cilindro e per una forma qualunque della sezione trasversale, la deformazione presenta le seguenti caratteristiche essenziali: le sezioni trasversali ruotano intorno a un punto O_1 , *centro di torsione*, che   lo stesso per tutte e generalmente distinto dal baricentro G ; i loro punti subiscono uno ad uno un diverso spostamento dal piano trasversale iniziale, m no che il baricentro il quale resta invece su tale piano; come conseguenza le sezioni non restano piane ma si ingobbano; l'ingobbamento   per  lo stesso per tutte.

Le fibre longitudinali, a eccezione di quella che   luogo dei centri di torsione —*asse di torsione*— si avvolgono secondo eliche cilindriche con lo stesso passo.

Tutta la deformazione (cioè la posizione del centro di torsione, l'ingobbamento delle sezioni trasversali e il passo delle eliche cilindriche) dipende essenzialmente dalla forma del contorno della sezione trasversale; compare infatti a individuare analiticamente gli elementi suddetti una funzione armonica $\psi(x, y)$ nel campo della sezione trasversale, la quale resta determinata attraverso i valori della sua derivata normale al contorno, e che pertanto è la stessa per contorni variabili con legge omotetica.

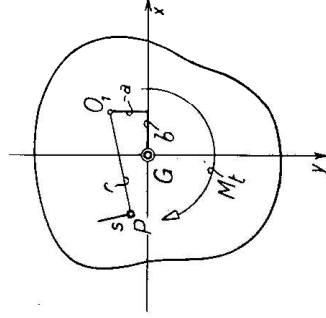


Fig. 28

Propriamente, le coordinate del centro O_1 di torsione, nel riferimento principale $G(x, y)$ valgono (fig. 28):

$$(44) \quad x = b = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_0; \quad y = -a = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_0;$$

L'angolo di torsione, cioè la rotazione relativa fra due sezioni poste a distanza unitaria, vale:

$$(45) \quad \vartheta = q \frac{M_t}{G J_p},$$

dove il coefficiente q , *fattore di torsione*, resta appunto definito attraverso la funzione ψ dalla relazione;

$$(46) \quad q = \frac{J_p}{J_p - \int_A \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} x - \frac{\partial \psi}{\partial x} y \right) dA},$$

nella quale J_p è il momento polare centrale di inerzia della sezione.

In particolare dalla (45) si deduce il passo p delle eliche in cui si avvolgono le fibre longitudinali:

$$(47) \quad p = \frac{2 \pi G J_p}{q M_t}.$$

Anche lo stato di tensione che nasce nel punto generico del solido — lo stesso per tutti i punti di una

stessa fibra longitudinale— dipende come la deformazione essenzialmente dalla forma del contorno della sezione trasversale cioè dalla funzione ψ , sia direttamente sia tramite il fattore di torsione.

In ogni caso però, un momento torcente M_t provoca nella sezione *unicamente* una *tensione tangenziale* τ_z ; tale tensione, sempre nel riferimento $G(x, y)$ (Es. 13), ammette nel punto corrente P generalmente due componenti τ_{zx} e τ_{zy} aventi le espressioni:

$$(48) \quad \tau_{zx} = -\frac{M_t}{J_p} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right); \quad \tau_{zy} = -\frac{M_t}{J_p} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right);$$

di solito queste componenti sono quindi diverse da zero in tutti i punti della sezione, baricentro e centro di torsione compresi.

Nel caso particolare in esame delle sezioni circolare e anulare, tutte le formule richiamate di sopra si semplificano, in quanto per tali sezioni risulta $\phi \equiv 0$ e conseguentemente $q=1$.

Centro di torsione diviene allora il baricentro G e, in conseguenza, l'asse di torsione diviene l'asse del solido; l'angolo di torsione e il passo delle eliche prendono le forme:

$$(45') \quad \phi = \frac{M_t}{G J_p}; \quad (47') \quad p = \frac{2 \pi G J_p}{M_t};$$

Le componenti della tensione tangenziale queste altre:

$$(48') \quad \tau_{zx} = -\frac{M_t}{J_p} y; \quad \tau_{zy} = -\frac{M_t}{J_p} x;$$

la tensione tangenziale risultante τ_z , detta r (fig. 29a) e b)) la distanza del punto corrente P dal baricentro, prende in conseguenza l'espressione altrettanto semplice:

$$(49) \quad \tau_z = \frac{M_t}{J_p} r,$$

e di più essa risulta diretta secondo la normale al raggio che passa per il punto P .

