

l'allungamento per unità di lunghezza che essa produce nel bullone;

$$\Delta'_2 = - \frac{N}{E_2 A_2},$$

l'accorciamento, ancora per unità di lunghezza, che produce invece nel manicotto.

Per quanto detto sopra, la condizione che determina questa forza incognita è:

$$\Delta_1 + \Delta'_1 = \Delta_2 + \Delta'_2.$$

Sostituendo e risolvendo per  $N$ , con riguardo di seguito ai dati numerici, risulta:

$$N = \frac{(\Delta_2 - \Delta_1) E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} = \frac{10^{-2} \times (198 - 150) \times 21 \times 6 \times 12 \times 20,6}{10^3 \times (21 \times 6 + 12 \times 20,6)} = \sim 0,4 \text{ t.}$$

Questa forza genera nella sezione del cilindro di acciaio la tensione positiva:

$$\sigma' = \frac{N}{A_1} = \frac{0,4}{6} = 66, (6) \text{ Kg/cm}^2;$$

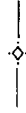
nella sezione del pezzo di rame invece la tensione negativa:

$$\sigma'' = - \frac{N}{A_2} = - \frac{0,4}{20,6} \cong - 19,4 \text{ Kg/cm}^2.$$

## B - FLESSIONE SEMPLICE

**Esercizio 21** — Determinare il minimo NPI capace di reggere al momento flettente  $M_x = 500 \text{ tcm}$  senza che la tensione vi superi il valore ammissibile  $k = 1,4 \text{ t/cm}^2$ .

Calcolare il raggio di curvatura e la freccia del solido avente per sezione il NP I così determinato e lunghezza  $l = 2,5 \text{ m}$ , nell'ipotesi che sia citato dal detto momento  $M_x$  e vincolato al modo di S. Venant; si assuma  $E = 2100 \text{ t/cm}^2$ .



Il solido di S. Venant risulta sollecitato a *flessione semplice* quando le caratteristiche della sollecitazione

non nulle relative alla base libera si riducono unicamente a un momento flettente (Es. 13). La coppia relativa può agire in un qualunque piano per l'asse del solido: *piano di sollecitazione*; se la traccia  $s$  di questo piano sulla sezione trasversale, *asse di sollecitazione*, è uno degli assi principali centrali d'inerzia  $x$  od  $y$  della sezione stessa (fig. 23) si ha *flessione retta*; se è invece un diametro qualunque dell'ellisse centrale si ha *flessione deviata*. Nell'uno o nell'altro caso però, tanto la deformazione quanto la distribuzione delle tensioni nella sezione trasversale, sono regolate formalmente dalle stesse leggi.

Così per la deformazione, le caratteristiche fondamentali sono in ogni caso le seguenti: le sezioni trasversali restano piane, ruotando ciascuna intorno a un asse baricentrico  $n$ , peraltro lo stesso da sezione a sezione, il quale, non subendo per parte sua alcuna variazione di lunghezza, viene detto *asse neutro*; tale asse è, *in ogni caso*, il coniugato dell'asse di sollecitazione rispetto all'ellisse centrale di inerzia della sezione. Le fibre longitudinali si trasformano in archi di circolo; in particolare la fibra media o *asse del solido*, si dispone secondo la *linea elastica*; il piano di questa linea, *piano di flessione*, e conseguentemente la sua traccia  $r$  sul piano della sezione trasversale, *asse di flessione*, risultano in ogni caso normali all'asse neutro; se allora quest'ultimo e l'asse di sollecitazione risultano ortogonali, sono cioè gli assi principali centrali di inerzia della sezione, il piano di flessione coincide col piano di sollecitazione ovvero coincidono le loro tracce sul piano trasversale: è il caso della flessione retta; se invece, come avverrà più di solito, l'asse di sollecitazione e l'asse neutro non risultano ortogonali, sono cioè una coppia qualunque di diametri coniugati, il piano di fles-

