

I CASI SEMPLICI E COMPOSTI DEL PROBLEMA DI SAINT VENANT ⁽¹⁾

Esercizio 13 — Sulla base libera di un solido vincolato al modo di S. Venant di lunghezza $l = 6$ m, nel punto P $\equiv (x_0; y_0) \equiv (21; 7)$ cm, agisce una forza R di 14 t definita in direzione e senso dalla terna di coseni direttori:

$$m = 0,570, \quad n = 0,494, \quad p = 0,657.$$

Calcolare le caratteristiche della sollecitazione relative alla sezione trasversale del solido all'ascissa $\bar{z} = 0,75$ m.

Come accennammo sulla fine della *Premessa*, il problema di S. Venant costituisce la sistemática schematizzazione dei problemi più correnti della tecnica costruttiva.

Esso studia un solido cilindrico omogeneo e isotropo (Es. 12) sotto ipotesi tutte speciali per quanto ne riguarda le condizioni di vincolo, la distribuzione delle forze esterne, lo stato di tensione; malgrado che tali ipotesi siano invero eccessivamente restrittive, esse portano nondimeno a conclusioni di solito accettabili per gli scopi della pratica.

Il *solido di S. Venant* è un cilindro con dimensione longitudinale preponderante sulle dimensioni trasversali; è supposto vincolato solo a una delle basi in corrispondenza dell'elemento superficiale che ne contorna il baricentro O , al modo che vi farebbe una piccola goccia di saldatura; viene riferito stabilmente alla terna di assi $O(x, y, z)$, nella quale x ed y sono gli assi principali centrali d'inerzia della sezione vincolata e z è il suo stesso asse (fig. 16 a), ed è supposto cari-

⁽¹⁾ Per tutto questo Cap. v. L. F. DONATO I. c. Cap. VIII.

cato in corrispondenza delle due basi con distribuzione di forze uguali ad opposte, ma peraltro qualunque, mentre invece ne è scarica l'intera superficie laterale. Vi si astrae di più dall'effetto delle forze di massa, che sono ritenute identicamente nulle in tutti i punti.

In tali condizioni è valido il principio di S. Venant, per il quale, a sufficiente distanza dalle basi, la deformazione del solido e lo stato di tensione che l'accompagna punto per punto sono indipendenti dalla effettiva distribuzione delle forze sulle basi medesime, risultano cioè gli stessi per due qualunque distribuzioni di forze staticamente equivalenti.

Quanto allo stato di tensione nel punto generico, si ammette che risulti in tutti i casi:

$$(28) \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 .$$

Ciò equivale fisicamente a riguardare il solido come costituito da un fascio parallelo di fibre longitudinali fra loro indipendenti, così da essere incapaci di trasmettersi mutue azioni trasversali. Lo stato di tensione più complesso che potrà presentarsi, sarà in conseguenza quello in cui siano diverse da zero tutte e tre le rimanenti tensioni: le σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} del caso generale; saranno invece eventuali casi possibili particolari: quello in cui è diversa da zero la sola tensione normale σ_z ; quello in cui lo sono questa tensione e una delle componenti tangenziali τ_{xz} e τ_{yz} ; quello in cui siano diverse da zero queste due componenti e infine quello in cui sia tale una sola di queste.

Ciò che importa osservare è che, in tutti i casi, per la reciprocità delle tensioni tangenziali: $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, lo stato di tensione nel punto generico del solido resta pienamente individuato quando si siano determinate, nel riferimento $O(xyz)$, le tre componenti della tensione p sopra *un solo elemento superficiale* per il punto, anzichè sopra tre elementi mutuamente ortogonali come sarebbe necessario (Es. 4) ove non si ammettesse- ro le condizioni interne (28); e precisamente le tre

componenti della tensione p_z sopra l'elemento superficiale che appartiene alla sezione trasversale del solido per il punto.

Una volta assegnata la distribuzione delle forze sulle basi del solido, si tratta dunque, in ogni caso, d'imparare a giudicare punto per punto del modo di agire di queste forze nella sezione trasversale per il

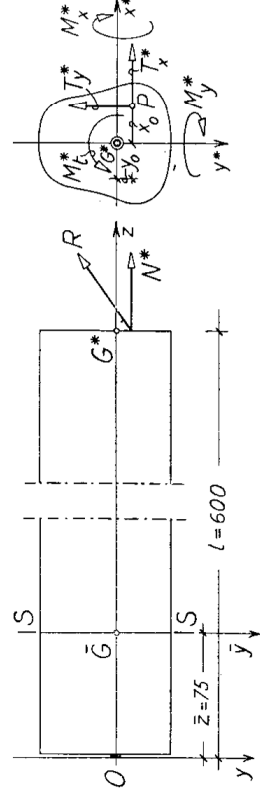


Fig. 16

punto stesso e, in tale sezione, sull'elemento che contiene il punto.