Il diagramma delle τ_z relative ai punti di un qualunque

diametro d , assunto il diametro stesso come fondamentale (fig. 29), risulta dunque *lineare* nella distanza r , e la massima tensione tangenziale si sviluppa nei punti del contorno; precisamente nel caso della sezione anulare per la quale $J_p = \pi (d_e^4 - d_i^4)/32$, è:

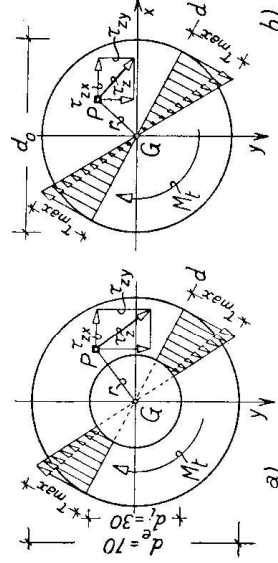


Fig. 29

$$(50) \quad \tau_{\max} = \frac{32 M_t}{\pi (d_e^4 - d_i^4)} \frac{d_e}{2} = \frac{16 M_t}{\pi d_e^3 \left[1 - \left(\frac{d_i}{d_e} \right)^4 \right]};$$

nel caso della sezione circolare piena, dettane d_0 il diametro sicchè $J_p = \pi d_0^4/32$, risulterebbe invece:

$$(51) \quad \tau_{\max} = \frac{32 M_t}{\pi d_0^4} \frac{d_0}{2} = \frac{16 M_t}{\pi d_0^3}.$$

La condizione dell'enunciato che, a parità di momento, questi due massimi risultino uguali, porta allora per d_0 alla relazione:

$$d_0^3 = d_e^3 \left[1 - \left(\frac{d_i}{d_e} \right)^4 \right], \quad \text{da cui: } d_0 = d_e \sqrt[3]{1 - \left(\frac{d_i}{d_e} \right)^4}.$$

Coi dati numerici si trova:

$$d_0 = 70 \sqrt[3]{1 - \left(\frac{3}{7} \right)^4} = 70 \sqrt[3]{1 - \frac{81}{2401}} = 69,2 \text{ mm}.$$

I due diametri, quello esterno d_e della sezione anulare e quello della sezione piena, risultano dunque praticamente coincidenti; per contro l'albero a sezione anulare presenta una sensibile economia in peso, giacchè il rapporto tra i pesi per unità di lunghezza —coincidente col rapporto fra le aree delle sezioni trasversali— risulta:

$$\frac{\pi (d_e^2 - d_i^2)}{\pi d_0^2} = \frac{4900 - 900}{4789} = \frac{4000}{4789} = 0,835;$$

l'economia in peso è dunque del 16,5%; la ragione sta nel fatto, ovvio, che nell'albero pieno il materiale che riempie il nucleo più addossato all'asse viene impegnato solo modestamente, sicchè asportarlo non implica una perdita sensibile di contributo nell'assorbimento del momento torcente.

Per determinare ora il massimo momento M_t che ognuno dei due alberi è capace di trasmettere senza che la tensione tangenziale vi superi il valore $0,6 \text{ t/cm}^2$, basta introdurre questo valore al primo membro di una qualunque delle due espressioni date di sopra per la $\tau_{\max}$; per es. in quanto più comoda, dalla (51) risulta:

$$\max M_t = \frac{\pi d_0^3}{16} \tau_{\max} = \frac{\pi \overline{6,92^3}}{16} \times 0,6 = 39,02 \text{ tcm} = 390,2 \text{ Kgm}.$$

L'angolo di torsione corrispondente a questo momento massimo vale poi dalla (45'):

per l'albero a sezione anulare:

$$\vartheta_a = \frac{32 \times 39,02}{848 \times 3,14 (7^4 - 3^4)} = 0,000202 \text{ Rad};$$

per l'albero a sezione piena invece:

$$\vartheta_p = \frac{32 \times 39,02}{848 \times 3,14 \times \overline{6,92^4}} = 0,000205 \text{ Rad}.$$

La rotazione relativa fra due sezioni poste a distanza di 100 cm è dunque rispettivamente ⁽¹⁾:

$$\vartheta_a = 100 \vartheta_a = 0,0202 \text{ Rad} = 1^\circ 9' 26'', 55;$$

$$\vartheta_p = 100 \vartheta_p = 0,0205 \text{ Rad} = 1^\circ 10' 28'', 43.$$

Esercizio 25 — Un asse cilindrico di acciaio con sezione retta circolare di diametro $d = 48 \text{ mm}$, è munito di due espansioni coassiali A e

⁽¹⁾ Per la riduzione dei radianti in gradi v. COLOMBO Tabella 10 — pag. 37, 71^a — 75^a Ed. 1944.

