CAPITOLO III

# ENERGIA POTENZIALE ELASTICA E SOLIDI OMOGENEI E ISOTROPI [1]

**Esercizio 12** — **Coi dati dell'Esercizio 4 per le componenti del tensore degli sforzi:**

$$\underset{(i=1,2,3)}{\sigma_{ii}} = \begin{cases} +4 \text{ t/cm}^2 \\ +2 \quad » \\ -2 \quad » \end{cases} \quad ; \qquad \underset{(ik=12,13,23)}{\sigma_{ik}} = \begin{cases} 1{,}6 \text{ t/cm}^2 \\ 0{,}8 \quad » \\ 1{,}2 \quad » \end{cases} \quad ,$$

**e nell'ipotesi che il solido elastico sia omogeneo e isotropo, calcolare nel punto** $P$**: la densità** $\varphi$ **di energia potenziale elastica, le componenti del tensore di deformazione e il coefficiente** $\vartheta$ **di dilatazione cubica. Si assumano** $E = 2000$ t/cm$^2$, $m = 4$.

Nei due capitoli che precedono sono stati esaminati lo stato di deformazione e lo stato di tensione in un punto $P$ di un solido elastico, indipendentemente, non solo dalle forze esterne che li hanno prodotti —in quanto supponevamo assegnate a priori le componenti di deformazione $\varepsilon_{ik}$ (Es. 1) e quelle di tensione $\sigma_{ik}$ (Es. 4)— ma anche l'uno dall'altro.

Come avvertimmo nella *Premessa*, i due stati si manifestano però insieme nel solido e si sviluppano di pari passo; come conseguenza il corpo immagazzina allora una energia elastica mano mano crescente, la quale, se si ammette che il lavoro eseguito dalle forze esterne per produrre la deformazione non subisca dispersione sotto forma alcuna (calorifica, chimica, cinetica, ecc.) si presenta essenzialmente come una energia potenziale; ritrasformandosi a sua volta in lavoro allo svanire delle forze esterne, questa energia è allora capace di riportare il corpo dalla configurazione deformata raggiunta alla configurazione iniziale.

[1] Per tutto questo Cap. v. L. F. DONATO l. c. Parte I Capp. IV e VI.

Se tale configurazione è quella indeformata, caratterizzata cioè da due sestuple di componenti $\varepsilon_{ik}$ di deformazione e $\sigma_{ik}$ di tensione tutte nulle, l'ammissione ora fatta importa che queste due sestuple, dai valori raggiunti a deformazione effettuata, regrediscano insieme, con le forze, e si annullino contemporaneamente punto per punto.

Perchè ciò possa avvenire è necessario che le $\varepsilon_{ik}$ —che *caratterizzano* lo stato di deformazione raggiunto— siano ben determinate funzioni delle componenti $\sigma_{ik}$ —che *caratterizzano* il corrispondente stato di tensione— e reciprocamente.

Si ammette per queste componenti, come legge la più idonea a interpretare il fenomeno fisico nel suo duplice aspetto geometrico-meccanico, una dipendenza lineare omogenea e reciproca; si pone cioè:

$$\sigma_{ik} = \sum_{jh} a_{ik,jh}\, \varepsilon_{ih} \qquad \text{con} \quad \| a_{ik,jh} \| \neq 0 \;, \tag{21}$$

per ciascuna delle componenti di tensione, e conseguentemente:

$$\varepsilon_{ik} = \sum_{jh} c_{ik,jh}\, \sigma_{jh} \;, \tag{22}$$

per ciascuna delle componenti di deformazione.

Le 81 quantità $a_{ik,jh}$, ovvero le corrispondenti $c_{ik,jh}$, sono funzioni delle coordinate $y_i$ del punto $P$ dipendenti unicamente dalle proprietà del corpo elastico; con l'ammissione fatta che le forze elastiche ammettano potenziale, fra tali funzioni di distinte ve ne sono in effetti soltanto 21.