La prima parte di questa ricerca consiste

nel determinare le caratteristiche della sollecitazione relative alla sezione trasversale che interessa, vale a dire i parametri del sistema di forze applicate per es. alla base libera del solido, valutati nel riferimento $\bar{G}(x, y, z)$ che ha l'origine nel baricentro della sezione medesima e gli assi paralleli a quelli del riferimento $O(x, y, z)$ del solido (fig. 16).

Nel caso dell'enunciato, le forze sulla base libera equivalgono staticamente alla forza R di 14 t caratterizzata geometricamente dagli elementi assegnati (punto d'azione P , coseni direttori n e p); essa ammette allora una componente N^* secondo l'asse z del solido e una componente T^* sul piano della sezione libera, decomponibile a sua volta secondo gli assi principali x^* ed y^* ; le tre componenti della R che così nascono valgono allora com'è noto:

$$(29) \quad N^* = pR ; \quad T_x^* = mR ; \quad T_y^* = nR .$$

Trasportare, per ridurci al riferimento $G^*(x^*, y^*, z)$ della stessa base libera, la R parallelamente a se stessa da P fino a passare per G^* , equivale d'altra parte a trasportare le sue tre componenti (29) da P a G^* (fig. 16);

nascono in conseguenza i tre momenti di trasporto (4):

$$(30) \quad M_x^* = N^* y_0; \quad M_y^* = N^* x_0; \quad M_t^* = T_y^* x_0 - T_x^* y_0.$$

I sei parametri (29) e (30) così determinati, costituiscono le *caratteristiche della sollecitazione* relative alla base libera del solido $z = l$.

È noto che esse vengono dette: N^* *forza normale*; T_x^* e T_y^* *forze taglianti*; M_x^* ed M_y^* *momenti flettenti*; M_t^* *momento torcente*.

Si tratta ora di determinare queste stesse caratteristiche per la sezione S-S all'ascissa $z = 0,75$ m.

Al proposito è evidente, o comunque facile da verificare, che passando dalla base libera a questa sezione le tre forze finite e il momento torcente restano, come tali, inalterati; i due momenti flettenti, invece, vengono alterati per l'aggiunta algebrica dei momenti di trasporto rispettivamente delle forze taglianti T_y^* e T_x^* dalla base libera alla sezione in parola.

Le caratteristiche relative a questa sezione hanno dunque in definitiva le espressioni:

$$(31) \quad \begin{cases} N \equiv N^* & ; & T_x \equiv T_x^* & ; & T_y \equiv T_y^* \\ M_x = M_x^* - T_y^* (l - \bar{z}) & ; & M_y = M_y^* - T_x^* (l - \bar{z}) & ; & M_t \equiv M_t^* \end{cases}$$

Queste relazioni avvertono che sono casi possibili di sollecitazione semplice per il solido soltanto quelli a *forza normale*, a *flessione* e a *torsione*, potendo solamente le tre caratteristiche N ed M_x (o M_y) ed M_t sussistere diverse da zero indipendentemente l'una dalle altre; la presenza di una forza tagliante T_y^* o T_x^* sulla base libera importa invece, per la quarta o la quinta delle (31), la presenza ulteriore di un momento flettente nella sezione generica del solido, risultandone così per questo una *sollecitazione composta di flessione e taglio*.

Sollecitazioni composte si hanno poi naturalmente combinando in vario modo più d'una delle sei caratteristiche [come ad es. N ed M_x (o M_y); N , T_y ed M_x (ovvero N , T_x ed M_y); T_y , M_x ed M_t ; ecc.] o eventualmente anche tutte e sei insieme.

Coi nostri dati, essendo $l - \bar{z} = 600 - 75 = 525$ cm, le

(4) v. MAGINI 1. c. Cap. VIII, n. 57.

(31), con riguardo alle (29) e (30), forniscono i valori:

$$N = 0,657 \times 14 \cong 9,20 \text{ t}; \quad T_x = 0,570 \times 14 \cong 7,98 \text{ t};$$

$$T_y = -0,494 \times 14 = -6,96 \text{ t};$$

$$M_x = 9,2 \times 7 + 6,96 \times 525 \cong 27,2 \text{ tm}; \quad M_y = 9,2 \times 21 - 7,98 \times 525 \cong 39,96 \text{ tm};$$

$$M_t = -6,96 \times 21 - 7,98 \times 7 = -2,02 \text{ tm}.$$

Note così le caratteristiche della sollecitazione relative alla sezione in esame, potremo ora determinare, come dicevamo di sopra, lo stato di tensione nel punto generico della sezione, quando conosceremo qualitativamente e quantitativamente come agisce sull'elemento che lo contorna in tale sezione ciascuna delle caratteristiche; basterebbe infatti allora, per avere i valori della σ_z e delle τ_{xy} e τ_{yz} , sovrapporre opportunamente gli effetti.