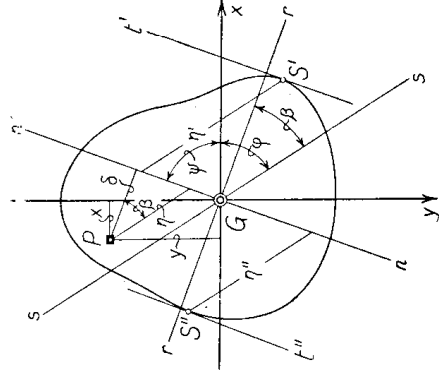


Fig. 23

temente la sua traccia  $r$  sul piano della sezione trasversale, *asse di flessione*, risultano in ogni caso normali all'asse neutro; se allora quest'ultimo e l'asse di sollecitazione risultano ortogonali, sono cioè gli assi principali centrali di inerzia della sezione, il piano di flessione coincide col piano di sollecitazione ovvero coincidono le loro tracce sul piano trasversale: è il caso della flessione retta; se invece, come avverrà più di solito, l'asse di sollecitazione e l'asse neutro non risultano ortogonali, sono cioè una coppia qualunque di diametri coniugati, il piano di fles-

sione non coincide col piano di sollecitazione: la linea elastica si dispone in un piano distinto da quello della coppia agente; è il caso della *flessione deviata*, e la *deviazione* è misurata dall'angolo  $\beta$  di cui il piano di flessione risulta ruotato su quello di sollecitazione.

Ciò che importa notare, insistiamo, è che la deformazione è regolata comunque da questa legge proiettiva invariabile: *asse di sollecitazione e asse neutro sono due diametri coniugati dell'ellisse centrale d'inerzia della sezione trasversale* e che il deviare o meno del piano della linea elastica dal piano della coppia esterna è una pura conseguenza geometrica dell'essere tali due assi una coppia qualunque di diametri coniugati ovvero gli assi dell'ellisse, cioè quella particolare coppia di diametri coniugati che risultano ortogonali.

Anche per quanto riguarda la distribuzione delle tensioni nella sezione trasversale, la legge formale è pure la stessa tanto nel caso di flessione retta che di flessione deviata.

Il momento flettente  $M$ , agisca esso o meno intorno a un asse principale, desta *comunque* nel punto corrente  $P$  della sezione trasversale una *tensione normale*  $\sigma_z$ , e questa soltanto, fornita dalla relazione:

$$(36) \quad \sigma_z = \frac{M}{J_n} \eta ,$$

nella quale  $J_n$  è il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro  $n$  con le distanze valutate parallelamente all'asse  $s$  di sollecitazione;  $\eta$  è, in questa stessa direzione (fig. 23), la distanza del punto  $P$  dall'asse neutro.

Nel caso particolare che l'asse di sollecitazione sia un asse principale, ad es.  $y$  — e quindi  $x$  l'asse neutro (o viceversa) — la (36) diviene:

$$(37) \quad \sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \quad (\sigma_z = \frac{M_y}{J_y} x) ,$$

nota sotto il nome di *formula di Navier*; la (36) viene invece detta *formula di Navier generalizzata*.

Secondo la (36) o la (37), la tensione normale nella sezione trasversale varia dunque linearmente con la distanza  $\eta$  del punto  $P$  dall'asse neutro; in particolare nei punti di quest'asse è  $\sigma_z = 0$ ; i valori algebricamente massimo e minimo di  $\sigma_z$  si hanno poi nei punti aventi maggior distanza dall'asse neutro, cioè nei punti di contatto delle tangenti estreme al contorno parallele a quest'asse.

Qualunque sia il tipo di flessione, in tutti i punti della sezione trasversale generica, e quindi del solido, alla stregua di quanto avveniva per la sollecitazione di forza normale semplice (Es. 14) si ha uno stato di tensione *monoassiale*, l'elemento della sezione trasversale per il punto essendo ancora l'elemento principale non neutro. Unica differenza col caso di allora è che questo stato non si conserva quantitativamente da punto a punto, restando in tal senso lo stesso solo nei punti di una stessa corda parallela all'asse neutro.

In luogo della (36), nel caso di flessione deviata, potremmo anche impiegare per il calcolo di  $\sigma_z$ , e talvolta anzi con notevole economia di tempo, una formula binomia, riguardando la  $\sigma_z$  stessa come sovrapposizione algebrica delle tensioni destinate nello stesso punto  $P$  dai due momenti  $M_x$  e  $M_y$  componenti di  $M$  intorno agli assi  $x$  ed  $y$ ; cioè:

$$(38) \quad \sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x ,$$

dove  $x$  ed  $y$  sono le coordinate ortogonali di  $P$ ; in breve, riguardando la sollecitazione di flessione deviata come sovrapposizione di due flessioni rette.

Nel caso dell'enunciato si tratta di flessione retta; asse di sollecitazione è l'asse  $y$ ; poichè il momento  $M_x$  assegnato è positivo, i punti che sopportano la massima tensione sono tutti quelli del bordo inferiore  $a$  (fig. 24b); per la simmetria della sezione a  $\bar{I}$  rispetto ad  $x$ , una tensione di ugual valore assoluto ma di segno opposto sopportano i punti del bordo superiore

$\alpha'$ ; il minimo numero di NPI da adottare, sarà allora quello per cui il valore comune di queste due tensioni

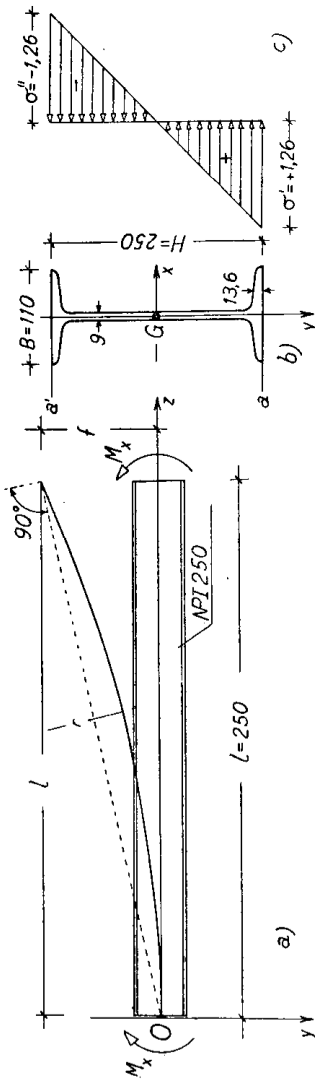


Fig. 24

estreme non supera  $k = 1,4 \text{ t/cm}^2$ ; dovrà cioè essere per la (37), detta  $H$  l'altezza del profilato:

$$\sigma' = |\sigma''| = \frac{M_x}{J_x} \frac{H}{2} \ll k,$$

o anche, introducendo il modulo di resistenza del profilato rispetto all'asse  $x$ :  $W_x = 2 J_x/H$ :

$$\frac{M_x}{W_x} \ll k,$$

da cui, e sostituendo di seguito i numeri:

$$W_x \geq \frac{M_x}{k} = \frac{500}{1,4} = 357 \text{ cm}^3.$$

Dal Manuale (cfr. ad es. il COLOMBO pag. 586 Ediz. 1944) risulta che il primo NPI il cui modulo  $W_x$  non è inferiore a questo valore è il 250, le cui caratteristiche geometriche riportiamo qui sotto:

NPI	H mm	B mm	S cm <sup>2</sup>	$J_x$ cm <sup>4</sup>	$W_x$ cm <sup>3</sup>	$\rho_x$ cm	$J_y$ cm <sup>4</sup>	$W_y$ cm <sup>3</sup>	$\rho_y$ cm
250	250	110	49,7	4958	397	9,99	225	46,4	2,27

Il n° immediatamente inferiore disponibile in commercio, cioè il NPI 240, presenta un modulo di resistenza  $W_x = 353 \text{ cm}^3$ , leggermente in difetto; la diffe-

renza di soli 4 cm<sup>3</sup> autorizzerebbe in pratica alla scelta di questo n° anzichè del 250, con una sensibile economia in peso da 36,2 a 31 Kg/m; la tensione massima risulterebbe:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\sigma}}{W_{\sigma}} = \frac{500}{353} = 1,42 \text{ t/cm}^2,$$

praticamente coincidente con quella che abbiamo supposto ammissibile. Per restare aderenti rigorosamente al problema, noi adotteremo però il NPI 250.

In figura 24c) abbiamo costruito il diagramma delle tensioni che genera nella sua sezione il momento  $M_{\sigma}$  assennato: il massimo valore assoluto di  $\sigma_z$  risulta soltanto di 1,26 t/cm<sup>2</sup> sensibilmente inferiore a quello ammissibile.