L'espressione dell' *energia potenziale elastica per unità di volume* o *densità di energia* $\varphi$ *nel punto* $P$, ammettendo che il suo valore sia nullo nello stato indeformato del solido, è d'altra parte, come noto, in funzione delle sei $\varepsilon_{ik}$ e delle corrispondenti sei $\sigma_{ik}$, la seguente:

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum_{ik} \varepsilon_{ik}\, \sigma_{ik} \;; \tag{23}$$

per le (21) e (22), può allora anche esprimersi $\varphi$ come forma quadratica omogenea o delle sole componenti di deformazione o delle sole componenti di tensione:

$$(23') \qquad \varphi = \frac{1}{2} \sum_{ik,jh} a_{ik,jh}\, \varepsilon_{ik}\, \varepsilon_{jh} \; ; \qquad (23'') \qquad \varphi = \frac{1}{2} \sum_{ik,jh} c_{ik,jh}\, \sigma_{ik}\, \sigma_{jh} \; .$$

Tutto ciò per un solido con proprietà generali; se invece il solido, com'è nell'ipotesi dell'enunciato, è omogeneo e isotropo, le quantità $a_{ik,jh}$ (o le corrispondenti $c_{ik,jh}$) non sono più variabili da punto a punto ma delle costanti: *costanti di elasticità*; il loro numero si riduce d'altronde a tre soltanto e cioè a:

E , *modulo di elasticità normale o modulo di Joung*;

G , *modulo di elasticità tangenziale*;

$\frac{1}{m}$, *coefficiente di contrazione laterale o coefficiente di Poisson*;

di più queste tre costanti non sono indipendenti, ma legate fra loro dalla relazione fondamentale:

$$(24) \qquad G = \frac{1}{2} \frac{m}{m+1} E \; ,$$

in base alla quale a caratterizzare completamente le proprietà elastiche di un corpo omogeneo e isotropo, basta assegnare ad es., com'è fatto nell'enunciato, il modulo $E$ e il coefficiente di Poisson.

Si noti che mentre $E$ e $G$ hanno le dimensioni di una tensione e vengono quindi espressi di solito in t/cm², $1/m$ è un coefficiente adimensionale.

In seguito a queste semplificazioni, l'espressione ad es. (23″) della densità $\varphi$ dell'energia potenziale elastica nel punto $P$ come forma quadratica delle componenti $\sigma_{ik}$ di tensione, si riduce alla forma quanto mai semplice:

$$(25) \qquad \varphi = \frac{1}{2E}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{1}{mE}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) + \\ + \frac{1}{2G}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \; .$$

Coi dati dell'enunciato risulta intanto dalla (24):

$$G = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times 2000 = 800 \text{ t/cm}^2 \; ,$$

e allora dalla (25) e di seguito:

$$\varphi = \frac{1}{2 \times 2000}(16 + 4 + 4) - \frac{1}{4 \times 2000}(8 - 8 - 4) + \frac{1}{2 \times 800}(3{,}2 + 0{,}64 + $$
$$+ 1{,}44) = 10^{-3} \times 9{,}8 \ \text{tcm/cm}^3 \ .$$

Al medesimo modo, le espressioni (22) delle $\varepsilon_{ik}$ in funzione delle componenti di tensione si semplificano in queste altre;

$$(26) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \dfrac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{m}\right) & \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{2}\gamma_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{2\,G} \ ; \quad \left[\gamma_{12} = \dfrac{\sigma_{12}}{G}\right] \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{22} - \dfrac{\sigma_{11} + \sigma_{33}}{m}\right) & \varepsilon_{13} = \dfrac{1}{2}\gamma_{13} = \dfrac{\sigma_{13}}{2\,G} \ ; \quad \left[\gamma_{13} = \dfrac{\sigma_{13}}{G}\right] \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{33} - \dfrac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{m}\right) & \varepsilon_{23} = \dfrac{1}{2}\gamma_{23} = \dfrac{\sigma_{23}}{2\,G} \ ; \quad \left[\gamma_{23} = \dfrac{\sigma_{23}}{G}\right] \end{cases}$$

per i dati del problema è allora rispettivamente:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2000}(4 - 0) = +2{,}00 \times 10^{-3} \ ; \quad \varepsilon_{12} = \frac{1{,}6}{2 \times 800} = 1{,}00 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{2}{2000}\left(2 - \frac{2}{4}\right) = +0{,}75 \times 10^{-3} \ ; \quad \varepsilon_{13} = \frac{0{,}8}{2 \times 800} = 0{,}50 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{2}{2000}\left(-2 - \frac{6}{4}\right) = -1{,}75 \times 10^{-3} \ ; \quad \varepsilon_{23} = \frac{1{,}2}{2 \times 800} = 0{,}75 \times 10^{-3} \ ,$$

che sono gli stessi valori assegnati per le sei componenti di deformazione all'Esercizio 1; questa coincidenza ora comprovata giustifica quanto dicemmo all'Esercizio 5, e cioè che potevamo risparmiarci la ricerca delle direzioni delle tensioni principali, in quanto i valori assegnati all'Esercizio 1 per le componenti $\varepsilon_{ik}$ e quelli assegnati invece allora per le componenti $\sigma_{ik}$, corrispondevano di fatto a uno stesso stato di equilibrio del punto $P$; questo punto, si può ora dire sulla scorta dei calcoli, appartiene precisamente a un solido omogeneo e isotropo di modulo di elasticità normale $E = 2000$ t/cm² e coefficiente di Poisson $1/m = 1/4$. La seconda parte di quella avvertenza resta poi giustificata osservando che per le ultime tre delle (26), se è $\sigma_{ik} = 0$ è anche $\gamma_{ik} = 0$ e viceversa; e ciò significa appunto che: *per un solido omogeneo e isotropo la terna delle direzioni principali di deformazione e quella delle direzioni principali di tensione coincidono.*

È poi anche evidente che le (26) sussistono, in particolare, nel riferimento principale, riducendovisi anzi alle prime tre, per altro formalmente invariate:

$$(26') \qquad \begin{cases} \varepsilon_{1p} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{1p} - \dfrac{\sigma_{2p} + \sigma_{3p}}{m}\right) \\[2ex] \varepsilon_{2p} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{2p} - \dfrac{\sigma_{1p} + \sigma_{3p}}{m}\right) \\[2ex] \varepsilon_{3p} = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_{3p} - \dfrac{\sigma_{1p} + \sigma_{2p}}{m}\right) \end{cases}$$

In base a queste potremmo rapidamente verificare che per es. dai valori delle $\sigma_{ip}$ calcolati all'Esercizio 5 si scende ai valori delle $\varepsilon_{ip}$ calcolati all'Esercizio 2, e viceversa da questi a quelli.

Per quanto riguarda infine il coefficiente di dilatazione cubica $\vartheta$, già calcolato all'Esercizio 3 sulle componenti $\varepsilon_{ik}$ di deformazione, si può anche determinarlo in base alla seguente importante relazione:

$$(27) \qquad \vartheta = \frac{m-2}{m\,E} \sum \sigma_{ii} \qquad \left(\text{ovvero } \vartheta = \frac{m-2}{m\,E} \sum \sigma_{ip}\right),$$

la quale, essendo il valore di $\vartheta$ —come ricordammo e verificammo all'Esercizio 3— indipendente dal sistema di riferimento, dice che: *in un solido omogeneo e isotropo la somma delle tensioni normali su tre qualunque elementi mutuamente ortogonali per un punto è costante*, e precisamente proporzionale al valore del coefficiente di dilatazione cubica $\vartheta$ in quel punto.

Coi nostri dati è:

$$\vartheta = \frac{4-2}{4 \times 2000}(4 + 2 - 2) = 1 \times 10^{-3},$$

che, una volta di più, coincide col valore trovato all'Esercizio 3.