B aventi diametro $D = 3d = 144 \text{ mm}$, sulle quali viene investito a caldo un tubo pure di acciaio di spessore $\Delta = 5 \text{ mm}$. Prima che abbia luogo il raffreddamento del tubo, viene applicato all'asse un momento torcente $M_t = 6 \text{ ton}$. Supposto che il raffreddamento abbia, forzando, operata la perfetta solidarietà dei due pezzi, determinare in che misura risulta scaricato il tronco d'asse compreso fra le due espansioni allorchè viene rimosso il momento esterno M_t . Si calcolino anche le tensioni massime residue nell'asse e nel tubo.



Per l'ipotesi che nel raffreddamento si sia stabilita la perfetta solidarietà dei due pezzi, nel tratto AB , quando viene rimossa la coppia torcente applicata, non si ha globalmente perdita di momento; precisamente, all'atto della rimozione agisce sul tubo il momento $-M_t$, sviluppato dalle reazioni elastiche delle fibre deformate dell'asse nel tronco fra le due flangie. Si inizia allora, in senso inverso a quella provocata sull'albero, la deformazione del tubo investito e intanto, gradualmente, ritorna di altrettanto la deforma-

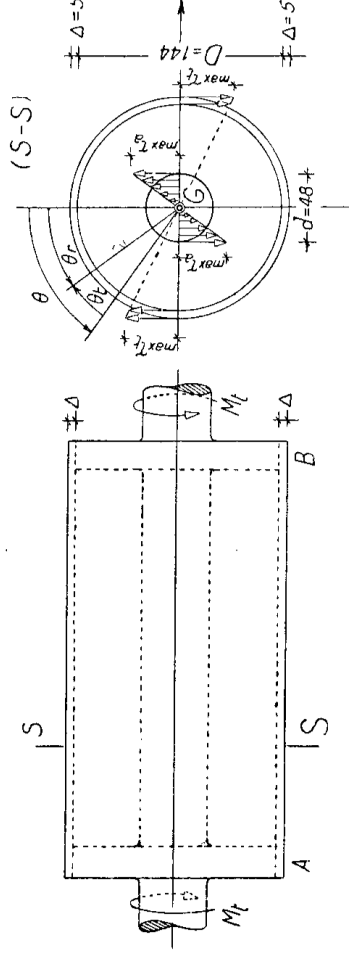


Fig. 30

zione dell'asse: il processo di deformazione e, con esso, quello di ritorno hanno termine quando le reazioni elastiche dei due pezzi si equilibrano, quando cioè il momento sviluppato come reazione elastica dalle fibre deformate del tubo equilibra il valore a cui nel frattempo si è ridotto sull'asse il momento M_t .

Detto M_t' questo valore, esso opera dunque in un senso sul tubo, nel senso opposto -quello stesso in cui a-

giva M_t — sull'asse, il quale risulta così scaricato della parte:

$$M''_t = M_t - M'_t .$$

Per determinare M'_t occorre rifarci a un elemento caratteristico del suddetto processo di deformazione, e cioè alla rotazione relativa di due sezioni poste a distanza qualunque, per es. unitaria (*angolo di torsione*).

Siano J_a , J_t rispettivamente il momento polare centrale di inerzia delle sezioni dell'asse e del tubo separatamente.

Il momento applicato M_t aveva provocato sull'albero l'angolo di torsione ($45'$):

$$\vartheta = \frac{M_t}{G J_a} ;$$

il momento residuo M'_t conserva invece a tale angolo il valore:

$$\vartheta_r = \frac{M'_t}{G J_a} ;$$

per contro il momento opposto $-M'_t$ ha destato nel tubo l'angolo:

$$\vartheta_t = - \frac{M'_t}{G J_t} .$$

Traducendo in formula quanto si è detto di sopra, e con riguardo ai segni (fig. 30 b)), deve risultare manifestamente:

$$\vartheta = \vartheta_r - \vartheta_t ,$$

cioè sostituendo e supposto per i due pezzi lo stesso acciaio:

$$\frac{M_t}{J_a} = \frac{M'_t}{J_a} + \frac{M'_t}{J_t} ;$$

questa fornisce per M'_t la soluzione:

$$M'_t = \frac{J_t}{J_a + J_t} M_t = \frac{J_t}{J_p} M_t ,$$

nella quale si è indicato con $J_p = J_a + J_t$ il momento po-

lare centrale di inerzia della sezione complessiva del tubo e dell'albero.