Supposto ora di assoggettare al momento  $M_{\sigma}$  un tronco di lunghezza  $l = 2,5$  m di questo profilato, vincolato al modo di S. Venant, la sua linea elastica risulta l'arco di circolo di lunghezza  $l$  e raggio di curvatura:

$$(39) \quad r = \frac{EJ_{\sigma}}{M_{\sigma}}.$$

Sostituendo i valori numerici si ha:

$$r = \frac{2100 \times 4958}{500} = 4,02 \times 4958 = 19931 \text{ cm}.$$

La freccia  $f$ , cioè lo spostamento verticale dello estremo libero dell'asse del profilato, può ora calcolarsi elementarmente dalla evidente proporzione:

$$f : l = l : (2r - f),$$

che, trascurandovi, com'è lecito, il quadrato di  $f$ , fornisce:

$$(41) \quad f \cong \frac{l^2}{2r}$$

e in funzione del momento:

$$(41') \quad f = \frac{M_{\sigma} l^2}{EJ_{\sigma}};$$

coi numeri:

$$f = \frac{250^2}{2 \times 19931} = \frac{62500}{2 \times 19931} = \frac{31250}{19931} \cong 1,568 \text{ cm.}$$

In fig. 24 a) abbiamo rappresentato, in misura quanto mai esagerata, la linea elastica con la relativa freccia.

**Esercizio 22** — Confrontare i valori del momento flettente capace di destare nel NPI 250 determinato all'Esercizio precedente la tensione massima  $k = 1,2 \text{ t/cm}^2$  agendo rispettivamente con asse di sollecitazione  $x$ , ovvero  $y$ , ovvero la diagonale  $d$  del rettangolo circoscritto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione; si determini anche il momento  $M_x$  cui corrisponde sulla lunghezza  $l = 2,5 \text{ m}$  la freccia  $f = 1/500$ .

Se l'asse di sollecitazione è  $x$  o  $y$ , la flessione è retta; la formula per il calcolo di  $\sigma_z$  è dunque la (37) o l'analoga (scritta a destra in parentesi) che da essa si ottiene scambiandovi i simboli  $x$  ed  $y$  fra loro; fattovi  $\sigma_z = k$ , poichè per il NPI 250 è (cfr. Es. 21)  $W_x = 397$  e  $W_y = 46,4 \text{ cm}^3$ , risulta direttamente nei due primi casi:

$$M_x = kW_x = 1,2 \times 397 = 476,4 \text{ tm; } M_y = kW_y = 1,2 \times 46,4 = 55,68 \text{ tm.}$$

Se l'asse di sollecitazione è invece (fig. 25) la diagonale  $d$  del rettangolo circoscritto all'ellisse d'inerzia —avente cioè per dimensioni  $2\rho_y$  e  $2\rho_x$ — il diametro coniugato e quindi anche (Es. 21) l'asse neutro  $n$ , è notoriamente l'altra diagonale  $d'$ . Detti  $\varphi$  e  $\psi = -\varphi$  gli angoli di questi due assi con l'asse  $x$ ,  $\beta$  la deviazione (Es. 21):

$$(42) \quad \beta = \varphi + |\psi| - \pi/2 = 2\varphi - \pi/2,$$

nella (36) si possono anche introdurre, per maggiore comodità di calcolo, le distanze  $\delta$  ortogonali in luogo delle distanze  $\eta$  in direzione coniugata.

Se infatti è  $J_n$  il momento d'inerzia normale della

sezione rispetto ad  $n$  e  $\delta$  la distanza ortogonale del punto corrente da quest'asse, risulta:

$$\eta = \delta : \cos \beta ; \quad J_n = J'_n : \cos^2 \beta$$

e quindi, sostituendo nella (36), anche:

$$(43) \quad \sigma_z = \frac{M_d'}{J'_n} \delta \cos \beta .$$

Ora l'equazione dell'asse neutro nel riferimento  $G(x, y)$ , in quanto tale asse passa per l'origine e contiene il punto  $P$  di coordinate  $(\rho_y, \rho_x)$ , è:

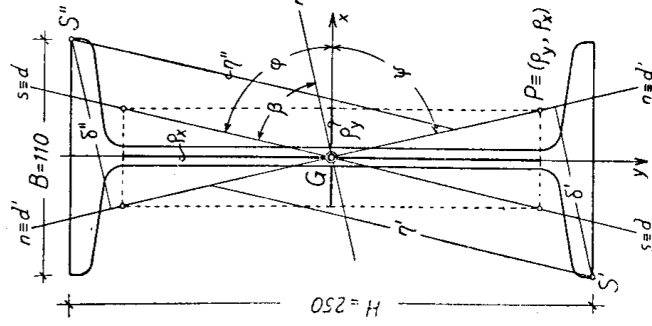


Fig. 25

$$\rho_x x - \rho_y y = 0 ;$$

i punti da esso più distanti nella direzione dell'asse di sollecitazione sono poi quello  $S'$  di coordinate  $(-B/2, +H/2)$  e il suo simmetrico  $S''$  rispetto a  $G$ ; quindi i punti di comune distanza assoluta ortogonale:

$$\delta' \equiv \delta'' = \frac{1}{2} \frac{(B\rho_x + H\rho_y)}{\sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}} ;$$

d'altra parte, come noto dalla geometria delle masse <sup>(1)</sup>, il momento di inerzia normale della sezione rispetto ad  $n$ , essendo  $|\psi| = \varphi$ , vale:

$$J'_n = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi ,$$

e quindi, poichè, come è facile riconoscere dalla figura, è:

$$\cos \varphi = \frac{\rho_y}{\sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}} ; \quad \sin \varphi = \frac{\rho_x}{\sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}} ,$$

anche:

$$J'_n = J_x \frac{\rho_y^2}{\rho_x^2 + \rho_y^2} + J_y \frac{\rho_x^2}{\rho_x^2 + \rho_y^2} = 2A \frac{\rho_x^2 \rho_y^2}{\rho_x^2 + \rho_y^2} ;$$

<sup>(1)</sup> Cfr. MAGINI l.c. n. 77 ÷ 80.



finalmente, per la (42) e di seguito per le espressioni ora date di  $\sin\varphi$  e  $\cos\varphi$ , è:

$$\cos\beta = \sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi = \frac{2 \rho_x \rho_y}{\rho_x^2 + \rho_y^2};$$

sostituendo allora nella (43)  $\delta'$  a  $\delta$  e le espressioni ora trovate di  $J'_n$  e  $\cos\beta$ , ponendovi di più  $\sigma_x = k$  e risolvendo per  $M_{d'}$  si ricava in definitiva:

$$M_{d'} = \frac{2 A \rho_x \rho_y \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}}{B \rho_x + H \rho_y} k;$$

coi dati numerici di cui al quadro dell'Esercizio 21:

$$M_{d'} = \frac{2 \times 49,7 \times 9,99 \times 2,27 \sqrt{9,99^2 + 2,27^2}}{11 \times 9,99 + 25 \times 2,27} \times 1,2 = 166,29 \text{ tcm}.$$

I valori dei momenti così determinati stanno nei seguenti rapporti:

$$M_y : M_x \cong 0,117; \quad M_{d'} : M_x = 0,349; \quad M_y : M_{d'} = 0,335.$$

Nei confronti del massimo momento, che è quello  $M_x$ , la sezione è dunque capace di assorbire, a parità di tensione ammissibile, intorno agli assi  $y$  e  $d'$  soltanto l'11,7 e rispettivamente il 34,9%; il momento intorno al primo di questi due assi è d'altra parte il 33,5% dell'altro.

Si noti che mentre la deviazione è nulla per gli assi  $x$  ed  $y$ , all'asse  $d$  (o al suo simmetrico  $d'$ ) corrisponde il massimo valore di  $\beta$ .

Per determinare ora quale momento  $M_x$  è capace di indurre in un solido di lunghezza  $l = 2,5$  m realizzato col nostro NPI 250 una freccia  $f = l/500$ , basta rifarci alla (41') dalla quale, assumendovi  $E = 2100$  t/cm<sup>2</sup>, risulta successivamente:

$$M_x = \frac{E J_x f}{l^2} = \frac{2100 \times 4958}{500 \times 250} = \frac{104118}{1250} = 83,3 \text{ tcm},$$

momento che desta nella sezione una tensione massima al di sotto di 1/5 di quella  $k$  ammissibile.

**Esercizio 23** — La sezione di un NP I 500 è rinforzata da una piattabanda con le dimensioni  $\delta = 23 \text{ mm}$  e  $\lambda = 324 \text{ mm}$ , applicata simmetricamente alla tavola inferiore del profilato. Si domandano:

- a) i valori max e min che può raggiungere un momento flettente che agisce con asse di sollecitazione  $s$  formante l'angolo  $\varphi = 60^\circ$  con l'asse  $x$  della sezione, senza che la tensione vi superi il valore  $k = 1,4 \text{ t/cm}^2$ ;  
 b) il diagramma delle tensioni relativo al suddetto momento massimo ammissibile.

—◇—

Non coincidendo l'asse di sollecitazione con un asse principale di inerzia della sezione, si tratta (Es. 21) di flessione deviata.

È necessario anzitutto determinare la posizione del baricentro  $G$  della sezione; a tanto, poichè  $y$  (fig. 26) è asse di simmetria per la figura, basta determinare l'ordinata  $y_G$  in un riferimento qualunque, per es. sull'orizzontale  $x_2$  baricentrica della piattabanda. Rispetto a tale orizzontale, il teorema di Varignon si traduce nella relazione:

$$A_1 \left( \frac{H}{2} + \frac{\delta}{2} \right) = y_G (A_1 + A_2),$$

dove  $A_1 = 179 \text{ cm}^2$  (cfr. il Manuale l. c. pag. 586) e  $A_2 = 2,3 \times 32,4 = 74,52 \text{ cm}^2$  indicano le aree del profilo e della piattabanda.

Da qui, e sostituendo successivamente i dati, si ricava:

$$y_G = \frac{1}{2} \frac{A_1(H + \delta)}{A_1 + A_2} = \frac{1}{2} \frac{179(50 + 2,3)}{179 + 74,52} = 18,46 \text{ cm}.$$

Fissato per  $G$  l'asse  $s$  di sollecitazione, l'asse neutro  $n$ , in virtù del teorema fondamentale sulla flessione (Es. 21), resta determinato dall'equazione dei diametri coniugati:

$$\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = - \frac{J_x}{J_y},$$

essendo  $J_x$  e  $J_y$  i momenti principali centrali di inerzia della sezione. Il primo di questi momenti, per il teorema di trasposizione, può scriversi:

$$J_w = J_{x_1} + A_1 d_1^2 + J_{x_2} + A_2 d_2^2,$$

dove è  $d_1 = (H + \delta)/2 - y_G = (50 + 2,3)/2 - 18,46 = 7,75$  cm e  $d_2 \equiv y_G = 18,46$  cm; sostituendo risulta:

$$J_w = 68650 + 179 \times 7,75^2 + \frac{1}{12} \times 32,4 \times 2,3^3 + 74,52 \times 18,46^2 \cong 104\,820 \text{ cm}^4.$$

il secondo invece, più direttamente:

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = 2474 + \frac{1}{12} 2,3 \times 32,4^3 \cong 8990 \text{ cm}^4.$$

È allora:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{J_w}{J_y \operatorname{tg} 60^\circ} = - \frac{104\,820}{8990 \times 1,73205} = - \frac{104\,820}{15571,13} = - 6,73168$$

al quale valore corrisponde l'angolo:

$$\psi = 81^\circ 33',$$

che consente di fissare la posizione dell'asse neutro  $n$ .

Anzichè per questa via, può fissarsi  $n$  mediante la seguente costruzione grafica (fig. 26 b); riportati sull'asse  $y$  in  $\overline{GA}$  e  $\overline{AB}$  —scala arbitraria—  $J_x$  e  $J_y$ , le normali per  $A$  e  $B$  rispettivamente a —gli assi  $y$  ed  $s$  si incontrano in un punto  $N$  dell'asse neutro: è immediato darne giustificazione.

Noto  $\psi$ , la deviazione  $\beta$  (Es. 21) vale secondo la (42):

$$\begin{aligned} \beta &= \varphi + |\psi| - 90^\circ = \\ &= 141^\circ 33' - 90^\circ = 51^\circ 33'. \end{aligned}$$

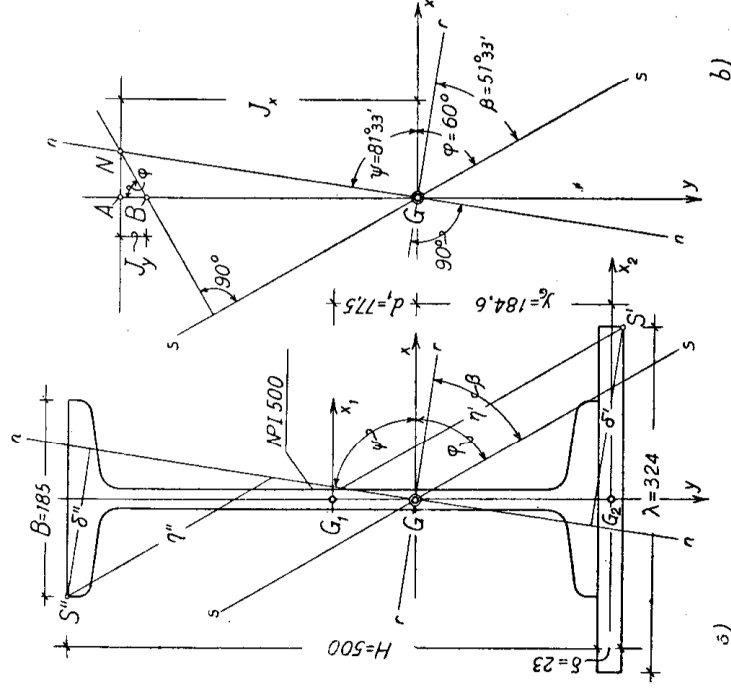


Fig. 26

Ciò posto, la tensione che un momento  $M$  agente nel piano assegnato desta nel punto della sezione distan-

te  $\eta$  dall'asse neutro nella direzione coniugata, può valutarsi comodamente con la formula di Navier generalizzata (36) che qui riportiamo nella forma (43) con la distanza  $\delta$  e il momento d'inerzia  $J'_n$  valutati ortogonalmente:

$$\sigma_z = \frac{M}{J'_n} \delta \cos \beta .$$

Ivi, come già richiamammo all'Esercizio 22, è:

$$J'_n = J_x \cos^2 \psi + J_y \sin^2 \psi ;$$

cioè, essendo  $\cos \psi = 0,14695$  e  $\sin \psi = 0,98915$ :

$$J'_n = 104820 \times 0,14695^2 + 8990 \times 0,98915^2 = 2263 + 8796 = 11059 \text{ cm}^4 .$$

I valori estremi della tensione  $\sigma_z$  si hanno d'altra parte nei punti della sezione più distanti dall'asse neutro; come si riconosce anche dalla fig. 26 a), tali punti sono il vertice esterno destro  $S'$  della piaattabanda e il vertice superiore sinistro  $S''$  del NPI 500, punti di coordinate rispettivamente:

$$S' \equiv (x', y') \equiv \left[ \frac{\lambda}{2}, \quad y_G + \frac{\delta}{2} \right] \equiv \left[ +16,2; +19,61 \right] \text{ cm} ;$$

$$S'' \equiv (x'', y'') \equiv \left[ -\frac{B}{2}; -\left(\frac{H}{2} + d_1\right) \right] \equiv \left[ -9,25; -32,75 \right] \text{ cm} .$$

Dall'asse neutro, di equazione normale:

$$x \sin \psi + y \cos \psi = 0 ,$$

tali punti hanno allora ortogonalmente le distanze assolute rispettive:

$$\delta' = x' \sin \psi + y' \cos \psi = 16,2 \times 0,98915 + 19,61 \times 0,14695 \cong 18,9 \text{ cm} ;$$

$$\delta'' = x'' \sin \psi + y'' \cos \psi = 9,25 \times 0,98915 + 32,75 \times 0,14695 = 13,96 \text{ cm} ;$$

fra i due punti, a decidere del massimo e del minimo momento ammissibili in relazione al valore raggiungi-

bile  $k$  della tensione, è dunque  $S'$ ; supposto in un primo tempo che  $M$  desti tensione positiva in  $S'$ , il massimo valore che tale momento può assumere risulta dall'espressione su scritta di  $\sigma_z$  in cui è da porre  $\cos\beta = 0,62183$ ; dunque:

$$\max M = \frac{k J''_n}{\delta' \cos\beta} = \frac{1,4 \times 11059}{18,9 \times 0,62183} = \frac{15482,6}{11,752587} \cong 1317 \text{ tcm} .$$

Nell'ipotesi che  $M$  desti invece compressione in  $S'$ , si ha poi evidentemente lo stesso valore assoluto per  $M_{\min}$  ma segno opposto; si conclude che rispetto all'asse di sollecitazione assegnato è:

$$M_{\max} = + 1317 \text{ tcm} ; \quad M_{\min} = - 1317 \text{ tcm} ,$$

e il valore assoluto comune rappresenta anche il massimo ammissibile con riguardo al valore  $k$  della tensione.

Supposto ora agire sulla sezione un tale momento, si è costruito in fig. 27 il diagramma delle tensioni col metodo di Land; riportato su  $x$  in  $\overline{GA}$  il rapporto:

$$J_y : \cos\psi = 8990 : 0,5 = 18980 \text{ cm}^4 ,$$

e parallelamente ad  $n$  in  $\overline{AB}$  il momento  $M_{\max} = 1317 \text{ tcm}$ , la retta baricentrica  $GB$  limita coll'asse  $x$  il diagramma cercato, ove se ne leggano le ordinate nella direzione di  $n$ .

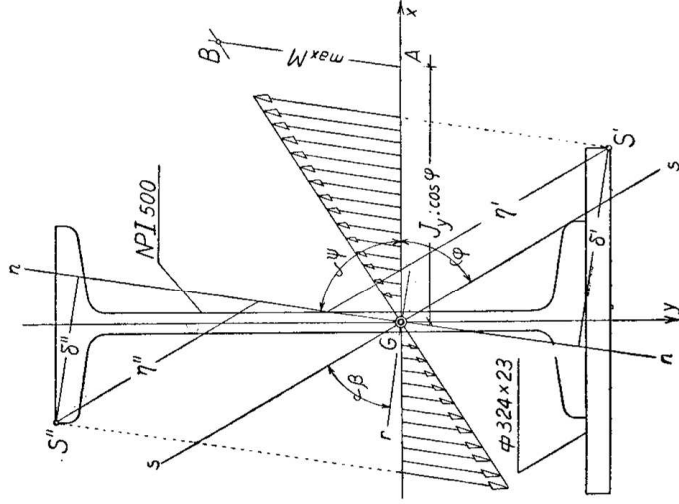


Fig. 27

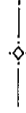
La scala in cui leggere queste ordinate, se sono state impiegate: per il disegno la scala  $n_1$ , per i momenti di inerzia la scala  $n_2$  e per il momento flettente quella  $n_3$ , risulta:  $1 \text{ cm} = n_1 n_3 / n_2 \text{ t/cm}^2$ .

(Nel disegno originario erano per noi  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 3000$ ,  $n_3 = 300$  e quindi:  $1 \text{ cm} = 4 \times 300/3000 = 0,4 \text{ t/cm}^2$ ).

## C - TORSIONE SEMPLICE

**Esercizio 24** — Un albero di trasmissione con sezione a corona circolare di diametro esterno  $d_e = 70 \text{ mm}$  e diametro interno  $d_i = 30 \text{ mm}$ , è soggetto a un momento torcente  $M_t$ . Determinare:

- il diametro  $d_0$  della sezione circolare piena che è anche atta a realizzarlo a parità di tensione tangenziale massima;
- il momento torcente massimo che nei due casi l'albero è capace di trasmettere senza che la tensione tangenziale vi superi il valore  $0,6 \text{ t/cm}^2$ ;
- l'angolo di torsione e la rotazione relativa di due sezioni distanti di  $1 \text{ m}$  per le due diverse forme della sezione, supposto che sia  $G = 848 \text{ t/cm}^2$ .



Il cilindro di S. Venant risulta sollecitato a *torsione semplice* quando le caratteristiche della sollecitazione non nulle sulla base libera si riducono a un momento torcente  $M_t$ , ch  allora (Es. 13) tale caratteristica si trasmette inalterata da sezione a sezione senza introdurne altre.

In queste condizioni, ferme restando le ipotesi di vincolo (Es. 13) alla base del cilindro e per una forma qualunque della sezione trasversale, la deformazione presenta le seguenti caratteristiche essenziali: le sezioni trasversali ruotano intorno a un punto  $O_1$ , *centro di torsione*, che   lo stesso per tutte e generalmente distinto dal baricentro  $G$ ; i loro punti subiscono uno ad uno un diverso spostamento dal piano trasversale iniziale, m no che il baricentro il quale resta invece su tale piano; come conseguenza le sezioni non restano piane ma si ingobbano; l'ingobbamento   per  lo stesso per tutte.

Le fibre longitudinali, a eccezione di quella che   luogo dei centri di torsione —*asse di torsione*— si avvolgono secondo eliche cilindriche con lo stesso passo.