Ora ciò resterà stabilito grado a grado negli Esercizi che seguono, nei quali vengono trattati vari esempi dei diversi casi di sollecitazione semplice ed i sollecitazione composta che più interessano la pratica.

A - FORZA NORMALE SEMPLICE

Esercizio 14 — Una barretta di acciaio a sezione retta circolare di diametro $d = 30 \text{ mm}$ e lunga 50 cm , è sollecitata a trazione da una forza assiale $N = 30 \text{ t}$.

Individuare le sezioni su cui sono massime rispettivamente la tensione normale e la tensione tangenziale; trovare il rapporto tra questi due massimi e valutare le variazioni che subiscono le dimensioni e il volume della barretta supponendo il materiale omogeneo e isotropo con modulo di elasticità normale $E = 2200 \text{ t/cm}^2$ e coefficiente di Poisson $1/m = 3/10$.

Il solido di S. Venant risulta sollecitato a forza normale semplice quando le caratteristiche non nulle della sollecitazione relative alla base libera si riducono alla sola forza normale N , in quanto allora, come ri-

conosciuto all'Esercizio 13, questa forza si trasmette inalterata, senza introdurre cioè altre caratteristiche, da una sezione all'altra del solido. Si conviene di riguardare N come *positiva* se è una forza di trazione, come *negativa* se di compressione.

A sufficiente distanza dalle basi del solido, qualunque sia la distribuzione delle forze su di esse purchè staticamente equivalenti alla forza assiale N , delle tre possibili tensioni residue σ_z , τ_{zx} e τ_{zy} in tutto il problema di S. Venant (Es. 13), solo la prima è diversa da zero e vale notoriamente:

$$(32) \quad \sigma_z = \frac{N}{A},$$

se con A si indica l'area della sezione trasversale. In tutti i punti del solido lo stato di tensione è allora qualitativamente e quantitativamente lo stesso, ed è immediato riconoscere ch'esso è del tipo più semplice, cioè *monoassiale*.

Invero la (13'), coi diversi simboli adottati nel problema di S. Venant, si riduce alla forma:

$$\sigma_v^2 (\sigma_v - \sigma_z) = 0,$$

e ammette quindi la radice nulla come radice doppia (nella quale cioè coincidono due delle tensioni principali) e la radice non nulla:

$$(33) \quad \sigma_{Tp} = \sigma_z;$$

la σ_z è dunque tensione principale, vale a dire l'elemento della sezione trasversale per il punto generico P del solido è elemento principale, ed è l'unico elemento cosiffatto non neutro; il fascio avente per sostegno la parallela per P all'asse z è invece tutto di piani neutri; lo stato di tensione è in conseguenza lo stesso (Es. 11) in tutti i fasci di elementi che hanno per sostegno una qualunque retta per P normale all'asse z ; scegliamo ad e. quello di sostegno x ; come piani

comodi di riferimento in questo fascio possiamo assumere quelli aventi per normali gli altri due assi coordinati y e z ; orientati allora, per la rappresentazione grafica dello stato di tensione nel fascio, l'asse σ come z e l'asse τ in senso opposto all'asse y (fig. 17), il circolo che ha per diametro $OA = \sigma_z$ è il circolo di Mohr; A è di più il polo della rappresenta-

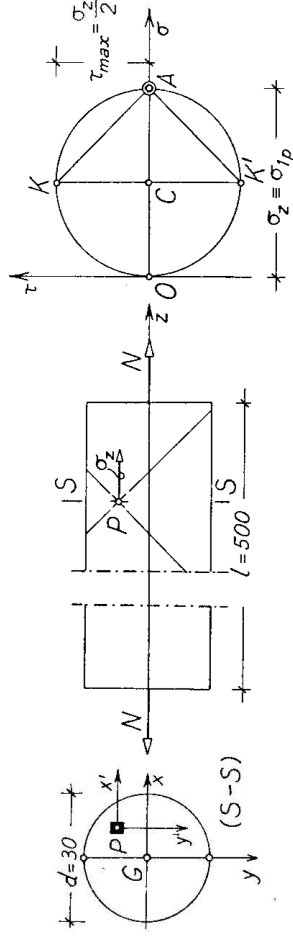


Fig. 17

zione; gli elementi del fascio che sopportano la massima tensione tangenziale sono dunque i due inclinati di 45° all'asse z ; poichè in ognuno degli infiniti fasci aventi per sostegni le normali a z in P le cose vanno allo stesso modo ora detto, si conclude che in ogni punto del solido gli elementi che sopportano la massima tensione tangenziale inviluppano il cono che ha per sostegno la parallela a z per il punto e semiapertura 45° ; il valore di questa tensione tangenziale massima è $\sigma_z/2$; lo stesso valore ha poi la tensione normale che l'accompagna.

Poichè quanto si è detto sopra vale per il punto generico della generica sezione trasversale, si possono anche estendere le conclusioni dagli elementi superficiali alle intere sezioni del solido, dicendo che quelle trasversali sopportano la massima tensione normale (la σ_z) quelle a 45° sull'asse del solido la massima tensione tangenziale, la quale vale poi metà della tensione normale massima.

Coi dati del problema, essendo $A = 707 \text{ mm}^2$ l'area della sezione della barretta, la (32) fornisce:

$$\sigma_{tp} \equiv \sigma_z = \frac{30000}{707} = 42,4 \text{ Kg/mm}^2 = 4,24 \text{ t/cm}^2 ;$$

e quindi anche:

$$\max \tau \equiv \frac{\sigma_z}{2} = 21,2 \text{ Kg/mm}^2 = 2,12 \text{ t/cm}^2 .$$

Quanto alla deformazione, è poi noto che le sezioni piane (trasversali o meno) restano piane durante tutta la deformazione; il che significa che le fibre longitudinali del solido o si allungano (caso di N positiva) o si accorciano (caso di N negativa) tutte ugualmente; trasversalmente, in corrispondenza dei due casi, le dimensioni della sezione si contraggono ovvero si dilatano pure ugualmente in tutte le direzioni.

Le componenti di deformazione sono d'altronde esprimibili immediatamente per la σ_z , essendo noti il modulo E e il coefficiente di Poisson l/m ; risultano infatti in base alle (26')

$$(34) \quad \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} ; \quad \epsilon_x = \epsilon_y = - \frac{\sigma_z}{m E} = - \frac{\epsilon_z}{m} ,$$

e queste ultime precisano che la deformazione trasversale è di segno opposto a quella longitudinale e vale l/m di questa; ciò giustifica per il coefficiente l/m di Poisson il nome anche di *coefficiente di contrazione laterale*.

Numericamente è:

$$\epsilon_z = \frac{4,24}{2200} = + 1,93 \times 10^{-3} ; \quad \epsilon_x = \epsilon_y = - \frac{3}{10} \epsilon_z = - 0,579 \times 10^{-3} .$$

L'allungamento totale della barretta risulta in conseguenza per le (34) e la (32):

$$(35) \quad \Delta l = \epsilon_z l = \frac{N l}{E A} ;$$

coi numeri:

$$\Delta l = 1,93 \times 500 \times 10^{-3} \text{ mm} = 0,965 \text{ mm} ;$$

e in modo analogo l'accorciamento del diametro:

$$\Delta d = \epsilon_x d = 0,579 \times 30 \times 10^{-3} \text{ mm} = 0,01737 \text{ mm} .$$

La variazione ΔV di volume potrebbe ora determinarsi come differenza fra il volume V' che corrisponde alle nuove dimensioni:

$$L = l + \Delta l; \quad D = d - \Delta d,$$

e il volume V iniziale della barretta; più comodamente però, essendo costante il coefficiente di dilatazione cubica ϑ , può calcolarsi ΔV come prodotto ϑV ; in base alla (8), e con riguardo alle (34), è allora:

$$\Delta V = \vartheta V = \frac{m-2}{m} \varepsilon_z l A = +0,4 \times 1,93 \times 50 \times 7,07 \times 10^{-3} \cong +0,273 \text{ cm}^3.$$

Non sfugga che a una forza N di trazione corrisponde nel solido un *aumento* di volume: ciò significa che la deformazione longitudinale prepondera su quella trasversale; il contrario accade se N è una forza di compressione.

Esercizio 15 — Una barra cilindrica di acciaio di diametro $d = 10 \text{ cm}$ lunga $l = 100 \text{ cm}$, è accostata alle estremità contro due piastre rigide a distanza mutua invariabile l .

Si domanda la spinta che la barra esercita contro le piastre per un aumento uniforme di temperatura $\Delta t = 35^\circ$, sapendo che il coefficiente di dilatazione termica del materiale è $\alpha = 0,12 \times 10^{-4}$ e che il suo modulo di elasticità normale è $E = 2200 \text{ t/cm}^2$.

—◇—

Per lo sbalzo termico uniforme Δt , ove fosse libera di dilatarsi, la barra subirebbe longitudinalmente la dilatazione unitaria:

$$\varepsilon_z = \alpha \Delta t = 0,12 \times 35 \times 10^{-4} = 4,2 \times 10^{-4},$$

e quindi per tutta la lunghezza $l = 100 \text{ cm}$, l'allungamento:

$$\Delta l = 420 \times 10^{-4} \text{ cm}.$$

Essendo rigide, le piastre contro cui l'asta è accostata impediscono però totalmente questo allunga-

mento; esso si traduce allora in una forza di pressione N contro le piastre (fig. 18) forza che, ovviamente, risulta uguale e contraria a quella che dovremo applicare alle due teste della barra e secondo il suo

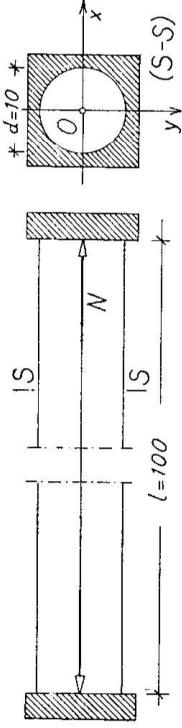


Fig. 18

asse, dopo che la barra medesima avesse subito l'allungamento termico suddetto, per riportarla alla lunghezza iniziale.

Per la (35) (Es. 14) tale forza di compressione vale dunque:

$$N = \frac{EA \Delta t}{l} = \frac{2200 \times 78,5 \times 420 \times 10^{-4}}{100} = 72,82 \text{ t ,}$$

da assumersi, secondo le ordinarie convenzioni, come negativa.

La tensione σ_z che tale forza desta nella sezione trasversale, può calcolarsi direttamente sul valore della dilatazione termica unitaria ϵ_z mediante la prima delle (34):

$$\sigma_z = E \epsilon_z ,$$

cioè sostituendo:

$$\sigma_z = 2200 \times 4,2 \times 10^{-4} \text{ t/cm}^2 = 0,924 \text{ t/cm}^2 ;$$

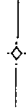
ovvero anche dalla (32):

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{72,82}{78,5} \text{ t/cm}^2 = 0,924 \text{ t/cm}^2 .$$

Esercizio 16 — Due fili metallici del diametro $0,7 \text{ mm}$ lunghi 6 m e disposti verticalmente alla distanza $d = 8 \text{ cm}$, sorreggono un'asta rigida orizzontale alla loro estremità inferiore.

Supposto che per un carico $N = 60 \text{ Kg}$ applicato all'estremità di uno dei

fili la barra faccia con la sua direzione primitiva l'angolo $\varphi = 30^\circ$, calcolare il modulo di elasticità normale E del filo.



L'allungamento Δl subito dal filo alla cui estremità è stato applicato il carico, risulta (fig. 19):

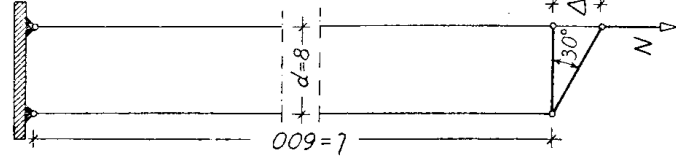


Fig. 19

$$\Delta l = d \operatorname{tg} 30 = 8 \times 0,577 = 4,62 \text{ cm} .$$

Secondo la (35) deve però anche essere :

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} ,$$

nella quale tutti gli elementi sono noti meno il modulo E .

Risolvendo quindi per questa incognita e sostituendo i valori assegnati, compreso quello ora calcolato, risulta di seguito:

$$E = \frac{Nl}{A\Delta l} = \frac{0,06 \times 600}{0,0038 \times 4,62} = 2025 \text{ t/cm}^2 .$$

Esercizio 17 — Una provetta di acciaio di diametro $d = 2,5 \text{ cm}$ lunga 20 cm , subisce un allungamento $0,0153 \text{ cm}$ sotto un carico assiale di 8 t . Calcolare l'allungamento, la dilatazione cubica, la tensione e il lavoro di deformazione corrispondenti a un carico di 10 t .



Dalla (35), introducendovi gli elementi relativi alla prima condizione di carico considerata dal problema, possiamo anzitutto calcolare E al modo visto all'Esercizio precedente:

$$E = \frac{Nl}{A\Delta l} = \frac{8 \times 20}{4,91 \times 0,0153} = 2130 \text{ t/cm}^2 ;$$

introducendo successivamente nella stessa (35) il carico di 10 t , potremo allora determinare in modo diretto l'allungamento Δl che consegue a questo carico.

Più speditamente però, e a meno anche del calcolo di E , possiamo invece applicare la legge di Hook, per la quale l'allungamento cercato e quello assegnato in riferimento al carico di 8 t, devono risultare proporzionali ai carichi che li provocano; sta dunque la proporzione:

$$\Delta l : 10 = 0,0153 : 8 ,$$

dalla quale:

$$\Delta l = \frac{0,153}{8} \cong 0,0191 \text{ cm} .$$

La dilatazione cubica ϑ può ora essere valutata come somma dei tre coefficienti di dilatazione lineare ϵ_x , ϵ_y e ϵ_z in base alla (8), che per le (34) diviene più semplicemente:

$$\vartheta = \frac{m-2}{m} \frac{N}{EA} ,$$

e nella quale, se trattasi di acciaio ordinario, possiamo assumere per l'inverso del coefficiente di Poisson il valore $m = 10/3$.

È dunque sostituendo:

$$\vartheta = \frac{2}{5} \times \frac{10}{2130 \times 4,91} = \frac{4}{10458,3} = 0,382 \times 10^{-3} \text{ cm}^3/\text{cm}^3 .$$

La tensione σ_z che il carico di 10 t desta nella sezione trasversale è poi per la (32):

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{10}{4,91} \cong 2,04 \text{ t/cm}^2 .$$

Il lavoro di deformazione conseguente all'applicazione di tale carico, può infine valutarsi o facendo ricorso al teorema di Clapeyron, in virtù del quale esso risulta misurato dalla metà del lavoro che la forza di 10 t —la quale di fatto raggiunge questo valore gradatamente partendo dal valore zero— eseguirebbe se agisse fin dall'inizio e per tutta la deformazione con la sua intensità finale, vale a dire, essendo Δl lo spostamento del suo punto di applicazione, da:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} N \Delta l = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA} ;$$

ovvero anche moltiplicando per il volume della provetta l'energia potenziale elastica unitaria φ che, dalla forma completa (25) per un solido omogeneo e isotropo (Es. 12), si semplifica nel caso particolare in esame in quest'altra:

$$\varphi = \frac{1}{2E} \sigma_x^2 = \frac{N^2}{2EA^2},$$

cosicchè:

$$(36) \quad \phi_1 = \varphi Al = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA},$$

che coincide con l'espressione data di sopra.

Sostituendovi i dati si trova:

$$\phi_1 = 0,0955 \text{ tcm}.$$

* * *

OSSERVAZIONE. Quanto si è detto sopra e all'Esercizio precedente, indica un modo semplice di determinare il modulo di elasticità normale di un materiale: basta infatti determinare sperimentalmente sopra una lunghezza prestabilita, l'allungamento elastico prodotto da un carico assiale noto in una provetta calibrata costituita di quel materiale.

Naturalmente bisogna disporre di apparecchi di alta precisione (ad es. l'apparecchio a specchi di Martens).

Esercizio 18 — Un sistema elastico piano simmetrico è costituito da tre aste prismatiche vincolate con cerniere prive di attrito: mutuamente nell'estremo comune C , al suolo nei punti L , K , M . Le due aste laterali sono costituite da un tondo di acciaio di diametro $d = 26 \text{ mm}$ e risultano inclinate all'orizzontale dell'angolo $\varphi = 50^\circ$; l'asta centrale CK è formata da un NP I 30 ed ha, misurata fra i centri delle sue cerniere di estremità, lunghezza $l = 5 \text{ m}$.

Supposto di assoggettare l'asta centrale CK ad un aumento uniforme di temperatura, si domanda quale valore può raggiungere tale aumento sen-

za che nel sistema venga superata la tensione ammissibile $k = 1,4 t/cm^2$.

Per uno sbalzo di temperatura Δt impresso con continuità e uniformità all'asta CK , questa, ove fosse libera di dilatarsi, subirebbe l'allungamento:

$$\Delta l^* = \alpha l \Delta t ,$$

in cui $\alpha = 0,12 \times 10^{-4}$ è il coefficiente di dilatazione termica dell'acciaio.

La cerniera C si oppone però elasticamente, per la presenza delle due aste laterali, a questa libera dilatazione: ne nasce così una forza crescente gradualmente con la temperatura; per ragioni di simmetria, tale forza si distribuisce in misura uguale sulle due aste laterali, le quali risultano tese: con una azione uguale e contraria esse rispondono allora singolarmente sull'asta CK , che pertanto risulta compressa.

Detti N il valore di questa compressione ed N' quello della trazione in ciascuno dei tondi laterali, è intanto evidente che, per l'equilibrio del nodo C , deve essere:

$$N' = \frac{N}{2 \operatorname{sen} \varphi}$$

ovvero:

$$N = 2 N' \operatorname{sen} \varphi .$$

A questi valori corrispondono rispettivamente: per ciascuno dei tondi l'allungamento elastico:

$$\Delta l' = \frac{N'l}{EA'} = \frac{N'l}{EA' \operatorname{sen} \varphi} ;$$

per l'asta CK l'accorciamento elastico:

$$\Delta l'' = - \frac{Nl}{EA} ,$$

con lo stesso significato per i simboli; l'allungamento effettivo di quest'asta risulta allora:

$$\Delta l = \Delta l^* + \Delta l'' = \alpha l \Delta t - \frac{Nl}{EA} .$$

Ora, per ogni valore di N , cioè di Δl , il nodo C deve risultare di collegamento, non si deve cioè verificare in esso sconnesione delle aste che vi fanno capo. Ciò equivale a dire che l'allungamento elastico $\Delta l'$, nella direzione originaria, di ciascuna asta laterale deve aver tale valore che, ruotando l'asta intorno alla cerniera di base, ruotando l'asta intorno alla cerniera di base, deve esser sentito alla CK l'allungamento effettivo Δl ; sostituendo, com'è lecito trattandosi di deformazioni piccolissime, l'arco alla tangente, ciò si traduce (fig. 20) nella relazione:

$$\Delta l' = \Delta l \operatorname{sen} \varphi .$$

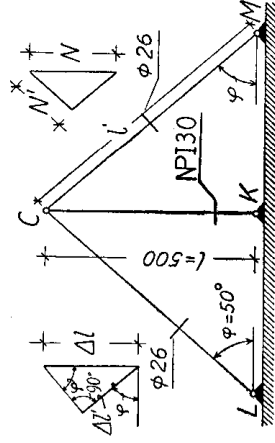


Fig. 20

Introducendovi le espressioni di sopra per $\Delta l'$ e Δl , col tener conto in quest'ultima del legame stabilito fra N ed N' , ne risulta:

$$\frac{N'}{E} \frac{A + 2 A' \operatorname{sen}^3 \varphi}{A A' \operatorname{sen}^2 \varphi} = \alpha \Delta t$$

da cui:

$$\Delta t = \frac{1}{\alpha E} \frac{A + 2 A' \operatorname{sen}^3 \varphi}{A A' \operatorname{sen}^2 \varphi} N' .$$

Da questa è evidente che il massimo valore assegnabile a Δt in riguardo alla tensione ammissibile k , dipende dal massimo valore N' che a questa corrisponde nella sezione resistente di ciascun tirante laterale, cioè:

$$N'_{\max} = k A' .$$

Si ha dunque per Δt la limitazione:

$$\Delta t \leq \frac{k}{\alpha E} \times \frac{A + 2 A' \operatorname{sen}^3 \varphi}{A \operatorname{sen}^2 \varphi} ,$$

dalla quale, sostituendovi i dati e assunto $E = 2100 \text{ t/cm}^2$:

$$\max \Delta t = \frac{1,4}{0,12 \times 21} \times \frac{69 + 2 \times 5,31 \times 0,766^3}{69 \times 0,766^2} 10^3 \cong 101^{\circ} .$$

Esercizio 19 — Un bullone di acciaio di sezione $A_1 = 6 \text{ cm}^2$ è investito in un manicotto di rame ad esso coassiale di sezione $A_2 = 12 \text{ cm}^2$. Determinare le tensioni che si sviluppano nei due pezzi per $1/4$ di giro forzato del dado nella madrevite, sapendo che questa ha passo $p = 5 \text{ mm}$, che i due pezzi cilindrici hanno lunghezza comune $l = 75 \text{ cm}$ e che i moduli di elasticità dei due materiali valgono rispettivamente:

$$E_1 = 2200 \text{ t/cm}^2, \quad E_2 = 1100 \text{ t/cm}^2.$$

Mentre il dado avanza forzatamente — ciò che si verifica a partire dalla posizione in cui la piastrina C di distribuzione è d'esso accostata, senza pressione, contro la sezione terminale del manicotto (fig. 21) — si genera una forza di trazione nel bullone, di compressione invece del manicotto; ad ogni istante queste due forze risultano d'altra parte uguali e contrarie.

Se X è la loro intensità comune quando il dado è avanzato forzatamente di $p/4$, è ovvio che X deve essere tale che la somma dell'allungamento del bullone e dell'accorciamento del manicotto uguali l'avanzamento $p/4$; in formula, con riguardo alla (35), deve dunque verificarsi la relazione:

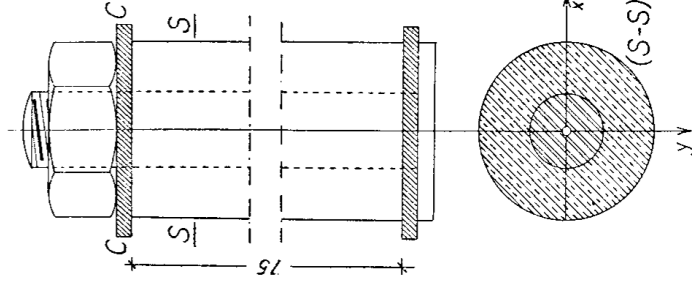


Fig. 21

$$\frac{Xl}{E_1 A_1} + \frac{Xl}{E_2 A_2} = \frac{p}{4};$$

$$X = \frac{p E_1 A_1 E_2 A_2}{4l(E_1 A_1 + E_2 A_2)} = \frac{p E_2 A_2}{4l(1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1})}.$$

Sostituendovi i dati e osservando che incidentalmente il rapporto dentro parentesi è uguale all'unità:

$$X = \frac{0,5 \times 1100 \times 12}{4 \times 75 \times 2} = 11 \text{ t}.$$

Le tensioni che tale forza genera nelle sezioni trasversali del bullone e del manicotto valgono allora, con riguardo al segno, rispettivamente:

$$\sigma' = \frac{11}{6} \cong + 1,83 \text{ t/cm}^2; \quad \sigma'' = - \frac{11}{12} \cong - 0,92 \text{ t/cm}^2.$$

Esercizio 20 — Un cilindro filettato di acciaio viene avvitato in un manicotto di rame e il complesso assoggettato uniformemente allo sbalzo termico $\Delta t = 12^\circ$.

Si domandano la forza totale e le tensioni generate da tale variazione di temperatura nelle sezioni trasversali dei due pezzi, sapendo che le loro aree valgono rispettivamente:

$$A_1 = 6 \text{ cm}^2,$$

$$A_2 = 20,6 \text{ cm}^2$$

e che i coefficienti di dilatazione termica e i moduli di elasticità normali dell'acciaio e del rame sono:

$$\alpha_1 = 0,125 \times 10^{-4};$$

$$\alpha_2 = 0,165 \times 10^{-4}$$

$$E_1 = 2100 \text{ t/cm}^2;$$

$$E_2 = 1200 \text{ t/cm}^2.$$

Se fossero completamente liberi di dilatarsi, i due pezzi, nello sbalzo termico uniforme Δt , subirebbero per unità di lunghezza gli allungamenti:

$$\Delta_1 = \alpha_1 \Delta t = 0,125 \times 12 \times 10^{-4} = 150 \times 10^{-6},$$

$$\Delta_2 = \alpha_2 \Delta t = 0,165 \times 12 \times 10^{-4} = 198 \times 10^{-6};$$

ove mancasse la filettatura, si verificherebbe quindi uno scorrimento relativo fra manicotto e bullone; in quanto invece la filettatura impedisce tale scorrimento, nasce fra i due

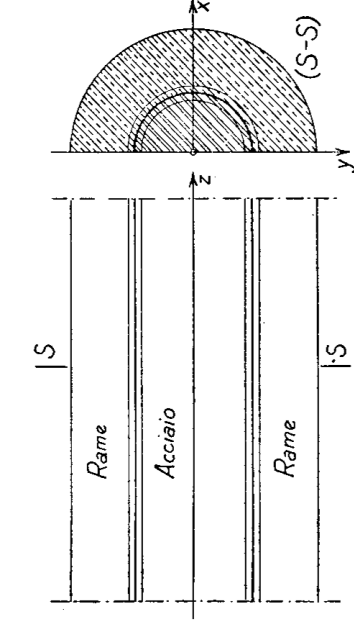


Fig. 22

pezzi, lungo tutta la superficie di contatto, una interazione che, per l'uniformità dello sbalzo termico e per simmetria, equivale ad una forza assiale di compressione nel manicotto di trazione nel bullone, e che conserva nel proprio piano, durante e dopo il riscaldamento, le varie sezioni trasversali S-S (fig. 22).

Se N è il valore assoluto finale di questa forza normale, saranno:

$$\Delta'_1 = \frac{N}{E_1 A_1}$$

l'allungamento per unità di lunghezza che essa produce nel bullone;

$$\Delta'_2 = - \frac{N}{E_2 A_2},$$

l'accorciamento, ancora per unità di lunghezza, che produce invece nel manicotto.

Per quanto detto sopra, la condizione che determina questa forza incognita è:

$$\Delta_1 + \Delta'_1 = \Delta_2 + \Delta'_2.$$

Sostituendo e risolvendo per N , con riguardo di seguito ai dati numerici, risulta:

$$N = \frac{(\Delta_2 - \Delta_1) E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} = \frac{10^{-2} \times (198 - 150) \times 21 \times 6 \times 12 \times 20,6}{10^3 \times (21 \times 6 + 12 \times 20,6)} = \sim 0,4 \text{ t.}$$

Questa forza genera nella sezione del cilindro di acciaio la tensione positiva:

$$\sigma' = \frac{N}{A_1} = \frac{0,4}{6} = 66, (6) \text{ Kg/cm}^2;$$

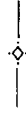
nella sezione del pezzo di rame invece la tensione negativa:

$$\sigma'' = - \frac{N}{A_2} = - \frac{0,4}{20,6} \cong - 19,4 \text{ Kg/cm}^2.$$

B - FLESSIONE SEMPLICE

Esercizio 21 — Determinare il minimo NPI capace di reggere al momento flettente $M_x = 500 \text{ tcm}$ senza che la tensione vi superi il valore ammissibile $k = 1,4 \text{ t/cm}^2$.

Calcolare il raggio di curvatura e la freccia del solido avente per sezione il NP I così determinato e lunghezza $l = 2,5 \text{ m}$, nell'ipotesi che sia citato dal detto momento M_x e vincolato al modo di S. Venant; si assuma $E = 2100 \text{ t/cm}^2$.



Il solido di S. Venant risulta sollecitato a *flessione semplice* quando le caratteristiche della sollecitazione