Poichè è numericamente:

$$J_a = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32} \times 4,8^4 = \frac{3,14 \times 530,48}{32} = 52 \text{ cm}^4 ;$$

$$J_t = \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{D}{2} + \Delta \right)^4 - \left(\frac{D}{2} \right)^4 \right] = \frac{\pi}{2} (7,7^4 - 7,2^4) \cong 1300 \text{ cm}^4 ,$$

e quindi:

$$J_p = J_a + J_t = 1352 \text{ cm}^4 ,$$

risulta:

$$M'_t = \frac{1300}{1352} \times 6 = 5,77 \text{ tom} .$$

L'asse è stato dunque scaricato del momento:

$$M''_t = M_t - M'_t = 6 - 5,77 = 0,23 \text{ tom} .$$

Le tensioni massime residue nelle sezioni trasversali dei due pezzi valgono poi, per le (51) e (50):

$$\max \tau_a = \frac{M'_t}{J_a} \frac{d}{2} = \frac{5,77 \times 2,4}{52} = 0,266 \text{ t/cm}^2 ;$$

$$\max \tau_t = - \frac{M'_t}{J_t} \left(\frac{D}{2} + \Delta \right) = - \frac{5,77 \times 7,7}{1300} = - 0,034 \text{ t/cm}^2 .$$

Esercizio 26 — Un albero cavo a sezione anulare con diametro esterno doppio di quello interno, è destinato a trasmettere una potenza $\mathcal{P} = 16600 \text{ HP}$ a 60 giri al minuto.

Determinare la minima sezione resistente dell'albero e il corrispondente angolo di torsione data la massima tensione ammissibile $\tau_a = 0,4 \text{ t/cm}^2$.

—♦—

Essendo notoriamente il cavallo-vapore (HP) la potenza di un motore che sviluppa 75 Kgm al secondo, e-

spresa in tm/sec la potenza $\mathcal{P}$ che l'albero è destinato a trasmettere vale:

$$\mathcal{P} = \frac{16600 \times 75}{1000} = 1245 \text{ tm/sec}.$$

Per trasmettere tale potenza, l'albero deve avere una sezione atta ad assorbire, nei limiti ammessi per la tensione, il momento torcente M_t che lo sollecita, cioè il momento della coppia premessa a creare o a sfruttare la potenza stessa; ora questo momento, giacchè l'albero ruota al secondo dell'angolo $\alpha = 2\pi n/60 = 2\pi \times 60/60 = 2\pi$, è legata alla potenza dalla relazione:

$$(52) \quad \mathcal{P} = \alpha M_t,$$

esprimente, notoriamente, il lavoro relativo a una coppia e a una data rotazione come prodotto di questa per il momento della coppia.

È dunque coi dati numerici:

$$M_t = \frac{\mathcal{P}}{\alpha} = \frac{1245}{2\pi} \cong 198,24 \text{ tm}.$$

Tale momento, se d è il diametro interno dell'albero e quindi, per l'ipotesi dell'enunciato, anche il suo raggio esterno (fig. 31), desta nella sezione tra-

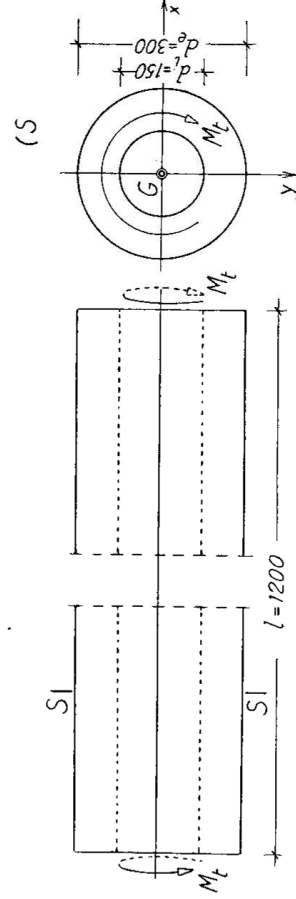


Fig. 31

sversale, in virtù della (49), la tensione tangenziale massima:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_p} d,$$

con:

$$J_p = 2\pi \int_0^d r^3 dr = \frac{15}{32} d^4 = 1,47 d^4.$$

Sostituendo e imponendo alla $t_{\max}$ di non superare il valore assoluto $0,4 \text{ t/cm}^2$, se ne ricava per d la limitazione:

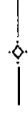
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{19824}{1,47 \times 0,4}} \cong 15 \text{ cm} .$$

Assegnato al diametro interno dell'albero questo valore minimo, il corrispondente angolo di torsione ϑ si ha direttamente dalla (45') assumendovi per es., supposto trattarsi di acciaio ordinario, $G = 848 \text{ t/cm}^2$; coi numeri:

$$\vartheta = \frac{19824}{1,47 \times 15^4 \times 848} \cong 0,000314 \text{ Rad} = 1' 4'',76 .$$

Esercizio 27 — Un asse motore lungo 12 m trasmette una potenza di 2500 HP a 80 giri al minuto; il suo diametro interno è $d_i = 15 \text{ cm}$, quello esterno $d_e = 30 \text{ cm}$.

Posto che nel funzionamento il massimo momento torcente sia $1,19$ volte quello minimo, determinare la massima tensione tangenziale e la massima rotazione relativa che subiscono le sezioni estreme dell'asse.



Come visto all'Esercizio precedente, il momento torcente M_t che sollecita un albero destinato a trasmettere la potenza $\mathcal{P}$ varrebbe $\mathcal{P}/\alpha$; e quindi coi nostri dati

$$M_t = \frac{2500 \times 75}{1000} \frac{60}{2\pi \times 80} = 22,39 \text{ tm} .$$

Ma nello stabilire questa relazione non si tien conto dell'effettivo stato di cose: per l'attrito negli organi di trasmissione, l'albero è infatti soggetto, per la stessa potenza, a un momento torcente maggiore; momento che, d'altronde, è diverso secondochè si è all'avviamento —avendo in tale istante gran peso l'inerzia delle masse rotanti e l'attrito di primo distacco— oppure nel periodo di funzionamento stabile. Il valore teorico di sopra corrisponde pertanto a un mi-

nimo di M_t , quello all'avviamento invece a un massimo; è da assumersi poi un valore a questi intermedio per il periodo di funzionamento stabile.

Secondo l'ipotesi fatta è:

$$\mathcal{P} \quad \max M_t = 1,19 \frac{\alpha}{\alpha} = 1,19 \times 2\,239 = 2\,666 \text{ tcm}.$$

La tensione tangenziale massima cui l'albero è soggetto vale allora per la (50):

$$\tau_{\max} = 32 \frac{\max M_t}{\pi (d_e^4 - d_i^4)} \frac{d_e}{2} = \frac{32 \times 2\,666 \times 15}{\pi (30^4 - 15^4)} \cong 0,54 \text{ t/cm}^2,$$

e la massima rotazione relativa delle sue sezioni estreme (fig. 31) assumendo ancora $G = 848 \text{ t/cm}^2$:

$$\vartheta_l = \frac{\max M_t}{G J_p} l = \frac{32 \times 2\,666 \times 1200}{848 \times \pi (30^4 - 15^4)} = 0,05\,094 \text{ Rad} = 2^\circ 55' 7'', 13.$$

D - TAGLIO SEMPLICE

Esercizio 28 — La sezione a T di un solido prismatico con le dimensioni 100×22 ; 75×80 , è soggetta a una forza di taglio $T_y = 35 \text{ t}$ agente secondo l'asse di simmetria y della costola. Costruire il diagramma delle tensioni tangenziali.



La sollecitazione di taglio puro può aversi solo in una sezione isolata del solido di S. Venant, come ad es. sulla base libera quando le caratteristiche vi si riducono unicamente a una forza tagliente T_x^* o T_y^* — ovvero a una T^* agente secondo un asse qualunque — o in un'altra sezione del cilindro quando le caratteristiche sulla base libera si riducono ad es. a una forza T_y^* e ad un momento flettente M_x^* , di segno opposto a quello che la T_y^* desta lungo il solido e di valore assoluto inferiore a quello massimo di tale momento; la sezione all'ascissa z (fig. 32) alla quale, secondo la 4ª delle (31), è: